УДК 681.2.08 + 512.643 : 519.613.2 : 519.254

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА КОМПЕНСАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЛЕНТОЧНЫМИ МАТРИЦАМИ*

В. М. Ефимов[1], **А. Л. Резник**[1], **А. В. Торгов**[1], **А. В. Тузиков**[2]

[1] *Учреждение Российской академии наук*
Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: reznik@iae.nsk.su
[2] *Объединенный Институт проблем информатики НАН Беларуси,*
220012, г. Минск, ул. Сурганова, 6
E-mail: tuzikov@newman.bas-net.by

Рассматриваются возможности применения алгоритма компенсации линейных искажений при решении систем линейных алгебраических уравнений с ленточными матрицами. Выводятся соотношения, необходимые для процедуры поэтапного отыскания решения, и определяются условия корректности их применения.

Ключевые слова: ленточная матрица, теплицева система уравнений, рекурсивный фильтр, отсчетная функция, частотная характеристика.

Введение. Задача решения теплицевой системы уравнений возникает во многих приложениях, таких как спектральное оценивание, линейное предсказание, построение авторегрессионных фильтров, теория кодов, контролирующих ошибки, и др. Решение многих задач цифровой обработки изображений также требует ускоренных алгоритмов обращения симметричных теплицевых матриц. Примером может служить оценивание по методу максимального правдоподобия сдвига между двумя последовательностями отсчетов с использованием интерполяции, а также взаимная привязка многокадровой последовательности изображений. Стандартные компьютерные методы обращения приводят к существенным временным затратам, которые оказываются неприемлемыми при решении большинства задач реального времени. В принципе вычислительная сложность классических методов решения систем линейных уравнений с матрицей размера $n \times n$ пропорциональна n^3. Для симметричных теплицевых матриц разработаны быстрые алгоритмы Левинсона и Дурбина [1, 2] со сложностью порядка n^2 арифметических операций. В рассматриваемом в данной работе частном случае, когда теплицева матрица не только симметрична, но имеет всего лишь несколько ненулевых «лент», примыкающих к главной диагонали, удается создать еще более эффективные алгоритмы.

Постановка задачи. Под ленточной матрицей в предлагаемой работе будем понимать теплицеву матрицу $A = (a_{ij})$ размера $(2N+1) \times (2N+1)$, которая одновременно является симметричной и имеет ограниченное число $2m+1$ ненулевых диагоналей, т. е. матрица, элементы которой удовлетворяют соотношениям

$$a_{i+l,\,j+l} = a_{j+l,\,i+l} = a_{ij} = \alpha_{|i-j|},$$

*Работа выполнена при поддержке Президиума Российской академии наук (программа № 2.1/2009 г.) и Президиума Сибирского отделения РАН (интеграционный проект № 71/2009 г.).

причем $\alpha_s = 0$ при $s > m$.

Таким образом, в рассматриваемых системах линейных уравнений $A\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ элементы наблюдаемого вектора $\mathbf{Y}$ связаны с элементами неизвестного вектора $\mathbf{X}$ соотношениями:

$$y_n = \begin{cases} \sum\limits_{s=-(n+N)}^{m} \alpha_{|s|} x_{n+s} & \text{при } -N \le n < -(N-m), \\ \sum\limits_{s=-m}^{m} \alpha_{|s|} x_{n+s} & \text{при } -(N-m) \le n \le (N-m), \\ \sum\limits_{s=(n-N)}^{m} \alpha_{|s|} x_{n-s} & \text{при } (N-m) < n \le N. \end{cases} \tag{1}$$

Излагаемая процедура решения систем уравнений, удовлетворяющих соотношениям (1), базируется на введении дополнительного линейного преобразования. Исходная ленточная матрица рассматривается как КИХ-фильтр с частотной характеристикой

$$\tilde{h}(\omega_{2k}) = \sum_{s=-m}^{m} \alpha_{|s|} \cos \omega_{2k} s. \tag{2}$$

Линейные искажения, вносимые этим фильтром в сигнал x_n, корректируются фильтром $z(t) = \sum\limits_{n=-N}^{N} y_n w(t,n)$, где отсчетная функция

$$w(t,n) = w(t-n) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \frac{\cos \frac{2\pi}{2N+1} k(t-n)}{\tilde{h}(\omega_{2k})}. \tag{3}$$

В (2) и (3) $\omega_{2k} = \dfrac{2\pi}{2N+1} k$ — частота, $(2N+1) \times (2N+1)$ — размер матрицы A. Далее на основании формул (1) и (3) будут построены алгоритмы, являющиеся развитием методов, разработанных в [3] и предназначенных для решения систем линейных уравнений с симметричными ленточными матрицами при ограниченном числе ненулевых диагоналей.

