УДК 681.3.08, 517.977

АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ КОТЕЛЬНИКОВА

В. Ю. Булычев, Ю. Г. Булычев, А. П. Лапсарь

Ростовский институт ракетных войск,
344027, г. Ростов-на-Дону, просп. М. Нагибина, д. 24/50
E-mail: ProfBulychev@yandex.ru

Предложен алгоритм оценки вектора состояния управляемых технических объектов в классе функций с ограниченным спектром с применением функции-регуляризатора срезывающего типа, обладающий повышенными оперативностью и точностью по сравнению с известными алгоритмами. Проведена оценка влияния ошибок задания отсчётов дифференцируемых функций на качество оценки, дан анализ методической погрешности алгоритма.

Ключевые слова: теорема Котельникова, функция с ограниченным спектром, функция-регуляризатор, методическая погрешность.

Введение. Эффективная эксплуатация управляемых технических объектов (ТО) различного назначения базируется на достоверной оценке их текущего состояния. Поскольку состояние ТО может характеризоваться большим числом разнородных параметров, в их состав интегрируются информационно-измерительные системы (ИИС). Так как основными показателями качества ИИС считаются оперативность и точность получения измерительной информации, задача разработки высокоточных оперативных алгоритмов оценки вектора состояния ТО на базе ИИС является весьма актуальной как в теоретическом, так и в практическом плане.

Одним из перспективных направлений повышения качества оценивания состояния ТО является разработка алгоритмов, основанных на использовании процедуры перевода непрерывных функций, характеризующих поведение ТО во времени, в класс функций с ограниченным спектром (ФОС) [1]. Но при этом обязательному исследованию подлежат вопросы, связанные с дополнительной погрешностью, возникающей при реализации данных алгоритмов.

Постановка задачи. Рассмотрим управляемый ТО, описываемый системой дифференциальных уравнений [2]

$$\frac{dx_i}{dt} + f_i(x,t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(x,t)\, U_j, \quad i = \overline{1,n},\ t \in [0,T], \qquad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — вектор состояния ТО; U_j — оптимальное управление объектом [1].

Синтез управления ТО (1) по критерию обобщённой работы осуществляется операционным методом с использованием разностных шаблонов [1, 3]:

$$U_j = -K_j^p \Big\langle \varphi_j, \frac{\partial W}{\partial x} \Big\rangle^{p-1} = -K_j^p \Big\langle \varphi_j, \frac{\partial}{\partial x}\Big(\bar W + \sum_{v=1}^{\mu-1} \frac{\tau^v}{v!}\, L^{v-1}\{L\{\bar W\} + Q\}\Big)\Big\rangle^{p-1}, \quad \mu > 1, \quad (2)$$

где $L\{\cdot\} = -\sum\limits_{i=1}^{n} f_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}\{\cdot\}$ — линейный оператор, $f_i = f_i(x,t)$; $\tau = T - t \geq 0$ — относительное обратное время; $\varphi_j = [\varphi_{kj},\ k = \overline{1,n}]^T$; $\partial W/\partial x = [\partial W/\partial x_k,\ k = \overline{1,n}]^T$; $\langle \cdot,\cdot \rangle$ — символ скалярного произведения двух векторов; $W = W(x,t)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial W}{\partial x_i} = -Q \tag{3}$$

на отрезке $[0,T]$ с граничным условием $W(x,T) = \bar{W} = \bar{W}(x)$.

В (2) приняты следующие обозначения: $W = W(x,t)$, $Q = Q(x)$ — заданные положительно-определённые функции координат состояния; K_j, $q > 1$, $p > 1$ — числа, заданные из условия $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Считаем, что функции $\bar{W}(x)$, $Q(x)$ и $f_i = f_i(x,t)$ дифференцируемы требуемое число раз, функции $\varphi_{ij} = \varphi_{ij}(x,t)$ непрерывны.

Оценка состояния ТО производится путём интегрирования системы дифференциальных уравнений (1), в которой вместо U_j подставляется выражение (2).

