УДК 62-50

ТЕХНОЛОГИЯ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ СКЛОННОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ МНОГОМЕРНОГО УПРАВЛЕНИЯ К ВЫРОЖДЕНИЮ

Н. А. Дударенко, А. В. Ушаков

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики»,
197101, г. Санкт-Петербург, Кронверкский просп., 49
E-mail: dudarenko@yandex.ru

Рассматривается одно из свойств динамических систем многомерного управления — вырождение. Основной смысл понятия «вырождение» применительно к многомерной системе в данной работе заключается в снижении или даже потере ею работоспособности. Технология количественной оценки склонности системы многомерного управления к вырождению разработана на базе сингулярного разложения критериальных матриц, формируемых на основе матричного формализма алгоритма Фаддеева — Леверье, аппарата грамианных представлений, матричных коэффициентов разложения вектора выхода системы по производным вектора задающего воздействия, а также с использованием возможностей матричного формализма уравнений Сильвестра и Ляпунова.

Ключевые слова: многомерное управление, многомерная система, количественная оценка вырождения, сингулярные числа, функционал вырождения, критериальная матрица.

Введение и постановка задачи. При рассмотрении динамических систем многомерного управления (СМУ) типа «многомерный вход — многомерный выход» (МВМВ) вырождение следует понимать как сужение функциональных возможностей, снижение и даже потерю работоспособности системы, а в более тяжёлых формах — катастрофу [1–5].

Вырождение как системная парадигма современных теории и практики многомерного управления стало формироваться в связи с тенденциями усложнения СМУ в составе обслуживаемых технологических процессов. Многокомпонентность функционального состава сложных систем многомерного управления обнаружила такое системное свойство, как склонность к вырождению, которое удалось оценить [4–9].

Исследование задачи вырождения позволяет выделить три версии её постановки: функциональную, системную и физическую (материальную).

Первая версия: система многомерного управления типа «многомерный вход — многомерный выход» оказывается вырожденной в силу функциональной необходимости действия её агрегатных компонентов как единого целого. Наиболее наглядными примерами являются технологические процессы по обработке материальных потоков, состоящие в формировании и подаче ленточного материала в листопрокатном производстве, производстве бумаги и тканей; процессы динамической юстировки многокомпонентных оптических и радиооптических систем, организации заготовительных процессов в составе «бесскладовых» технологических производств и т. д. Примерами технологических процессов по обслуживанию гуманитарных потоков являются процессы движения строем подвижных технических средств, управляемых антропокомпонентами-операторами (строй самолётов, вертолётов, автомобилей и т. п.), и автономных антропокомпонентов (строй военнослужащих, спортсменов и т. п.).

Вторая версия, названная системной, решает задачу вырождения систем МВМВ-типа, вызванную организационными причинами, приводящими к неправильному распределению заявок по входам, неверным согласованием их динамики с динамикой сепаратных каналов и неудачно назначенными связями между сепаратными каналами. При этом система может вырождаться структурно, когда из её состава выпадает некоторый функциональный элемент. Вырождение системы может происходить и вследствие неудачно заданных параметров: организации связи между каналами системы, назначения показателей характеристик этих связей, формирования полос пропускания каналов, а в случае дискретной природы системы — при неудачных назначении и распределении по каналам интервалов дискретности и т. д.

Третья версия предполагает сохранение способности нормального функционирования технологического оборудования системы МВМВ-типа в условиях, когда по причинам смены поколения технологии и экономических факторов экзогенный поток заявок иссякает и даже исчезает полностью.

В данной работе рассматривается вторая версия постановки задачи вырождения.