Формулы обращения. Интерполяционная формула восстановления сигнала при компенсации его линейных искажений имеет вид [4]

$$z(t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} y_n \sum_{k=-N}^{N} \frac{\cos \frac{2\pi}{2N+1} k(t-n)}{\tilde{h}(\omega_{2k})}. \tag{4}$$

После смены порядка суммирования и последующих преобразований получим

$$z(t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \Big[\frac{\cos \frac{2\pi}{2N+1} kt}{\tilde{h}(\omega_{2k})} \sum_{n=-N}^{N} y_n \cos \frac{2\pi}{2N+1} kn \; + $$

$$+ \frac{\sin \frac{2\pi}{2N+1} kt}{\tilde{h}(\omega_{2k})} \sum_{n=-N}^{N} y_n \sin \frac{2\pi}{2N+1} kn \Big]. \tag{5}$$

С учетом (1) формула (5) после несложных преобразований приводится к виду

$$
\begin{aligned}
z(t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \Big[\cos \frac{2\pi}{2N+1} kt \sum_{n=-N}^{-(N+1-m)} x_n C_0(n,k) \; + \\
+ \sin \frac{2\pi}{2N+1} kt \sum_{n=-N}^{-(N+1-m)} x_n S_0(n,k) \; + \\
+ \cos \frac{2\pi}{2N+1} kt \sum_{n=-(N-m)}^{N-m} x_n \cos \frac{2\pi}{2N+1} kn \; + \\
+ \sin \frac{2\pi}{2N+1} kt \sum_{n=-(N-m)}^{N-m} x_n \sin \frac{2\pi}{2N+1} kn \; + \\
+ \cos \frac{2\pi}{2N+1} kt \sum_{n=N+1-m}^{N} x_n C_0(n,k) + \sin \frac{2\pi}{2N+1} kt \sum_{n=N+1-m}^{N} x_n S_0(n,k) \Big].
\end{aligned} \tag{6}
$$

В выражении (6) константы $C_0(n,k)$ и $S_0(n,k)$ определяются соотношениями

$$
\begin{aligned}
C_0(n,k) = \frac{1}{\tilde{h}(\omega_{2k})} \sum_{s=-(n+N)}^{m} \alpha_{|s|} \cos \frac{2\pi}{2N+1} k(n+s); \\
S_0(n,k) = \frac{1}{\tilde{h}(\omega_{2k})} \sum_{s=-(n+N)}^{m} \alpha_{|s|} \sin \frac{2\pi}{2N+1} k(n+s)
\end{aligned} \tag{7а}
$$

при $-N \le n \le -(N+1-m)$ и

$$
\begin{aligned}
C_0(n,k) = \frac{1}{\tilde{h}(\omega_{2k})} \sum_{s=(n-N)}^{m} \alpha_{|s|} \cos \frac{2\pi}{2N+1} k(n-s); \\
S_0(n,k) = \frac{1}{\tilde{h}(\omega_{2k})} \sum_{s=(n-N)}^{m} \alpha_{|s|} \sin \frac{2\pi}{2N+1} k(n-s)
\end{aligned} \tag{7б}
$$

при $(N+1-m) \le n \le N$. Соотношения (6), (7а) и (7б) служат основой для дальнейших расчетов.

Обратим внимание на то, что если величина t равна целому числу r, лежащему в диапазоне $|r| \le N$, то после выполнения суммирования в формуле (6) получим

$$
\begin{aligned}
z(r) = \sum_{n=-N}^{-(N+1-m)} x_n C(n,r) + \sum_{n=-N}^{-(N+1-m)} x_n S(n,r) + x_r 1[(r+N-m)(N-m-r)] + \\
+ \sum_{n=N+1-m}^{N} x_n C(n,r) + \sum_{n=N+1-m}^{N} x_n S(n,r).
\end{aligned} \tag{8а}
$$

Здесь $C(n,r)$ и $S(n,r)$ — результат взвешенного усреднения по индексу суммирования k ранее введенных констант $C_0(n,k)$ и $S_0(n,k)$ соответственно:

$$C(n,\,\pm r)=\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\cos\frac{2\pi}{2N+1}\,k(\pm r)C_0(n,k);$$
$$S(n,\,\pm r)=\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\sin\frac{2\pi}{2N+1}\,k(\pm r)S_0(n,k); \tag{8б}$$