Вместе с тем реализация вычислений путём последовательного применения оператора $L\{\cdot\}$ с использованием разностных шаблонов приводит к высоким погрешностям расчётов [4, 5], а рассмотренный алгоритм (1)–(3) является некорректным. Это связано с наличием в информации о координатах состояния ТО, поступающей от измерительных датчиков, случайных погрешностей. Другим источником погрешностей являются методическая погрешность дискретных аналогов дифференциальных операторов и погрешность округления в процессе вычислений [1]. При этом погрешность, возникающая с увеличением номера итерации в операционном алгоритме, значительно превышает погрешность отсчётов и возрастает при уменьшении шага дискретизации.

В работе [4] предложен алгоритм, позволяющий заменить итерационную процедуру (2) простыми матричными преобразованиями, когда все фигурирующие в (2) функции можно отнести к классу ФОС. Однако данное ограничение является достаточно жёстким и на практике, как правило, не выполняется. Очевидно, что предложенный в [4] алгоритм управления и оценивания состояния ТО нуждается в применении регуляризирующих процедур.

Цель данной работы — развитие алгоритма функционирования ИИС в классе ФОС с применением функции-регуляризатора срезывающего типа, обладающего повышенной оперативностью и точностью по сравнению с известными алгоритмами, а также анализ возникающих при этом погрешностей.

Вид функции-регуляризатора для оценки состояния объекта. В целях сокращения записей рассмотрим задачу управления одномерным ТО, поведение которого описывается скалярным дифференциальным уравнением

$$dx/dt + f = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j U_j,$$

где $f = f(x)$; $\varphi_j = \varphi_j(x)$.

Функцию W в формуле (3) можно представить в виде

$$W = F[f, f^{(1)}, \ldots, f^{(\mu-2)}, W, \bar{W}^{(1)}, \ldots, \bar{W}^{(\mu-1)}, Q, Q^{(1)}, \ldots, Q^{(\mu-2)}]. \tag{4}$$

Здесь $F(\cdot)$ — известная функция своих аргументов; $f^{(j)} = \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}$; $f^{(0)} = f$; $\bar{W}^{(j)} = \dfrac{\partial^j \bar{W}}{\partial x^j}$; $\bar{W}^{(0)} = \bar{W}$; $Q^{(j)} = \dfrac{\partial^j Q}{\partial x^j}$; $Q^{(0)} = Q$.

Далее для функций f, $\bar{W}$, Q и W примем единое обозначение $P(x) = P$, где P — некоторая обобщённая функция координат состояния ТО, при этом зависимость от времени не указывается, чтобы не загромождать формулы.

Считаем, что $P(x)$ является непрерывной вместе со своими производными до N-го порядка включительно на отрезке $[-X, X] = [-X, -X+\delta] \cup [-X+\delta, X-\delta] \cup [X-\delta, X]$ для $0 < \delta < X$.

Пусть существует функция $g(x)$, заданная на неограниченном интервале, бесконечно дифференцируемая на вещественной оси $(-\infty, \infty)$, которая вместе со своими производными $g(x) \equiv 0$ для всех $x \notin [-X, X]$, а на отрезке $[-X+\delta, X-\delta]$ функция $g(x) \equiv 1$. Величина δ обусловлена крутизной переднего и заднего фронтов нарастания (спада) функции-регуляризатора $g(x)$.

С использованием $g(x)$ преобразуем $P(x)$ к виду

$$\tilde{P}(x) = \begin{cases} P_\infty(x) g(x) \, \forall\, x \in [-X, X], \\ 0 \qquad\qquad\quad \forall\, x \notin [-X, X], \end{cases} \tag{5}$$

где функция $P_\infty(x)$ существует на оси $(-\infty, \infty)$, и при этом

$$P(x) = \begin{cases} P_\infty(x) g(x) \, \forall\, x \in [-X, X], \\ 0 \qquad\qquad\quad \forall\, x \notin [-X, X]. \end{cases} \tag{6}$$

Очевидно [6], что $\tilde{P}(x)$, а также её производные $\tilde{P}^{(i)}(x) = d^i \tilde{P}(x)/dx^i$, $i = \overline{1, N}$, непрерывны на вещественной оси и тождественно равны нулю на интервалах $(-\infty, -X)$ и (X, ∞). В случае $N \to \infty$ функция $\tilde{P}(x)$ является бесконечно дифференцируемой на всей вещественной оси $(-\infty, \infty)$.