Заметим, что любая техническая система МВМВ-типа имеет три фазы существования. Первой является фаза разработки, включающая в себя:

— построение математической модели объекта управления и среды его функционирования;

— аналитический синтез закона управления;

— построение алгоритмического обеспечения процедур оценки параметров модели объекта и его состояния;

— моделирование системы с использованием возможностей современных программных оболочек;

— разработку технической реализации (программной и схемотехнической) всех компонентов процесса управления;

— разработку конструкции устройства управления и технологического сопровождения его изготовления и испытания макетного образца устройства управления с использованием стендовых испытательных средств.

Второй фазой существования технической системы является изготовление (производство), третьей — эксплуатация. Контроль вырождения как показателя свойств системы МВМВ-типа осуществляется в фазе эксплуатации и главным образом в установившемся режиме функционирования системы. Однако при аналитической постановке эта задача должна решаться в фазе разработки на основе априорных оценок склонности проектируемой системы МВМВ-типа к вырождению.

Математически вырождение означает сокращение размерности образа линейного оператора, реализуемого СМУ, который отображает «пространство намерений» в «пространство осуществляемых реализаций», т. е. изменение ранга этого оператора. Ранг оператора является целочисленной характеристикой. В этой связи нужен такой инструментарий, с помощью которого можно непрерывно оценивать появляющуюся в системе тенденцию к возможному её вырождению, для чего используется сингулярное разложение [10, 11] критериальных матриц, позволяющее конструировать функционалы вырождения.

Технология контроля вырождения сложных непрерывных и дискретных динамических СМУ МВМВ-типа основывается на применении сепаратных и глобальных функционалов вырождения, конструируемых на спектре сингулярных чисел матрицы линейного (локально-линейного) оператора сложной системы, отображающего входное пространство целевых намерений в выходное пространство их реализаций.

Формирование матриц линейных операторов в зависимости от постановки задачи контроля вырождения в форме его экспресс-оценки или в более детализированной форме с учётом вида потока входных заявок детерминированного или стохастического характера опирается на матричный формализм алгоритма Фаддеева — Леверье, аппарата грамианных представлений, матричных коэффициентов разложения вектора выхода системы по производным вектора задающего воздействия, а также на возможности матричного формализма уравнений Сильвестра и Ляпунова.

Рассматриваемый в данной работе инструментарий аппарата функционалов вырождения позволяет дать численную оценку близости сложной динамической технической системы МВМВ-типа к частичной или полной потере работоспособности.

Погружение в проблематику технологии контроля вырождения сложных динамических систем заняло практически двадцать лет научной деятельности авторов [6, 7, 9, 12–14]. В этих работах создана конструктивная технология количественной оценки вырождения сложных систем многомерного управления МВМВ-типа, базовые концепции которой составляют предмет представленной работы.

Технология контроля системного вырождения СМУ сформировалась как двухфазный процесс. В первой фазе конструируются функционалы вырождения критериальных матриц, во второй — критериальные матрицы.

Завершая постановку задачи формирования инструментария оценки склонности сложной системы многомерного управления МВМВ-типа к вырождению, необходимо констатировать, что настоящее состояние библиографического отражения современных проблем управления не обнаруживает заметных тенденций в деле интенсификации исследований такой системной парадигмы современной теории и практики многомерного управления, как вырождение.

Базовые концепции контроля вырождения сложных динамических систем. Функционалы вырождения критериальных матриц. Рассмотрим сложную динамическую систему МВМВ-типа, которая путём векторно-матричных преобразований может быть сведена к линейной алгебраической задаче (ЛАЗ) вида

$$\eta(w) = N(w, \theta)\chi(w), \tag{1}$$

где $N(w, \theta)$ — $m \times m$-матрица для любых w, θ; $\eta(w)$, $\chi(w)$ — m-мерные векторы; θ — p-мерный параметр, изменяющий алгебраические свойства матрицы N, причём $\chi(w)$ может принимать смысл $\chi(0)$. Для контроля вырождения воспользуемся аппаратом функционалов вырождения $J_{D\nu}$ [9], которые строятся на спектре сингулярных чисел α_j $(j = \overline{1, m})$ матрицы N таких, что

$$\sigma_\alpha\{N\} = \{\alpha_j = |\mu_j^{1/2}| : \mu_j : \det(\mu I - N^T N) = 0, \quad j = \overline{1, m}\,\}, \tag{2}$$

и удовлетворяют соотношению

$$J_{D\nu} = \alpha_\nu / \alpha_1, \quad \nu = \overline{m, 1}. \tag{3}$$

Функционалы вырождения обладают следующими свойствами.