$1[x]$ — единичная функция:

$$1[x]=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geq 0.\end{cases}$$

Заметим (это понадобится далее для сокращения вычислений), что наборы числовых констант $C(n,r)$ представляют собой четную функцию по индексу r (т. е. $C(n,-r)=C(n,r)$), а наборы $S(n,r)$ — нечетную (т. е. $S(n,-r)=-S(n,r)$). Если сменить знак аргумента r в выражении (8а), то получим соотношение

$$z(-r)=\sum_{n=-N}^{-(N+1-m)}x_nC(n,r)-\sum_{n=-N}^{-(N+1-m)}x_nS(n,r)+x_{-r}1[(r+N-m)(N-m-r)]+$$
$$+\sum_{n=N+1-m}^{N}x_nC(n,r)-\sum_{n=N+1-m}^{N}x_nS(n,r). \tag{8в}$$

Рассчитывая далее и подставляя в уравнения (8а) и (8в) все значения $z(\pm r)$, вычисленные в соответствии с формулой (4), и вновь введенные константы $C(n,r)$, $S(n,r)$, полученные по формулам (8б), можно выразить все неизвестные x_r из диапазона $-(N-m)\leq$ $\leq r\leq(N-m)$ через $2m$ неизвестных x_n из диапазонов $-N\leq n\leq-(N+1-m)$ и $(N+1-m)\leq n\leq N$. Для нахождения неизвестных x_n необходимо провести вычисления при значениях параметра $t=\pm N,\ldots,\pm(N+1-m)$, что дает систему из $2m$ уравнений, аналогичных (8а) и (8в), не содержащих неизвестных x_r $(-(N-m)\leq r\leq(N-m))$. Если искать четные и нечетные составляющие неизвестных x_n, то порядок уравнений снижается в 2 раза.

Для вычисления неизвестной величины x_0 используется уравнение

$$z(0)=\sum_{n=-N}^{-(N+1-m)}x_nC(n,0)+\sum_{n=N-m}^{N}x_nC(n,0)+x_0, \tag{8г}$$

где константа $C(n,0)$ вычисляется аналогично (8б).

Изложенная выше процедура решения системы линейных уравнений с ленточными матрицами размера $(2N+1)\times(2N+1)$ сводится, таким образом, к обращению двух матриц размера $m\times m$. При этом предполагается, что частотная характеристика $\tilde{h}(\omega_{2k})$ отлична от нуля при $k=0,\ldots,N$.

Две системы уравнений для определения величин $x_{N-p}+x_{-N+p}$ и $x_{N-p}-x_{-N+p}$ при $p=\overline{0,m-1}$ имеют вид

$$2\sum_{p=0}^{m-1}(x_{N-p}+x_{-N+p})C(N-p,N-s)=z(N-s)+z(-N+s),\quad s=\overline{0,m-1},\tag{9}$$

$$2\sum_{p=0}^{m-1}(x_{N-p}-x_{-N+p})S(N-p,N-s)=z(N-s)-z(-N+s),\quad s=\overline{0,m-1}.\tag{10}$$

Решения данных систем очевидны (правило Крамера):

$$\begin{aligned} x_{N-p}+x_{-N+p}&=\Delta_C^{p+1}/\Delta_C;\\ x_{N-p}-x_{-N+p}&=\Delta_S^{p+1}/\Delta_S.\end{aligned}\tag{11}$$

Здесь величины Δ_C и Δ_S — определители систем (9) и (10), а Δ_C^{p+1} и Δ_S^{p+1} — определители Δ_C и Δ_S, в которых $(p+1)$-й столбец заменен правой частью соответствующей системы.

Применяя соотношения (11) в выражениях (8а) и (8в), получим следующие уравнения:

$$x_r=z(r)-\sum_{p=0}^{m-1}\frac{\Delta_C^{p+1}}{\Delta_C}C(N-p,r)-\sum_{p=0}^{m-1}\frac{\Delta_S^{p+1}}{\Delta_S}S(N-p,r),\tag{12}$$

$$x_{-r}=z(-r)-\sum_{p=0}^{m-1}\frac{\Delta_C^{p+1}}{\Delta_C}C(N-p,r)+\sum_{p=0}^{m-1}\frac{\Delta_S^{p+1}}{\Delta_S}S(N-p,r),\tag{13}$$

$$x_0=z(0)-\sum_{p=0}^{m-1}\frac{\Delta_C^{p+1}}{\Delta_C}C(N-p,0).\tag{14}$$

Далее в качестве примеров рассматриваются трехдиагональная и пятидиагональная матрицы.

