

## АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 621.391

### ОЦЕНКА ПЛОЩАДИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ ПРИ НАЛИЧИИ ФОНА\*

А. П. Трифонов, Ю. Н. Прибытков

*Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Воронежский государственный университет»,  
394006, г. Воронеж, Университетская площадь, 1  
E-mail: trifonov@phys.vsu.ru*

Синтезированы алгоритмы максимального правдоподобия оценки площади стохастического изображения, наблюдаемого на стохастическом фоне при наличии пространственного шума. Проведено сравнение алгоритмов оценки площади, основанных на аддитивной и аппликативной моделях взаимодействия изображения и фона. Получены асимптотические выражения для характеристик оценки площади. Исследовано влияние различия статистических характеристик фона и изображения на точность оценки его площади.

*Ключевые слова:* гауссовское изображение, фон, пространственный шум, неизвестная площадь, аппликативная модель, эффективность оценки площади.

**Введение.** В настоящее время активно развиваются системы дистанционного наблюдения. В связи с этим возникает ряд, несомненно, актуальных задач обнаружения и различения объектов, а также оценки параметров объектов по их изображениям. В частности, для практических приложений представляет интерес задача автоматической оценки площади изображения. В качестве примера можно привести оценки размеров неоднородностей в дефектоскопии и медицине, оценки площадей лесных массивов по данным аэро- и фото-съемки.

Во многих случаях изображения реальных объектов зашумлены и могут иметь случайную структуру. Таковы, например, изображения участков земной поверхности, полученные оптическими локаторами или спутниковыми радиолокаторами с синтезированной апертурой, а также при подповерхностном зондировании. В этом случае для повышения точности оценки параметров объектов с помощью методов теории статистических решений необходимо использовать адекватные модели изображений.

Известно [1, 2], что изображения реальных объектов, полученные в результате дистанционного наблюдения, удовлетворительно описываются гауссовскими полями, что позволяет проводить синтез и анализ алгоритмов оценки параметров изображения, основанные на гауссовской модели наблюдаемых данных.

Необходимо отметить, что задачи оценки параметров сигналов для гауссовской модели аддитивных помех достаточно хорошо изучены в задаче обработки одномерных сигналов. Тем не менее обобщение этих результатов на случай гауссовских полей может оказаться некорректным, поскольку для систем дистанционного наблюдения кроме флуктуационной аддитивной помехи характерен ещё один вид мешающего сигнала. В этих системах объект наблюдается на некоторой подстилающей поверхности. Сигнал, рассеянный такой поверхностью, представляет собой мешающий фон [1], который может оказывать существенное

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00042).

влияние на точность оценки площади изображения. В отличие от одномерного случая при решении задач оценки параметров изображения в общем случае необходимо учитывать эффект затенения фона полезным изображением. Далее будет рассмотрена задача оценки площади гауссовского стохастического изображения, наблюдаемого на гауссовском фоне в непрерывном пространстве с учётом эффекта затенения фона. Выполнен синтез алгоритмов оценки площади, в том числе нового алгоритма, учитывающего эффект затенения фона. Найдены новые асимптотические выражения для характеристик оценки площади.

**Постановка задачи.** Пусть в результате дистанционного зондирования в двумерной области  $G$  доступна наблюдению реализация случайного поля  $x(\mathbf{r})$ . Здесь  $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$  — радиус-вектор точки на плоскости, принадлежащей  $G$ . Поле  $x(\mathbf{r})$  включает в себя полезное изображение объекта  $s(\mathbf{r})$ , пространственный шум  $n(\mathbf{r})$  и фоновое излучение  $\nu(\mathbf{r})$ . Это излучение обусловлено рассеянием зондирующего сигнала подстилающей поверхностью, на которой находится объект [1]. Будем полагать, что изображение занимает область  $\Omega_S$ , площадь которой обозначим  $\chi_0$  и считаем неизвестной, т. е.  $\Omega_S \equiv \Omega(\chi_0)$ , где функция  $\Omega(\chi)$  описывает форму изображения площадью  $\chi$  и может быть представлена с помощью индикатора

$$I(\mathbf{r}, \chi) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \Omega_S, \\ 0, & \mathbf{r} \notin \Omega_S. \end{cases}$$