Свойство 1. $J_{D\nu}$ для всех ν в силу (3) удовлетворяют неравенствам

$$0 \le J_{D\nu} \le 1. \tag{4}$$

Свойство 2. Умножение критериальной матрицы N на скаляр в непараметризованной или параметризованной форме (γ или $\gamma(\rho)$) не меняет спектра её функционалов вырождения.

Свойство 3. Умножение критериальной матрицы N на ортогональную матрицу слева или справа не меняет её функционалов вырождения.

Свойство 4. Глобальный функционал вырождения $J_G\{N\}$ является обратным числу обусловленности $C\{N\}$ критериальной матрицы N, что можно записать в форме

$$J_G\{N\} = (C(N))^{-1}.$$

Свойство 5. Глобальные функционалы вырождения J_G прямой матрицы N и обратной ей N^{-1} совпадают, т. е. выполняется соотношение

$$J_G(N) = J_G(N^{-1}). \tag{5}$$

Для демонстрации наглядной геометрической интерпретации функционалов вырождения воспользуемся сингулярным разложением матрицы (SVD-процедурой) [10, 11], тогда матрица N запишется как

$$N = U_N \Sigma_N V_N^T, \tag{6}$$

где $\Sigma_N = \mathrm{diag}\{\alpha_j,\, j = \overline{1, m}\}$ — матрица с сингулярными числами на главной диагонали, построенная по правилу убывания их значений с ростом индекса j; U_N и V_N — матрицы левого и правого сингулярных базисов $U_N U_N^T = U_N^T U_N = I$ и $V_N V_N^T = V_N^T V_N = I$ соответственно [10, 11], для которых выполняется соотношение

$$N V_{Nj} = \alpha_j U_{Nj}, \quad j = \overline{1, p}. \tag{7}$$

Векторно-матричное соотношение (7) придаёт исходной ЛАЗ (1) геометрическую наглядность, которая состоит в том, что вектор $\chi = V_{Nj}$ $(j = \overline{1, p})$ единичной нормы отражается в подпространство, натянутое на j-й элемент U_{Nj} левого сингулярного базиса U_N так, что соответствующий ему вектор имеет норму, равную α_j. Таким образом, единичная сфера в пространстве, натянутом на векторы V_{Nj}, отображается в эллипсоид, натянутый на левый сингулярный базис с длиной полуосей, определяемых сингулярными числами матрицы N.

Спектр функционалов вырождения $J_{D\nu}$ в отличие от числа $C\{N\}$ обусловленности матрицы N (используется в вычислительных процедурах для оценки близости матрицы к её вырождению) позволяет тонко зафиксировать всю картину вырождения ЛАЗ (1). Так, по мере обнуления сингулярных чисел α_ν происходит сплющивание эллипсоида, который строится с помощью ЛАЗ (1) при отображении сферы $\|\chi(w)\| = 1$, последовательно вдоль каждой из осей этого эллипсоида. При $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_\nu = 0$ $(\nu = \overline{m, 2})$ эллипсоид вырождается в отрезок прямой, соответственно ЛАЗ (1) оказывается на границе глобального вырождения и наконец при $\alpha_\nu = 0$ $(\nu = \overline{m, 1})$ эллипсоид вырождается в точку и фиксируется глобальное вырождение ЛАЗ (1).

Спектр сингулярных чисел и сконструированный на нём спектр функционалов вырождения матрицы N указывают механизм численного контроля процесса вырождения [10] при вариации параметра θ с помощью контроля $J_{D\nu}$.