Трехдиагональная матрица. В этом случае $(\alpha_0=1)$ частотная характеристика (2) имеет вид

$$\tilde{h}(\omega_{2k})=1+2\alpha_1\cos\frac{2\pi}{2N+1}k,\tag{15}$$

а система уравнений (1) выглядит как

$$\begin{gathered} y_{-N}=x_{-N}+\alpha_1x_{-N+1},\quad y_n=\sum_{s-1}^{1}\alpha_{|s|}x_{n+s}\\ \text{при }\ -N+1\le n\le N-1,\quad y_N=\alpha_1x_{N-1}+x_N.\end{gathered}\tag{16}$$

В соответствии с (4) сигнал после компенсации линейных искажений представляется в виде

$$z(t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} y_n \sum_{k=-N}^{N} \frac{\cos \frac{2\pi}{2N+1} k(t-n)}{1 + 2\alpha_1 \cos \frac{2\pi}{2N+1} k}. \tag{17}$$

По этой формуле вычисляются величины $z(r)$ и $z(-r)$.

Уравнения (8а) и (8в) принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} z(r) = x_{-N} C(-N, r) + x_{-N} S(-N, r) + \\ + x_r 1[(r + N - 1)(N - 1 - r)] + x_N C(N, r) + x_N S(N, r); \\ z(-r) = x_{-N} C(-N, -r) + x_{-N} S(-N, -r) + \\ + x_{-r} 1[(r + N - 1)(N - 1 - r)] + x_N C(N, -r) + x_N S(N, -r). \end{gathered} \tag{18}$$

Константы C и S определяются соотношениями (7а), (7б) и (8б):

$$\begin{gathered} C(-N, r) = C(-N, -r) = C(N, r) = C(N, -r) = \\ = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \frac{\cos \frac{2\pi}{2N+1} kr \Big(\cos \frac{2\pi}{2N+1} kN + \alpha_1 \cos \frac{2\pi}{2N+1} k(N-1) \Big)}{1 + 2\alpha_1 \cos \frac{2\pi}{2N+1} k}; \\ S(N, r) = S(-N, -r) = -S(-N, r) = -S(N, -r) = \\ = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \frac{\sin \frac{2\pi}{2N+1} kr \Big(\sin \frac{2\pi}{2N+1} kN + \alpha_1 \sin \frac{2\pi}{2N+1} k(N-1) \Big)}{1 + 2\alpha_1 \cos \frac{2\pi}{2N+1} k}. \end{gathered} \tag{19}$$

Для вычисления неизвестных x_{-N} и x_N используются уравнения (18) с учетом соотношений (19) при $r = N$ (члены x_r и x_{-r} в (18) при этом отсутствуют):

$$x_N - x_{-N} = \frac{1}{2S(N, N)} (z(N) - z(-N)); \qquad x_N + x_{-N} = \frac{1}{2C(N, N)} (z(N) + z(-N)). \tag{20}$$

Отсюда легко найти, что

$$x_{-N} = \frac{1}{2} \Big[\frac{1}{2C(N, N)} (z(N) + z(-N)) - \frac{1}{2S(N, N)} (z(N) - z(-N)) \Big],$$

$$x_N = \frac{1}{2} \Big[\frac{1}{2C(N, N)} (z(N) + z(-N)) + \frac{1}{2S(N, N)} (z(N) - z(-N)) \Big].$$

Поступая далее аналогичным образом, приходим к решению поставленной задачи:

$$x_r = z(r) - \frac{C(N, r)}{2C(N, N)} (z(N) + z(-N)) - \frac{S(N, r)}{2S(N, N)} (z(N) - z(-N)), \tag{21}$$