Обычно [3–5] при решении задач связи, навигации, радиолокации используют математическую модель аддитивного взаимодействия полезного  $s(\mathbf{r})$  и мешающего  $\nu(\mathbf{r})$  сигналов:

$$x(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}, \chi_0)s(\mathbf{r}) + \nu(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in G. \quad (1)$$

Такая модель не учитывает эффекта затенения фона  $\nu(\mathbf{r})$ . Модель (1) при решении задачи оценки площади пространственно протяжённого объекта может приводить к недостаточно эффективным решениям. Это особенно заметно в коротковолновом диапазоне, где пространственная протяжённость объектов имеет существенное значение. Поэтому для учёта проявляющихся на практике эффектов затенения фона воспользуемся аппликативной моделью взаимодействия [1], согласно которой наблюдаемая реализация может быть представлена в виде

$$x(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}, \chi_0)s(\mathbf{r}) + [1 - I(\mathbf{r}, \chi_0)]\nu(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где  $\chi_0$  принимает значение из интервала  $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$ .

Далее будем предполагать, что изображение  $s(\mathbf{r})$ , фон  $\nu(\mathbf{r})$  и пространственный шум  $n(\mathbf{r})$  представляют собой однородные статистически взаимно независимые гауссовские поля. Тогда для математических ожиданий  $a_s(\mathbf{r})$ ,  $a_\nu(\mathbf{r})$  и корреляционных функций  $B_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ ,  $B_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  изображения и фона соответственно справедливы следующие соотношения:

$$a_s(\mathbf{r}) = a_s; \quad a_\nu(\mathbf{r}) = a_\nu; \quad B_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_s(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2); \quad B_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_\nu(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (3)$$

Пространственный шум  $n(\mathbf{r})$  будем считать белым с нулевым математическим ожиданием и односторонней спектральной плотностью  $N_0$ . Аппликативное взаимодействие (2) сигнала и фона не является ни линейным, ни аддитивным, однако оно не нарушает гауссовского характера распределения наблюдаемого поля  $x(\mathbf{r})$ .

**Алгоритм оценки площади.** Рассмотрим алгоритм оценки неизвестной площади, основанный на методе максимального правдоподобия. В работе [6] получен функционал отношения правдоподобия (ФОП) и его статистические характеристики для задачи обнаружения изображения с неизвестной площадью, что можно использовать для синтеза и анализа алгоритма оценки площади. В частности, если площади  $\chi_0$  и  $\chi_G$  областей  $\Omega_S$  и  $G$  соответственно много больше областей пространственной корреляции сигнала  $s(\mathbf{r})$  и фона  $\nu(\mathbf{r})$ , то логарифм ФОП при проверке гипотезы (2) против альтернативы

$$x(\mathbf{r}) = \nu(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}) \quad (4)$$

имеет вид [6]

$$\begin{aligned} L_{\text{app}}(\chi) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega(\chi)} y_1^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \frac{1}{2} \int_{\Omega(\chi)} y_0^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \frac{2}{N_0} \left[ \frac{a_s}{1+q_s} - \frac{a_\nu}{1+q_\nu} \right] \times \\ & \times \int_{\Omega(\chi)} x(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \frac{1}{N_0} \chi \left[ \frac{a_s^2}{1+q_s} - \frac{a_\nu^2}{1+q_\nu} \right] - \frac{1}{2} \chi \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ \frac{1+q_s \rho_s(\boldsymbol{\omega})}{1+q_\nu \rho_\nu(\boldsymbol{\omega})} \right] d\boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $a_s, a_\nu$  — математические ожидания изображения и фона соответственно;  $y_i(\mathbf{r})$  — сигналы на выходах пространственных фильтров с импульсными характеристиками  $H_i(\mathbf{r})$ ,  $i = 0, 1$ . На вход этих фильтров подаётся реализация случайного поля  $x(\mathbf{r})$ . Передаточные функции таких фильтров должны удовлетворять условиям

$$|H_1(\boldsymbol{\omega})|^2 = 2q_s \rho_s(\boldsymbol{\omega}) / [N_0(1+q_s \rho_s(\boldsymbol{\omega}))], \quad |H_0(\boldsymbol{\omega})|^2 = 2q_\nu \rho_\nu(\boldsymbol{\omega}) / [N_0(1+q_\nu \rho_\nu(\boldsymbol{\omega}))],$$