Таким образом, процесс вырождения алгебраической задачи можно отслеживать по последовательному обнулению функционалов вырождения $J_{D\nu}$ матрицы $N(w, \theta)$.

Конструирование критериальных матриц. В качестве иллюстрации рассмотрим процедуру конструирования критериальных матриц для экспресс-оценки склонности исследуемой системы к вырождению:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), x(0); \quad y(t) = Cx(t), \tag{8}$$

где x, g, y — векторы состояния, задающего воздействия и выхода соответственно, $x \in R^n$, $g, y \in R^m$; F, G, C — матрицы состояния системы, входа и выхода непрерывного объекта управления соответственно, согласованные по размерности с векторами x, g и y так, что $F \in R^{n\times n}$, $G, C^T \in R^{n\times m}$.

Будем рассматривать непрерывную динамическую систему в установившемся режиме, заданную передаточной функцией $\Phi(s)$ в форме модели «вход—выход» вида

$$\Phi(s) = \arg\{y(s) = \Phi(s)g(s) = C(sI - F)^{-1}Gg(s)\} \tag{9}$$

при полиномиальном входном воздействии $g(t)$. Полиномиальная форма экзогенного воздействия в установившемся режиме для выхода системы $y(t)$ позволяет записать представление

$$y_{\text{уст}}(t) = D_0 g(t) + D_1 \dot{g}(t) + D_2 \ddot{g}(t) + \ldots = \sum_{l=0}^{\infty} D_l g^{(l)}(t). \tag{10}$$

В практических случаях полиномиальное воздействие $g(t)$ содержит три ненулевых компонента $g^{(l)}(t)$ $(l = 0, 1, 2)$, что позволяет записать (10) в форме

$$y_{\text{уст}}(t) = y_g(t) + y_{\dot{g}}(t) + y_{\ddot{g}}(t), \tag{11}$$

которая определяет три линейные алгебраические задачи:

$$y_g(t) = D_0 g(t); \quad y_{\dot{g}}(t) = D_1 \dot{g}(t); \quad y_{\ddot{g}}(t) = D_2 \ddot{g}(t). \tag{12}$$

Задача получит полное решение, если критериальные матрицы D_0, D_1, D_2 будут выражены через матричные компоненты исследуемой СМУ МВМВ-типа (8). Для установления этой связи применим к выражению (10) преобразование Лапласа, в результате чего получим

$$y_{\text{уст}}(s) = (D_0 + sD_1 + s^2 D_2 + \ldots)g(s) = \Big(\sum_{l=0}^{\infty} D_l s^l\Big)g(s). \tag{13}$$

Если в выражении (9) вычленить фрагмент

$$y(s) = C(sI - F)^{-1}Gg(s), \tag{14}$$

то сравнение соотношений (13) и (14) даст решение задачи конструирования D_0, D_1, D_2 при разложении резолвенты $(sI - F)^{-1}$ в выражении (14) по положительным степеням s. Для этих целей воспользуемся представлением суммы членов геометрической прогрессии, построенных на матричных компонентах, тогда для резолвенты получим цепочку равенств

$$\begin{aligned}(sI - F)^{-1} &= [(sI - F)]^{-1} = [-(F - sI)]^{-1} = [-F(I - sF^{-1})]^{-1} = \\ &= -\{I + sF^{-1} + s^2F^{-2} + s^3F^{-3} + \ldots\}F^{-1}.\end{aligned} \tag{15}$$

Подстановка (15) в (14) позволяет записать

$$y(s) = -C\{I + sF^{-1} + s^2F^{-2} + s^3F^{-3} + \ldots\}F^{-1}Gg(s). \tag{16}$$