Таблица 1

Трехдиагональная матрица

N	α_1				
	0,99	0,999	0,9999	0,99999	0,999999
15	$8{,}95 \cdot 10^{-24}$	$1{,}89 \cdot 10^{-21}$	$5{,}31 \cdot 10^{-20}$	$1{,}93 \cdot 10^{-17}$	$1{,}27 \cdot 10^{-15}$
33	$2{,}45 \cdot 10^{-23}$	$3{,}04 \cdot 10^{-21}$	$2{,}91 \cdot 10^{-19}$	$2{,}99 \cdot 10^{-17}$	$3{,}03 \cdot 10^{-15}$
63	$1{,}25 \cdot 10^{-22}$	$9{,}31 \cdot 10^{-21}$	$1{,}04 \cdot 10^{-18}$	$1{,}02 \cdot 10^{-16}$	$9{,}54 \cdot 10^{-15}$
129	$3{,}52 \cdot 10^{-21}$	$4{,}83 \cdot 10^{-20}$	$4{,}35 \cdot 10^{-18}$	$4{,}53 \cdot 10^{-16}$	$4{,}52 \cdot 10^{-14}$
255	$5{,}92 \cdot 10^{-22}$	$2{,}11 \cdot 10^{-20}$	$1{,}74 \cdot 10^{-18}$	$1{,}99 \cdot 10^{-16}$	$2{,}19 \cdot 10^{-14}$
513	$6{,}33 \cdot 10^{-22}$	$6{,}24 \cdot 10^{-20}$	$5{,}40 \cdot 10^{-18}$	$4{,}69 \cdot 10^{-16}$	$4{,}80 \cdot 10^{-14}$

$$x_{-r} = z(-r) - \frac{C(N,r)}{2C(N,N)}\,(z(N) + z(-N)) + \frac{S(N,r)}{2S(N,N)}\,(z(N) - z(-N)). \tag{22}$$

Остается в соответствии с уравнением (8г) найти неизвестную величину x_0:

$$x_0 = z(0) - \frac{C(N,0)}{2C(N,N)}\,(z(N) + z(-N)). \tag{23}$$

Если записать равенство (15) при нулевом значении частотной характеристики в виде $\cos\dfrac{2\pi}{2N+1}k = -1/2\alpha_1$, то становится ясно, что для $|\alpha_1| < 0{,}5$ такое равенство не имеет решения при любом k. Соблюдая это соотношение, трехдиагональная матрица обращается в принципе при произвольном числе $2N+1$. Если неравенство $|\alpha_1| < 0{,}5$ не выполняется, то уравнение $\cos\dfrac{2\pi}{2N+1}k = -1/2\alpha_1$ может иметь решение. Поэтому значение α_1 не должно совпадать с корнем этого уравнения.

В табл. 1 содержатся данные о среднем квадрате ошибки определения неизвестных при решении системы с трехдиагональной матрицей*, когда величина α_1 близка к критической точке (единице), а число $2N+1$ кратно трем. Из таблицы следует, что при приближении величины α_1 к единице точность определения неизвестных трехдиагональной матрицы ухудшается, особенно для больших чисел $2N+1$, так как расстояние

$$\delta_k = \frac{\sin\frac{\pi}{2N+1}\cdot\sin\frac{\pi}{2N+1}\,(2k-1)}{\cos\frac{2\pi}{2N+1}\,k\cdot\cos\frac{2\pi}{2N+1}\,(k-1)}$$

между ближайшими критическими точками, являющимися нулями частотной характеристики (15), мало. Наиболее значительно эта величина уменьшается при увеличении k. Она минимальна при $k = N$ и равна

$$\delta_N = \frac{\sin\frac{\pi}{2N+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2N+1}}{\cos\frac{\pi}{2N+1}\cdot\cos\frac{3\pi}{2N+1}}.$$

*$\varepsilon^2 = \dfrac{1}{2N+1}\sum\limits_{k=-N}^{N}(x_k - x_k^*)^2$ — средний квадрат ошибки нахождения компонент неизвестного вектора $\mathbf{X}$, где x_k — точные значения компонент, x_k^* — рассчитанные значения компонент. Компоненты — независимые случайные числа в диапазоне $-\overline{127,\,127}$ с равномерным распределением.

Пятидиагональная матрица. Частотная характеристика (2) этой матрицы

$$\tilde{h}(\omega_{2k}) = 1 + 2\alpha_1 \cos\frac{2\pi}{2N+1}\,k + 2\alpha_2 \cos\frac{2\pi}{2N+1}\,2k. \tag{24}$$

Система уравнений (1) примет следующий вид:

$$\begin{gathered}
y_{-N} = x_{-N} + \alpha_1 x_{-N+1} + \alpha_2 x_{-N+2};\\
y_{-N+1} = \alpha_1 x_{-N} + x_{-N+1} + \alpha_1 x_{-N+2} + \alpha_2 x_{-N+3};\\
y_n = \sum_{s=-2}^{2} \alpha_{|s|} x_{n+s} \quad \text{при} \ -N+2 \le n \le N-2;\\
y_{N-1} = \alpha_1 x_N + x_{N-1} + \alpha_1 x_{N-2} + \alpha_2 x_{N-3}; \qquad y_N = x_N + \alpha_1 x_{N-1} + \alpha_2 x_{N-2}.
\end{gathered} \tag{25}$$