где  $q_s = 2G_s(0)/N_0$ ;  $q_\nu = 2G_\nu(0)/N_0$ ;  $\rho_s(\boldsymbol{\omega}) = G_s(\boldsymbol{\omega})/G_s(0)$ ;  $\rho_\nu(\boldsymbol{\omega}) = G_\nu(\boldsymbol{\omega})/G_\nu(0)$ ;  $G_s(\boldsymbol{\omega})$  и  $G_\nu(\boldsymbol{\omega})$  — спектральные плотности флуктуаций изображения и фона соответственно:

$$G_s(\boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\mathbf{r}) \exp(-j\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad G_\nu(\boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} B_\nu(\mathbf{r}) \exp(-j\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Согласно методу максимального правдоподобия оценка площади  $\hat{\chi}_{\text{app}}$  определяется как положение абсолютного максимума логарифма ФОП (5)  $\hat{\chi}_{\text{app}} = \arg \sup_{\chi_{\min} \leq \chi \leq \chi_{\max}} L_{\text{app}}(\chi)$ .

Из выражения (5) видно, что в формировании достаточной статистики для аппликативной модели принимают участие только значения интенсивности наблюдаемого поля  $x(\mathbf{r})$ , находящиеся в пределах области  $\Omega(\chi)$ , предположительно занимаемой изображением. Причём одной из важных операций, которую необходимо осуществить при формировании этой статистики, является вычисление разности энергий профильтрованных полей  $y_1(\mathbf{r})$  и  $y_0(\mathbf{r})$  в пределах области  $\Omega(\chi)$ . Таким образом, для реализации алгоритма максимального правдоподобия оценки площади на основе аппликативной модели требуется два пространственных фильтра. При этом импульсная характеристика одного из них определяется спектральной плотностью полезного изображения и интенсивностью пространственного шума, а второго — спектральной плотностью фона и интенсивностью пространственного шума.

Рассмотрим логарифм ФОП для аддитивной модели взаимодействия изображения и фона (1). В работе [7] получен ФОП для задачи обнаружения изображения с использованием аддитивной модели взаимодействия (1) и его статистические характеристики для случая однородных флуктуаций изображения и фона. Обобщая эти результаты для неизвестной площади и полагая, что не только флуктуации, но и сами изображения и фон

однородны (3), получим логарифм ФОП при проверке гипотезы (1) против альтернативы (4):

$$L_{\text{add}}(\chi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega(\chi)} y^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \frac{2}{N_0} \left[ \frac{a_s + a_\nu}{1 + q_\nu + q_s} - \frac{a_\nu}{1 + q_\nu} \right] \times \\ \times \int_{\Omega(\chi)} x(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \frac{1}{2} \chi \frac{2}{N_0} \left[ \frac{(a_s + a_\nu)^2}{1 + q_\nu + q_s} - \frac{a_\nu^2}{1 + q_\nu} \right] - \frac{1}{2} \chi \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ 1 + \frac{q_s \rho_s(\boldsymbol{\omega})}{1 + q_\nu \rho_s(\boldsymbol{\omega})} \right] d\boldsymbol{\omega}. \quad (6)$$

Здесь  $y(\mathbf{r})$  — сигнал на выходе пространственного фильтра с импульсной характеристикой  $H(\mathbf{r})$ , на вход которого поступает значение реализации случайного поля  $x(\mathbf{r})$ . Передаточная функция этого фильтра должна удовлетворять условию

$$|H(\boldsymbol{\omega})|^2 = 2q_s \rho_s(\boldsymbol{\omega}) / [N_0(1 + q_s \rho_s(\boldsymbol{\omega}) + q_\nu \rho_\nu(\boldsymbol{\omega}))(1 + q_\nu \rho_\nu(\boldsymbol{\omega}))].$$

Из выражения (6) следует, что в формировании достаточной статистики для аддитивной модели взаимодействия также принимают участие значения реализации случайного поля  $x(\mathbf{r})$  в пределах области  $\Omega(\chi)$ , предположительно занимаемой изображением. При этом для получения оценки максимального правдоподобия (ОМП) площади изображения  $\hat{\chi}_{\text{add}} = \arg \sup_{\chi_{\min} \leq \chi \leq \chi_{\max}} L_{\text{add}}(\chi)$  с помощью аддитивной модели (1) требуется лишь один пространственный фильтр, передаточная функция которого зависит от спектральных плотностей изображения и фона.