В соответствии с (5) и (6) применительно к функции $\tilde{P}(x)$ на отрезке $[-X+\delta, X-\delta]$ воспользуемся следующим приближением для ФОС [7]:

$$\tilde{P}_\Omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\Omega}^{\Omega} \tilde{\Phi}_\Omega(i\omega) \exp(i\omega x) d\omega, \tag{7}$$

где

$$\tilde{\Phi}_\Omega(i\omega) = 0 \,\forall\, |\omega| \geq \Omega; \quad \tilde{\Phi}_\Omega(i\omega) \neq 0 \,\forall\, |\omega| < \Omega; \tag{8}$$

$\tilde{\Phi}_\Omega(i\omega)$ — спектр функции $\tilde{P}_\Omega(x)$; Ω — граничная частота спектра $\tilde{\Phi}_\Omega(i\omega)$.

Используя интерполяционную формулу Котельникова с учётом (5), (7) и (8) запишем

$$\tilde{P}_\Omega(x) = \sum_{k=-M}^{M} \tilde{P}(k\Delta x) \operatorname{sinc}\Big[\frac{\pi}{\Delta x}(x - k\Delta x)\Big]. \tag{9}$$

Здесь $\Delta x = \pi/\Omega$ — шаг между отсчётами $\tilde{P}(k\Delta x)$ функции $\tilde{P}(x)$, причём $\tilde{P}_\Omega(k\Delta x) = \tilde{P}(k\Delta x)$; $k \in \{-M, \ldots, 0, \ldots, M\}$; $\operatorname{sinc}[x] = \dfrac{\sin x}{x}$.

Относительно производной N-го порядка от функции $\tilde{P}_{\Omega}(x)$ можно утверждать, что она также представлена рядом Котельникова

$$\tilde{P}_{\Omega}^{(N)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{P}_{\Omega}^{(N)}(k\Delta x)\,\mathrm{sinc}\Big[\frac{\pi}{\Delta x}(x - k\Delta x)\Big].$$

Мера отклонения функций $\tilde{P}^{(N)}(x)$ и $\tilde{P}_{\Omega}^{(N)}(x)$ в отсчётных точках отрезка $[-X, X]$ может быть оценена по формуле

$$\xi_{(N)} = \Big\|\tilde{P}^{(N)}(x) - \tilde{P}_{\Omega}^{(N)}(x)\Big\| = \max_k \Big|\tilde{P}^{(N)}(x) - \tilde{P}_{\Omega}^{(N)}(x)\Big|, \tag{10}$$

где $k \in \{M, \ldots, 0, \ldots, M\}$.

Далее, исходя из (4)–(10), разработаем алгоритм оценки состояния ТО, устойчивый к погрешностям вычислений.

Разработка устойчивых алгоритмов. Выберем функцию-регуляризатор, предварительно введя в рассмотрение на интервале $(-\infty, \infty)$ вспомогательную функцию

$$\omega(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\exp\Big(-\dfrac{1}{1-x^2}\Big) \,\forall\, |x| < 1, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, |x| \geq 1. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь

$$\lambda = \int_{-1}^{1} \exp\Big(\frac{1}{1-s^2}\Big) ds. \tag{12}$$

Сформируем в соответствии с (11), (12) функцию [6]

$$\omega_h(x) = \frac{1}{h}\,\omega\Big(\frac{x}{h}\Big), \tag{13}$$

где $\omega_h(x)$ и $\omega(x)$ — чётные неотрицательные функции, бесконечно дифференцируемые на интервале $(-\infty, \infty)$, и, кроме того, $\omega_h(x) \equiv 0 \,\forall\, |x| \geq h$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_h(x) dx = 1$.

Учитывая (11)–(13), введём срезывающую функцию

$$\zeta_{2\delta}(x) = \int_{-X+\delta/2}^{X-\delta/2} \omega_{\delta/2}(x - s) ds, \tag{14}$$

которая обладает следующими свойствами: $\zeta_{2\delta}(x) = 0 \,\forall\, x \notin [-X, X]$ и $\zeta_{2\delta}(x) = 1 \,\forall\, x \in [-X + \delta, X - \delta]$, а также бесконечно дифференцируема на $(-\infty, \infty)$.

Таким образом, срезывающая функция (14) может быть использована в качестве функции-регуляризатора $g(x) = \zeta_{2\delta}(x)$ и позволяет преобразовать $P(x)$, $x \in [-X, X]$, в ФОС $\tilde{P}(x) = P_{\infty}(x)g(x) = P_{\infty}(x)\zeta_{2\delta}(x)$, которая на отрезке $[-X + \delta, X - \delta]$ повторяет функцию $P(x)$, а вне отрезка $[-X, X]$ срезает её.