Сигнал $z(t)$ определяется соотношением (4) с учетом (24). Формулы для констант $C(N,r)$, $C(N-1,r)$, $S(N,r)$, $S(N-1,r)$ задаются соотношениями:

$$\begin{gathered}
C(N,r) = \frac{1}{2N+1}\times\\
\times \sum_{k=-N}^{N} \frac{\cos\frac{2\pi}{2N+1}kr\Big(\cos\frac{2\pi}{2N+1}kN + \alpha_1\cos\frac{2\pi}{2N+1}k(N-1) + \alpha_2\cos\frac{2\pi}{2N+1}k(N-2)\Big)}{1 + 2\alpha_1\cos\frac{2\pi}{2N+1}k + 2\alpha_2\cos\frac{2\pi}{2N+1}2k};\\
S(N,r) = \frac{1}{2N+1}\times\\
\times \sum_{k=-N}^{N} \frac{\sin\frac{2\pi}{2N+1}kr\Big(\sin\frac{2\pi}{2N+1}kN + \alpha_1\sin\frac{2\pi}{2N+1}k(N-1) + \alpha_2\sin\frac{2\pi}{2N+1}k(N-2)\Big)}{1 + 2\alpha_1\cos\frac{2\pi}{2N+1}k + 2\alpha_2\cos\frac{2\pi}{2N+1}2k};\\
C(N-1,r) = \frac{1}{2N+1}\times\\
\times \sum_{k=-N}^{N} \frac{\cos\frac{2\pi}{2N+1}kr\Big(\alpha_1\cos\frac{2\pi}{2N+1}kN + \cos\frac{2\pi}{2N+1}k(N-1) +}{1 + 2\alpha_1\cos\frac{2\pi}{2N+1}k + 2\alpha_2\cos\frac{2\pi}{2N+1}2k} \to\\
\to \frac{+\,\alpha_1\cos\frac{2\pi}{2N+1}k(N-2) + \alpha_2\cos\frac{2\pi}{2N+1}k(N-3)\Big)}{1 + 2\alpha_1\cos\frac{2\pi}{2N+1}k + 2\alpha_2\cos\frac{2\pi}{2N+1}2k};\\
S(N-1,r) = \frac{1}{2N+1}\times\\
\times \sum_{k=-N}^{N} \frac{\sin\frac{2\pi}{2N+1}kr\Big(\alpha_1\sin\frac{2\pi}{2N+1}kN + \sin\frac{2\pi}{2N+1}k(N-1) +}{1 + 2\alpha_1\cos\frac{2\pi}{2N+1}k + 2\alpha_2\cos\frac{2\pi}{2N+1}2k} \to\\
\to \frac{\alpha_1\sin\frac{2\pi}{2N+1}k(N-2) + \alpha_2\sin\frac{2\pi}{2N+1}k(N-3)\Big)}{1 + 2\alpha_1\cos\frac{2\pi}{2N+1}k + 2\alpha_2\cos\frac{2\pi}{2N+1}2k}.
\end{gathered} \tag{26}$$

Уравнения для $z(r)$ и $z(-r)$ строятся аналогично (18). В них появляются слагаемые с x_{-N+1} и x_{N-1}.

Система уравнений для четной составляющей имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}(x_N + x_{-N})C(N,N) + (x_{N-1} + x_{-N+1})C(N-1,N) = \frac{1}{2}(z(N) + z(-N));\\ (x_N + x_{-N})C(N,N-1) + (x_{N-1} + x_{-N+1})C(N-1,N-1) = \frac{1}{2}(z(N-1) + z(-N+1)).\end{gathered} \tag{27}$$

Для нечетной составляющей запишем систему уравнений

$$\begin{gathered}(x_N - x_{-N})S(N,N) + (x_{N-1} - x_{-N+1})S(N-1,N) = \frac{1}{2}(z(N) - z(-N));\\ (x_N - x_{-N})S(N,N-1) + (x_{N-1} - x_{-N+1})S(N-1,N-1) = \frac{1}{2}(z(N-1) - z(-N+1)).\end{gathered} \tag{28}$$