Сравнивая выражения для логарифмов ФОП, синтезированных в предположении аппликативной (5) и аддитивной (6) моделей, можно утверждать, что реализация аддитивного измерителя площади существенно проще. Это следует из того, что для вычисления (6) требуется реализация только одного фильтра и необходимо осуществить меньшее число умножений за счёт возведения в квадрат лишь одного профильтрованного сигнала.

**Характеристики оценки площади.** Введём обозначения  $\mu_s = \chi_{\min} S_{\omega_s} / 4\pi^2$  и  $\mu_\nu = \chi_{\min} S_{\omega_\nu} / 4\pi^2$ , где  $S_{\omega_s}$  и  $S_{\omega_\nu}$  — площади областей  $\omega_s$  и  $\omega_\nu$  на плоскости частот, занимаемые соответственно спектральными плотностями полезного изображения  $G_s(\boldsymbol{\omega})$  и фона  $G_\nu(\boldsymbol{\omega})$ .

Согласно [8, 9] при  $\mu_s \rightarrow \infty$ ,  $\mu_\nu \rightarrow \infty$  распределение логарифмов ФОП (5) и (6) при фиксированном неизвестном параметре  $\chi$  сходится к гауссовскому. Далее будем полагать, что площадь  $\chi_{\min}$  велика настолько, что  $\mu_s \gg 1$ ,  $\mu_\nu \gg 1$ . В таком случае в окрестности истинного значения параметра  $\chi_0$  логарифм ФОП  $L_{\text{app}}(\chi)$  (5) можно приближённо считать гауссовским марковским процессом с коэффициентами сноса [6]

$$M_1(L_{\text{app}}, \chi) = \lim_{\Delta\chi \rightarrow 0+} \frac{\langle [L_{\text{app}}(\chi + \Delta\chi) - L_{\text{app}}(\chi)] | L_{\text{app}}(\chi) \rangle}{\Delta\chi} = \\ = \frac{1}{\chi_{\min}} \begin{cases} k_{1\text{app}}, & \chi_{\min} \leq \chi \leq \chi_0, \\ -k_{2\text{app}}, & \chi_0 < \chi \leq \chi_{\max}, \end{cases}$$

и диффузии

$$M_2(L_{\text{app}}, \chi) = \lim_{\Delta\chi \rightarrow 0+} \frac{\langle [L_{\text{app}}(\chi + \Delta\chi) - L_{\text{app}}(\chi)]^2 | L_{\text{app}}(\chi) \rangle}{\Delta\chi} = \\ = \frac{1}{\chi_{\min}} \begin{cases} d_{1\text{app}}, & \chi_{\min} \leq \chi \leq \chi_0, \\ d_{2\text{app}}, & \chi_0 < \chi \leq \chi_{\max}, \end{cases}$$

где

$$k_{1\text{app}} = \frac{1}{2} \chi_{\min} \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s \rho_s(\omega) - q_\nu \rho_\nu(\omega)}{1 + q_\nu \rho_\nu(\omega)} d\omega - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ \frac{1 + q_s \rho_s(\omega)}{1 + q_\nu \rho_\nu(\omega)} \right] d\omega + \frac{2}{N_0} (a_s - a_\nu)^2 \frac{1}{1 + q_\nu} \right], \quad (7)$$

$$k_{2\text{app}} = \frac{1}{2} \chi_{\min} \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ \frac{1 + q_s \rho_s(\omega)}{1 + q_\nu \rho_\nu(\omega)} \right] d\omega - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s \rho_s(\omega) - q_\nu \rho_\nu(\omega)}{1 + q_s \rho_s(\omega)} d\omega + \frac{2}{N_0} (a_s - a_\nu)^2 \frac{1}{1 + q_s} \right], \quad (8)$$

$$d_{1\text{app}} = \frac{1}{2} \chi_{\min} \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{q_s \rho_s(\omega) - q_\nu \rho_\nu(\omega)}{1 + q_\nu \rho_\nu(\omega)} \right]^2 d\omega + \frac{4}{N_0} (a_s - a_\nu)^2 \frac{1 + q_s}{(1 + q_\nu)^2} \right], \quad (9)$$

$$d_{2\text{app}} = \frac{1}{2} \chi_{\min} \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{q_s \rho_s(\omega) - q_\nu \rho_\nu(\omega)}{1 + q_s \rho_s(\omega)} \right]^2 d\omega + \frac{4}{N_0} (a_s - a_\nu)^2 \frac{1 + q_\nu}{(1 + q_s)^2} \right]. \quad (10)$$