Применив теорему о плотных линейных многообразиях [6], можно показать, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta < (1/4)(\varepsilon/q)^r$ (где r — const), что ФОС $P_\infty(x)\zeta_{2\delta}(x) = \tilde{P}(x)$ будет отличаться по норме пространства $L_2(-X, X)$ от $P(x)$ на отрезке $[-X, X]$ меньше, чем на величину ε, где $Q = \|P\|_{C[-X,X]}$ ($\|\cdot\|_{C[-X,X]}$ — норма пространства $C[-X, X]$).

Если при измерениях получены отсчёты $\tilde{P}_\Omega(k\Delta x) = \tilde{P}(k\Delta x)$, $k \in \{0, \pm 1, \ldots, \pm M\}$, функции $\tilde{P}_\Omega(x)$ (с учётом $\tilde{P}_\Omega(k\Delta x) = 0\,\forall\, k \notin \{0, \pm 1, \ldots, \pm M\}$), то значения её производных до N-го порядка включительно в отсчётных точках вычисляются по следующим формулам [4]:

$$\tilde{P}_\Omega^{(N)} = \tilde{P}_\Omega M_{(N)}, \quad N \in \{1, 2, \ldots\}, \tag{15}$$

где $\tilde{P}_\Omega^{(N)} = \{\tilde{P}_\Omega^{(N)}(k\Delta x),\ k = -M, \ldots, 0, \ldots, M\}$; $\tilde{P}_\Omega = \{\tilde{P}_\Omega(k\Delta x),\ k = -M, \ldots, 0, \ldots, M\}$; $M_{(N)} = \{m_{(N)ik},\ i, k = -M, \ldots, 0, \ldots, M\}$,

$$m_{(N)ik} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{[N/2-1]} \frac{N!\pi^{2j}(-1)^{k-i+j+1}}{\Delta x^N (2j+1)!(k-i)^{N-2j}}, & i \neq k, \\ \displaystyle\frac{\pi^N (-1)^{N/2}}{\Delta x^N (N+1)}, & i = k, \end{cases} \tag{16}$$

для чётных N и

$$m_{(N)ik} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{[N/2]} \frac{N!\pi^{2j}(-1)^{k-i+j}}{\Delta x^N (2j+1)!(k-i)^{N-2j}}, & i \neq k, \\ 0, & i = k, \end{cases} \tag{17}$$

для нечётных N ($[N/2]$ — целая часть числа).

При выводе аналитических выражений (15)–(17) используем формулы Лейбница для N-кратного дифференцирования произведения двух функций и раскрытия неопределённостей типа $0/0$, возникающих при переходе к отсчётным точкам [4].

Из (3) и (4) следует, что для вычисления функций W в отсчётных точках отрезка $[-X + \delta, X - \delta]$ можно воспользоваться следующим приближением:

$$\tilde{W}_\Omega(k\Delta x) = F[\tilde{f}_\Omega(k\Delta x), \tilde{f}_\Omega^{(1)}(k\Delta x), \ldots, \tilde{f}_\Omega^{(\mu-2)}(k\Delta x), \tilde{\tilde{W}}_\Omega(k\Delta x), \tilde{\tilde{W}}_\Omega^{(1)}(k\Delta x), \ldots$$

$$\ldots, \tilde{\tilde{W}}_\Omega^{(\mu-1)}(k\Delta x), \tilde{Q}_\Omega(k\Delta x), \ldots, \tilde{Q}_\Omega^{(\mu-2)}(k\Delta x)], \tag{18}$$

где $k \in \{-M, \ldots, 0, \ldots, M\}$.