Из (27) и (28) вытекают очевидные формулы для определителей:

$$\Delta_C = C(N,N)C(N-1,N-1) - C(N-1,N)C(N,N-1),$$

$$\Delta_S = S(N,N)S(N-1,N-1) - S(N-1,N)S(N,N-1),$$

$$\Delta_C^1 = \frac{1}{2}[(z(N)+z(-N))C(N-1,N-1) - (z(N-1)+z(-N+1))C(N-1,N)],$$

$$\Delta_C^2 = \frac{1}{2}[(z(N-1)+z(-N+1))C(N,N) - (z(N)+z(-N))C(N,N-1)],$$

$$\Delta_S^1 = \frac{1}{2}[(z(N)-z(-N))S(N-1,N-1) - (z(N-1)-z(-N+1))S(N-1,N)],$$

$$\Delta_S^2 = \frac{1}{2}[(z(N-1)-z(-N+1))S(N,N) - (z(N)-z(-N))S(N,N-1)].$$

Четные значения x_N, x_{-N}, x_{N-1} и x_{-N+1} задаются формулами:

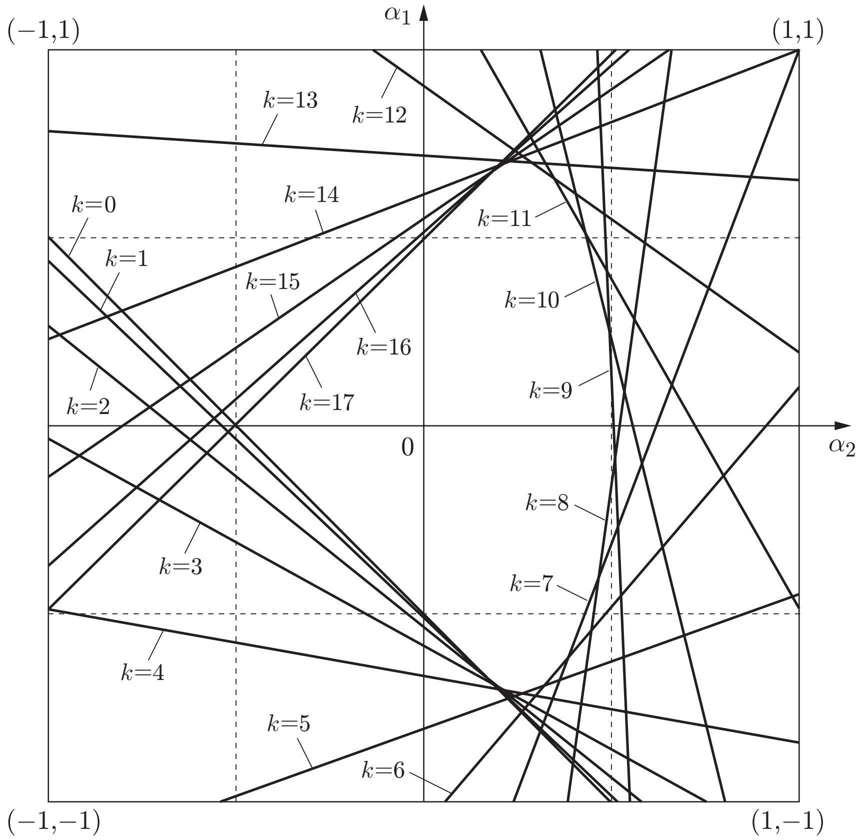
$$x_N = \frac{1}{2}\Big[\frac{\Delta_C^1}{\Delta_C} + \frac{\Delta_S^1}{\Delta_S}\Big], \qquad x_{N-1} = \frac{1}{2}\Big[\frac{\Delta_C^2}{\Delta_C} + \frac{\Delta_S^2}{\Delta_S}\Big],$$

$$x_{-N} = \frac{1}{2}\Big[\frac{\Delta_C^1}{\Delta_C} - \frac{\Delta_S^1}{\Delta_S}\Big], \qquad x_{-N+1} = \frac{1}{2}\Big[\frac{\Delta_C^2}{\Delta_C} - \frac{\Delta_S^2}{\Delta_S}\Big].$$