Рассмотрим аддитивный измеритель. Предположим, что на его вход поступает аппликативная смесь изображения и фона (2). Тогда, рассуждая, как в работе [6], для аддитивного измерителя получим, что в окрестности истинного значения параметра  $\chi_0$  логарифм ФОП  $L_{\text{add}}(\chi)$  (6) также можно приближённо считать гауссовским марковским процессом с коэффициентами сноса и диффузии

$$M_1(L_{\text{add}}, \chi) = \frac{1}{\chi_{\min}} \begin{cases} k_{1\text{add}}, & \chi_{\min} \leq \chi \leq \chi_0, \\ -k_{2\text{add}}, & \chi_0 < \chi \leq \chi_{\max}; \end{cases} \quad (11)$$

$$M_2(L_{\text{add}}, \chi) = \frac{1}{\chi_{\min}} \begin{cases} d_{1\text{add}}, & \chi_{\min} \leq \chi \leq \chi_0, \\ d_{2\text{add}}, & \chi_0 < \chi \leq \chi_{\max}, \end{cases}$$

где

$$k_{1\text{add}} = \frac{1}{2} \chi_{\min} \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s \rho_s(\omega)(1 + q_s \rho_s(\omega))}{(1 + q_\nu \rho_\nu(\omega) + q_s \rho_s(\omega))(1 + q_\nu \rho_\nu(\omega))} d\omega - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ 1 + \frac{q_s \rho_s(\omega)}{1 + q_\nu \rho_\nu(\omega)} \right] d\omega + \frac{2}{N_0} \left[ \frac{(a_s - a_\nu)^2}{1 + q_\nu} - \frac{a_\nu^2}{1 + q_\nu + q_s} \right] \right], \quad (12)$$

$$k_{2\text{add}} = \frac{1}{2} \chi_{\min} \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ 1 + \frac{q_s \rho_s(\omega)}{1 + q_\nu \rho_\nu(\omega)} \right] d\omega - \right. \\ \left. - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s \rho_s(\omega)}{(1 + q_\nu \rho_\nu(\omega) + q_s \rho_s(\omega))} d\omega + \frac{2}{N_0} \frac{a_s^2}{1 + q_\nu + q_s} \right], \quad (13)$$

$$d_{1\text{add}} = \frac{1}{2} \chi_{\min} \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s^2 \rho_s^2(\omega) (q_s \rho_s(\omega) + 1)^2}{(1 + q_\nu \rho_\nu(\omega) + q_s \rho_s(\omega))^2 (1 + q_\nu \rho_\nu(\omega))^2} d\omega + \right. \\ \left. + \frac{4}{N_0} \frac{(1 + q_s)}{(1 + q_\nu + q_s)^2 (1 + q_\nu)^2} [a_s(1 + q_\nu + q_s) - a_\nu q_s]^2 \right], \quad (14)$$

$$d_{2\text{add}} = \frac{1}{2} \chi_{\min} \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s^2 \rho_s^2(\omega)}{(1 + q_\nu \rho_\nu(\omega) + q_s \rho_s(\omega))^2} d\omega + \frac{4}{N_0} \frac{1 + q_\nu}{(1 + q_\nu + q_s)^2} a_s^2 \right]. \quad (15)$$

Полученные выражения для коэффициентов сноса и диффузии процессов на выходах аддитивного и аппликативного измерителей позволяют сформулировать условия их состоятельности. Можно утверждать, что оба измерителя состоятельны при условиях  $k_{1\text{add}} > 0$ ,  $k_{2\text{add}} > 0$  и  $k_{1\text{app}} > 0$ ,  $k_{2\text{app}} > 0$ , поскольку только в этих случаях коэффициент сноса меняет знак в точке истинного значения площади  $\chi_0$  и следует ожидать, что ОМП неизвестной площади  $\hat{\chi}_{\text{add}}$  и  $\hat{\chi}_{\text{app}}$  лежат в окрестности истинного значения  $\chi_0$ . Нетрудно показать, что аппликативный измеритель состоятелен всегда, за исключением случая, когда изображение и фон не различимы в статистическом смысле, т. е.  $q_s \rho_s(\omega) \equiv q_\nu \rho_\nu(\omega)$ ,  $a_s = a_\nu$ . Для этого достаточно рассмотреть сумму подынтегральных выражений первых двух слагаемых формулы (7):