Если сравнить (16) с выражением (13), то для матричных коэффициентов D_0, D_1, D_2 будем иметь

$$D_0 = CF^{-1}G; \quad D_1 = CF^{-2}G; \quad D_0 = CF^{-3}G. \tag{17}$$

Критериальные матрицы (17) позволяют контролировать вырождение в форме экспресс-оценки СМУ МВМВ-типа (8), порождаемое значением входного воздействия, векторами скорости и ускорения его изменения. В этом случае при формировании матриц тонкая природа источника экзогенного воздействия проигнорирована, достаточно было оценки значений самого воздействия и векторов его первых двух производных. Последнее обстоятельство в прикладных задачах содержит требования к порядку астатизма системы. Действительно, в силу соотношения (10) для выполнения равенства $y_{\text{уст}}(t) = g(t)$ в установившемся режиме необходимо, чтобы имела место система матричных соотношений: $D_0 = I$, $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, что возможно только при астатизме системы МВМВ-типа не менее второго порядка.

Основная нагрузка при оценке вырождения системы МВМВ-типа ложится на матрицу D_0, особенно если она оказывается недиагональной. Также существенное значение в решаемой задаче имеет тот факт, что матрицы D_1 и D_2 являются недиагональными.

Заключение. Вырождение как системная парадигма современных теории и практики многомерного управления сложными системами объективно существует. Уже получены результаты в области технологии количественной оценки склонности сложных систем к вырождению, есть алгоритмы формирования критериальных матриц. Однако сохраняется актуальность проблем выделения факторов, вырождающих систему, и формирования методов синтеза систем, гарантирующих требуемые значения функционалов вырождения. По существу, обнаруживается возможность количественной оценки такого качественного показателя сложных систем, как робастность в смысле показателя J_{D_ν} относительно системных параметров.

Следует заметить, что технология оценки системного вырождения первой и второй версий может быть организована с помощью одного и того же инструментария контроля вырождения в инверсной постановке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Трапезников В. А.** Человек в системе управления // АиТ. 1972. № 2. С. 4–18.
2. **Трапезников В. А.** Научно-технический прогресс и эффективность науки // Вопросы экономики. 1973. № 2. С. 87–95.
3. **Трапезников В. А.** Управление и научно-технический прогресс. М.: Наука, 1983. 223 с.
4. **Петров Ю. П., Петров Л. Ю.** Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. С.-Пб.: БХВ-Петербург, 2005. 224 с.
5. **Петров Ю. П.** Расследование и предупреждение техногенных катастроф. С.-Пб.: БХВ-Петербург, 2007. 104 с.
6. **Бочков А. Л., Дударенко Н. А., Ушаков А. В.** Синтез многомерных функционально вырожденных динамических систем // Изв. вузов. Сер. Приборостроение. 2008. **51**, № 1. С. 25–29.
7. **Дударенко Н. А., Ушаков А. В.** Анализ чувствительности функционала вырождения к параметрической неопределенности функциональных компонентов сложных систем при моделировании входных заявок гармоническим многочастотным экзогенным воздействием // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 3. С. 2–10.
8. **Математический** энциклопедический словарь. М.: Большая Российская энциклопедия, 1995. 848 с.
9. **Дударенко Н. А., Слита О. В., Ушаков А. В.** Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: Учеб. пособие /Под ред. А. В. Ушакова. С.-Пб.: СПбГУ ИТМО, 2008. 324 с.

10. **Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.** Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 318 с.
11. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления: Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 548 с.
12. **Ушаков А. В.** Модальные оценки качества процессов управления многомерными системами при гармоническом внешнем воздействии // АиТ. 1989. № 11. С. 76–85.
13. **Ушаков А. В.** Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах при внешних конечномерных воздействиях // АиТ. 1992. № 10. С. 72–82.
14. **Алишеров С., Ушаков А. В.** Алгебраическое обоснование выбора газовых лазеров для локационных измерительных систем // Автометрия. 1990. № 5. С. 57–63.

Поступила в редакцию 11 ноября 2009 г.