Соотношения (12) и (13) принимают следующий вид:

$$x_r = z(r) - \frac{\Delta_C^1}{\Delta_C}C(N,r) - \frac{\Delta_C^2}{\Delta_C}C(N-1,r) - \frac{\Delta_S^1}{\Delta_S}S(N,r) - \frac{\Delta_S^2}{\Delta_S}S\,(N-1,r), \tag{29}$$

$$x_{-r} = z(-r) - \frac{\Delta_C^1}{\Delta_C}C(N,r) - \frac{\Delta_C^2}{\Delta_C}C(N-1,r) + \frac{\Delta_S^1}{\Delta_S}S(N,r) + \frac{\Delta_S^2}{\Delta_S}S(N-1,r). \tag{30}$$



Пятидиагональная матрица размера 35×35

Формула для неизвестного значения параметра x_0 находится из соотношения

$$x_0 = z(0) - \frac{\Delta_C^1}{\Delta_C}\, C(N,0) - \frac{\Delta_C^2}{\Delta_C}\, C(N-1,0). \tag{31}$$

Для пятидиагональной матрицы частотная характеристика определяется соотношением (24) и при $\tilde{h}(\omega_{2k}) = 0$ представляет собой для констант α_1 и α_2 уравнение прямой в отрезках

$$-\frac{\alpha_1}{a_k} - \frac{\alpha_2}{b_k} = 1, \tag{32}$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\cos\frac{2\pi}{2N+1}\, k}; \qquad b_k = \frac{1}{2\cos\frac{2\pi}{2N+1}\, 2k}.$$

На рисунке показана совокупность линий, удовлетворяющих (32). В случае пятидиагональной матрицы одновременное попадание точки (α_1, α_2) на линию констант делает вычисления по нахождению неизвестных некорректными.

Табл. 2 содержит данные о среднем квадрате ошибки нахождения неизвестных пятидиагональной матрицы (см. сноску к табл. 1), когда параметры α_1 и α_2 равны между собой и близки к критической точке (единице), а число $2N + 1$ кратно пяти. Точность вычислений уменьшается по мере приближения к критической точке.

Таблица 2

Пятидиагональная матрица

N	$\alpha_1 = \alpha_2$				
	0,99	0,999	0,9999	0,99999	0,999999
15	$5{,}19 \cdot 10^{-24}$	$3{,}01 \cdot 10^{-23}$	$4{,}78 \cdot 10^{-20}$	$3{,}22 \cdot 10^{-18}$	$1{,}39 \cdot 10^{-16}$
35	$1{,}09 \cdot 10^{-24}$	$3{,}23 \cdot 10^{-22}$	$9{,}27 \cdot 10^{-20}$	$7{,}12 \cdot 10^{-19}$	$1{,}29 \cdot 10^{-16}$
65	$8{,}75 \cdot 10^{-22}$	$8{,}06 \cdot 10^{-20}$	$7{,}02 \cdot 10^{-18}$	$8{,}56 \cdot 10^{-16}$	$7{,}85 \cdot 10^{-14}$
125	$6{,}65 \cdot 10^{-22}$	$6{,}36 \cdot 10^{-20}$	$5{,}31 \cdot 10^{-18}$	$5{,}68 \cdot 10^{-16}$	$5{,}14 \cdot 10^{-14}$
255	$3{,}54 \cdot 10^{-20}$	$3{,}39 \cdot 10^{-19}$	$2{,}86 \cdot 10^{-17}$	$3{,}01 \cdot 10^{-15}$	$2{,}81 \cdot 10^{-13}$
515	$4{,}25 \cdot 10^{-21}$	$1{,}73 \cdot 10^{-19}$	$1{,}75 \cdot 10^{-17}$	$1{,}79 \cdot 10^{-15}$	$1{,}78 \cdot 10^{-13}$

Заключение. Использование алгоритма компенсации линейных искажений в качестве дополнительного преобразования при обращении $(2m+1)$-диагональных матриц оказывается несложным в вычислительном отношении. Трудности, связанные с корректностью вычислений, представляются преодолимыми при надлежащем вычислительном инструменте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Levinson N.** The wiener RMS error criterion in filter design and prediction // Journ. Math. Phys. 1947. **25**, N 4. P. 261–278.
2. **Durbin J.** The fitting of time-series models // Rev. Inst. Intern. Stat. 1960. **28**. P. 233–244.
3. **Ефимов В. М., Полосьмак В. Г., Резник А. Л.** Аналитические и компьютерные алгоритмы обращения ленточных матриц // Автометрия. 1985. № 6. С. 103–108.
4. **Ефимов В. М., Резник А. Л., Торгов А. В.** Компенсация линейных искажений сигнала с использованием его гармонического разложения // Автометрия. 2008. **44**, № 4. С. 3–12.

Поступила в редакцию 30 июля 2009 г.