$$\frac{q_s \rho_s(\omega) - q_\nu \rho_\nu(\omega)}{1 + q_\nu \rho_\nu(\omega)} - \ln \left[ \frac{1 + q_s \rho_s(\omega)}{1 + q_\nu \rho_\nu(\omega)} \right] = u - 1 - \ln u \geq 0, \quad u = \frac{1 + q_s \rho_s(\omega)}{1 + q_\nu \rho_\nu(\omega)} > 0.$$

Аналогично можно показать, что сумма первых двух подынтегральных слагаемых выражения (8) также неотрицательна.

В отличие от аппликативного аддитивный измеритель состоятелен не всегда. Например, если  $a_\nu > a_s/2$ , то при неограниченном уменьшении интенсивностей флуктуаций изображения и фона ( $q_s \rightarrow 0$ ,  $q_\nu \rightarrow 0$ ) коэффициент  $k_{1\text{add}} < 0$  и максимум логарифма ФОП (6) для аддитивного измерителя будет находиться в окрестности  $\chi_{\min}$  независимо от истинного значения неизвестной площади  $\chi_0$ .

Предположим, что наблюдению доступна аппликативная смесь изображения и фона. Рассмотрим статистические свойства аппликативной  $\hat{\chi}_{\text{app}}$  и аддитивной  $\hat{\chi}_{\text{add}}$  оценок, реализуемых соответствующими измерителями площади.

Функция распределения для аппликативной и аддитивной ОМП  $F_{\hat{\chi}}(x) = P[\hat{\chi} < x]$  может быть представлена в виде [10]

$$F_{\hat{\chi}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial F(u, v; x)}{\partial u} \right]_{v=u} du, \quad (16)$$

где

$$F(u, v; x) = P \left[ \max_{\chi < x} L(\chi) < u; \max_{\chi \geq x} L(\chi) < v \right].$$

В формуле (16) и далее для аппликативной оценки следует положить  $\hat{\chi} = \hat{\chi}_{\text{app}}$ ,  $L(\chi) = L_{\text{app}}(\chi)$ , а для аддитивной —  $\hat{\chi} = \hat{\chi}_{\text{add}}$ ,  $L(\chi) = L_{\text{add}}(\chi)$ .

Используя марковские свойства процессов  $L_{\text{app}}(\chi)$  и  $L_{\text{add}}(\chi)$ , можно записать [11]

$$F(u, v; x) = \int_{-\infty}^v W(L, \chi_{\max}) dL, \quad (17)$$

где  $W(L, \chi)$  является решением уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК) при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} W(u, \chi) &= 0, & \text{если } \chi_{\min} \leq \chi \leq x; \\ W(v, \chi) &= 0, & \text{если } x \leq \chi \leq \chi_{\max}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$W(-\infty, \chi) = 0, \quad \text{если } \chi_{\min} \leq \chi \leq \chi_{\max}.$$

Поскольку логарифм ФОП — асимптотически гауссовский случайный процесс, то в качестве начального условия следует выбрать

$$W(L, \chi_{\min}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(\chi_{\min})} \exp \left\{ -\frac{(L - m(\chi_{\min}))^2}{2\sigma^2(\chi_{\max})} \right\} \quad (19)$$

( $m(\chi)$  — математическое ожидание, а  $\sigma^2(\chi)$  — дисперсия логарифма ФОП). Для аппликативного измерителя при  $\chi = \chi_{\min}$  находим следующие значения моментов:

$$m(\chi_{\min}) = m_{\text{app}}(\chi_{\min}) = k_{1\text{app}}, \quad \sigma^2(\chi_{\min}) = \sigma_{\text{app}}^2(\chi_{\min}) = d_{1\text{app}},$$

а для аддитивного измерителя:

$$m(\chi_{\min}) = m_{\text{add}}(\chi_{\min}) = k_{1\text{add}}, \quad \sigma^2(\chi_{\min}) = \sigma_{\text{add}}^2(\chi_{\min}) = d_{1\text{add}}.$$