Для восстановления функции $\tilde{W}_\Omega(x)$ на всём отрезке $[-X + \delta, X - \delta]$ воспользуемся теоремой Котельникова в матричной форме:

$$\tilde{W}_\Omega(x) = \tilde{W}_\Omega D, \tag{19}$$

где

$$D = \Big\{\mathrm{sinc}\Big[\frac{\pi}{\Delta x}(x - k\Delta x)\Big],\ k = -M, \ldots, 0, \ldots, M\Big\}^T;$$

$$\tilde{W}_\Omega = \{\tilde{W}_\Omega(k\Delta x),\, k = -M, \ldots, 0, \ldots, M\}^T.$$

По аналогии с (19) с учётом (15) запишем

$$\tilde{W}_\Omega^{(1)}(x) = \tilde{W}_\Omega^{(1)} D = \tilde{W}_\Omega M_{(1)} D. \tag{20}$$

В соответствии с (2) и (20) приближённое управление ТО можно задать как

$$\tilde{U}_j = -K_j^p \langle \varphi_j(x),\, \tilde{W}_\Omega^{(1)}(x)\rangle = -K_j^p \langle \varphi_j(x),\, \tilde{W}_\Omega M_{(1)} D\rangle, \quad j = \overline{1, m}. \tag{21}$$

Зная управление (21), оценим состояние ТО из уравнения

$$\frac{dx}{dt} + f = -\sum_{j=1}^{m} \varphi_j K_j^p \langle \varphi_j(x),\, \tilde{W}_\Omega M_{(1)} D\rangle. \tag{22}$$

Приложение полученных результатов к многомерным ТО не представляет сложности и сводится к применению рассмотренного подхода к каждой из координат вектора состояния.

Оценка методической погрешности алгоритма. Для оценки эффективности разработанного алгоритма проведём анализ методической погрешности, включающей в себя погрешность ξ, возникающую за счёт усечения операционного ряда в (3), и погрешность $\xi_{(N)}$ при вычислении производных N-го порядка от обобщённой функции $\tilde{P}(x)$.

Погрешность ξ можно вычислить по формуле [3]

$$\xi = \frac{(\tau D_0)^\theta}{D_0} \Big[\exp(\tau D_0) - \sum_{l=0}^{\mu-\theta-1} \frac{\tau D_0}{l!} \Big] \, |L\bar{W} + Q| \tag{23}$$

(D_0 и θ — положительные величины), при $\mu \to \infty$ она стремится к нулю.

Оценим величину погрешности $\xi_{(N)}$. Заменяя дифференцирование функции $\tilde{P}(x) \notin C_\omega$ (C_ω — класс ФОС) дифференцированием функции $\tilde{P}_\Omega(x) \in C_\omega$, для которой справедливо представление (9), получим погрешность $\xi_{(N)}$, обусловленную тем, что спектр $\tilde{\Phi}_\Omega(i\omega)$ в отличие от спектра $\tilde{\Phi}(i\omega)$ (соответствующего функции $\tilde{P}(x)$) является ограниченным и на отрезке $[-\Omega, \Omega]$ данные спектры не совпадают.

Пусть для непрерывной на всей оси спектральной плотности $\tilde{\Phi}(i\omega)$ функции $\tilde{P}(x)$ выполняется условие [7]

$$|\tilde{\Phi}(i\omega)| < \frac{\sigma}{|\omega|^\beta}, \quad \sigma > 0,\ \beta > 1,\ |\omega| > \Omega, \tag{24}$$

где σ, β — константы, ограничивающие поведение функции $\tilde{\Phi}(i\omega)$ в частотной области.

Так как

$$\tilde{\Phi}(i\omega) \neq \tilde{\Phi}_\Omega(i\omega), \quad |\omega| < \Omega,$$

для функции $\tilde{P}_\Omega(x) \notin C_\omega$ справедливо представление [7]

$$\tilde{P}_\Omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\Omega}^{\Omega} \Big[\tilde{\Phi}(i\omega) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \tilde{\Phi}(i(\omega + 2k\Omega)) \Big] \exp(i\omega x) d\omega. \tag{25}$$

Дифференцируя (25), получим

$$\tilde{P}_\Omega^{(N)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\Omega}^{\Omega}(i\omega)^N\Big[\tilde{\Phi}(i\omega) + \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\tilde{\Phi}(i(\omega+2k\Omega))\Big]\exp(i\omega x)d\omega. \qquad (26)$$

Для оценки погрешности $\xi_{(N)}$, исходя из (26), имеем

$$\xi_{(N)} < \frac{1}{2\pi}\Big\{\int\limits_{-\infty}^{-\Omega}|(i\omega)^N\tilde{\Phi}(i\omega)|d\omega + \int\limits_{\Omega}^{\infty}|(i\omega)^N\tilde{\Phi}(i\omega)|d\omega +$$

$$+ \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\int\limits_{-\Omega}^{\Omega}|(i\omega)^N\tilde{\Phi}(i(\omega+2k\Omega))|d\omega\Big\}. \qquad (27)$$