Явный вид функции распределения ОМП задаётся в результате применения соотношений (16) и (17) к решению уравнения ФПК, полученному при граничных (18) и начальном (19) условиях. Положив

$$z_1 = k_1/\sqrt{d_1} \gg 1, \quad z_2 = k_2/\sqrt{d_2} \gg 1,$$

где  $k_1 = k_{1\text{add}}$  и  $d_1 = d_{1\text{add}}$  для аддитивного измерителя, а  $k_1 = k_{1\text{app}}$  и  $d_1 = d_{1\text{app}}$  для аппликативного измерителя, будем иметь асимптотически точное выражение для плотности вероятности ОМП:

$$W(y) = \sqrt{2} \left\{ \Phi(\sqrt{|y|}) - 1 + \exp((|y|)(2f(1+f)))[(1+2f)[1 - \Phi(\sqrt{|y|}(1+2f))]] \right\}. \quad (20)$$

Здесь

$$y = \begin{cases} z_1^2(x - \chi_0)/\chi_{\min}, & \chi_{\min} \leq x < \chi_0, \\ z_2^2(x - \chi_0)/\chi_{\max}, & \chi_0 \leq x \leq \chi_{\max}; \end{cases} \quad f = \begin{cases} f_1, & \chi_{\min} \leq x < \chi_0, \\ f_2, & \chi_0 \leq x \leq \chi_{\min}; \end{cases}$$

$f_1 = k_2 d_1 / k_1 d_2$ ;  $f_2 = f_1^{-1}$ ;  $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$  — интеграл вероятности.

Аналогично [12] получим приближённое выражение для условного рассеяния оценки площади

$$V(\hat{\chi} | \chi_0) \approx \chi_{\min}^2 \frac{z_1^4(2 + 6R + 5R^2) + z_2^4 R(5 + 6R + 2R^2)}{2z_1^4 z_2^4 (1 + R)^3}, \quad R = f_1. \quad (21)$$

Асимптотически точное при  $z_1 \rightarrow \infty$ ,  $z_2 \rightarrow \infty$  выражение (21) не зависит от истинного значения площади  $\chi_0$ . Поэтому формула (21) описывает также и безусловное рассеяние оценки при любом априорном распределении площади изображения.

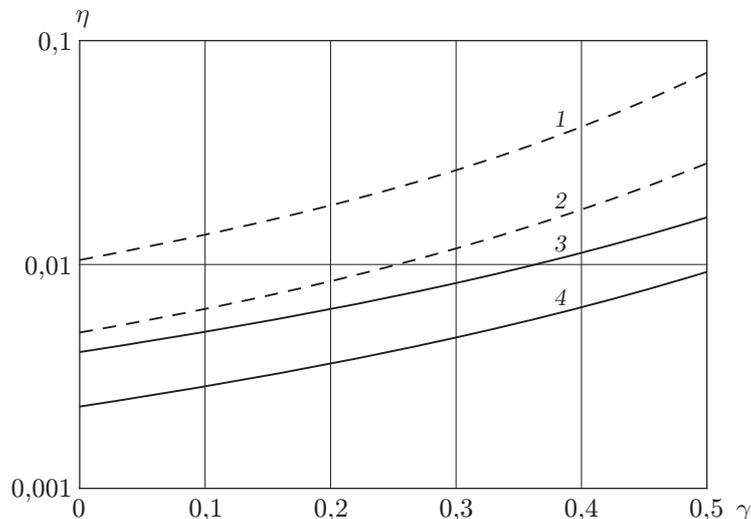
#### Влияние флуктуаций изображения и фона на точность оценки площади.

Рассмотрим влияние статистических характеристик фона и изображения на точность оценки площади. Предположим, что спектральные плотности полезного изображения и фона постоянны в пределах областей  $\omega_s$  и  $\omega_\nu$ , т. е.

$$\rho_s(\omega) = I(\omega, \omega_s), \quad \rho_\nu(\omega) = I(\omega, \omega_\nu).$$

Тогда можно показать, что коэффициенты (7)–(10), определяющие точность аппликативной оценки, и коэффициенты (12)–(15), определяющие точность аддитивной оценки, будут зависеть не только от интенсивностей и математических ожиданий изображения и фона, но и от параметра  $\gamma = S_{\omega_{s\nu}} / \sqrt{S_{\omega_s} S_{\omega_\nu}} \leq 1$ , который описывает степень перекрытия областей, занимаемых спектральными плотностями полезного изображения и фона. Здесь  $S_{\omega_{s\nu}}$  — площадь перекрытия этих областей.

Будем считать, что математические ожидания изображения и фона совпадают и равны нулю ( $a_s = a_\nu = 0$ ), интенсивности изображения и фона также равны и превышают интенсивность пространственного шума ( $q_s = q_\nu = q > 1$ ). Кроме того, примем  $\mu_s = \mu_\nu = \mu$ . Для сравнения точности аппликативной и аддитивной оценок, а также для иллюстрации влияния степени перекрытия областей, занимаемых спектральными плотностями изображения и фона, на точность этих оценок на рисунке приведены зависимости нормированных



Нормированные рассеяния аппликативной и аддитивной оценок (кривые 1 и 3 рассчитаны при  $q = 2$ , а кривые 2 и 4 — при  $q = 3$ )

рассеяний  $\eta_{\text{app}} = V_{\text{app}}(\hat{\chi} | \chi_0) / \chi_{\text{min}}^2$  (сплошные кривые) и  $\eta_{\text{add}} = V_{\text{add}}(\hat{\chi} | \chi_0) / \chi_{\text{min}}^2$  (штриховые кривые) от величины  $\gamma$  при значении  $\mu = 100$  и различных величинах  $q$ . Из рисунка видно, что увеличение  $\gamma$  приводит к ухудшению точности оценок как аддитивного, так и аппликативного измерителя. При этом повысить точность оценки площади можно за счёт увеличения интенсивности изображения. Кроме того, из рисунка видно, что аддитивный измеритель уступает по эффективности аппликативному.

**Заключение.** В предлагаемой работе выполнен синтез алгоритмов максимального правдоподобия оценки площади полезного стохастического изображения на основе аддитивной и аппликативной моделей взаимодействия изображения и фона. Получены характеристики синтезированных алгоритмов.

Обобщая результаты анализа эффективности работы аддитивного и аппликативного измерителей площади изображения можно сделать следующие выводы. Аддитивный измеритель имеет более простую структуру, чем аппликативный. Тем не менее учёт эффектов затенения фона изображением объекта позволяет получать состоятельные оценки в случае, когда более простой аддитивный измеритель несостоятелен. Даже в случае, когда аддитивный измеритель состоятелен, он может существенно проигрывать аппликативному по точности оценки площади.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бычков А. А., Понькин В. А.** Обнаружение изображений пространственно протяженных затеняющих фон объектов // *Автометрия*. 1992. № 4. С. 33–40.
2. **Перетягин Г. И.** Представление изображений гауссовыми случайными полями // *Автометрия*. 1984. № 6. С. 42–48.
3. **Красильников Н. Н.** Теория передачи и восприятия изображений. М.: Радио и связь, 1986. 248 с.
4. **Шелухин О. И.** Радиосистемы ближнего действия. М.: Радио и связь, 1989. 236 с.
5. **Кондратенков Г. С., Потехин В. А., Реутов А. П., Феоктистов Ю. А.** Радиолокационные станции обзора Земли. М.: Радио и связь, 1983. 284 с.
6. **Трифонов А. П., Прибытков Ю. Н.** Обнаружение объектов с неизвестной площадью при наличии фона // *Автометрия*. 2005. 41, № 4. С. 24–39.
7. **Трифонов А. П., Прибытков Ю. Н.** Обнаружение случайных изображений пространственно протяженных объектов, затеняющих фон // *Автометрия*. 2000. № 4. С. 14–25.
8. **Васильев К. К., Драган Я. П., Казаков В. А. и др.** Прикладная теория случайных процессов и полей. Ульяновск: УлГТУ, 1995. 256 с.
9. **Трифонов А. П., Нечаев Е. П., Парфёнов В. И.** Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами /Под. ред. А. П. Трифонова. Воронеж: ВГУ, 1991. 245 с.
10. **Трифонов А. П., Шинаков Ю. С.** Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.
11. **Тихонов В. И., Миронов М. А.** Марковские процессы. М.: Радио и связь, 1977. 488 с.
12. **Трифонов А. П., Захаров А. В., Проняев Е. В.** Оценка параметров разрывного случайного импульса с неизвестной шириной полосы частот // *Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника*. 2001. 44, № 12 С. 3–15.

*Поступила в редакцию 30 июля 2009 г.*