Вместе с тем с учётом (24)

$$\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\int\limits_{-\Omega}^{\Omega}|(i\omega)^N\tilde{\Phi}(i(\omega+2k\Omega))|d\omega < \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\int\limits_{-\Omega}^{\Omega}\frac{\sigma|\omega|^N}{|\omega+2k\Omega|^\beta}\,d\omega =$$

$$= 2\sigma\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\int\limits_{0}^{\Omega}\frac{\omega^N}{(\omega+2k\Omega)^\beta}\,d\omega + \int\limits_{-\Omega}^{0}\frac{(-\omega)^N}{(\omega+2k\Omega)^\beta}\,d\omega\Big]\Big\}, \qquad (28)$$

причём функции $\omega^N/|\omega+2k\Omega|^\beta$ и $(-\omega)^N/|\omega+2k\Omega|^\beta$ всегда положительны при $0 \le \omega \le \Omega$ и $-\Omega \le \omega \le 0$ соответственно.

Используем далее оценки [8]

$$\int\limits_{0}^{\Omega}\frac{\omega^N}{(\omega+2k\Omega)^\beta}\,d\omega < \int\limits_{0}^{\Omega}\max_{\omega}\Big[\frac{\omega^N}{(\omega+2k\Omega)^\beta}\Big]\,d\omega = \frac{(2k)^{N-\beta}\Omega^{N-\beta+1}}{(\eta-1)^{N-\beta}\eta^\beta}, \qquad (29)$$

$$\int\limits_{-\Omega}^{0}\frac{(-\omega)^N}{(\omega+2k\Omega)^\beta}\,d\omega < \int\limits_{-\Omega}^{0}\max_{\omega}\Big[\frac{(-\omega)^N}{(\omega+2k\Omega)^\beta}\Big]d\omega = \frac{(2k)^{N-\beta}\Omega^{N-\beta+1}}{(\eta+1)^{N-\beta}\eta^\beta}. \qquad (30)$$

Полагая $\beta - N > 1$ и учитывая соотношения (29) и (30), путём несложных преобразований получим следующие неравенства:

$$\frac{1}{2\pi}\Big\{2\sigma\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{\Omega}\frac{\omega^N}{(\omega+2k\Omega)^\beta}\,d\omega\Big\} < \frac{\sigma 2^{N-\beta}\Omega^{N-\beta+1}}{\pi(\eta-1)^{N-\beta}\eta^\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\beta-N}} =$$

$$= \frac{\sigma(-2)^{N-\beta}\Omega^{N-\beta+1}}{\pi(1-\eta)^{N-\beta}\eta^{\beta}}\,\zeta(\beta-N), \tag{31}$$

$$\frac{1}{2\pi}\Big\{2\sigma\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-\Omega}^{0}\frac{(-\omega)^N}{(\omega+2k\Omega)^{\beta}}\,d\omega\Big\} < \frac{\sigma 2^{N-\beta}\Omega^{N-\beta+1}}{\pi(1+\eta)^{N-\beta}\eta^{\beta}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\beta-N}} =$$

$$= \frac{\sigma 2^{N-\beta}\Omega^{N-\beta+1}}{\pi(1+\eta)^{N-\beta}\eta^{\beta}}\,\zeta(\beta-N), \quad \beta-N>1. \tag{32}$$

Из (27), (28) и (31), (32) следует оценка

$$\xi_{(N)} < \frac{\sigma\Omega^{N-\beta+1}}{\pi}\Big\{|N-\beta+1|^{-1}+2^{N-\beta}\zeta(\beta-N)\frac{(1+\eta)^{N-\beta}+(\eta-1)^{N-\beta}}{(\eta^2-1)^{N-\beta}\eta^{\beta}}\Big\}, \quad \beta-N>1, \tag{33}$$

где $\zeta(y)$ — дзета-функция Римана; $\eta=\beta/N$.

Таким образом, соотношение (33) позволяет оценить погрешность $\xi_{(N)}$, возникающую в случае применения выражений (16)–(18) непосредственно к функции $\tilde{P}(x)$, не относящейся к классу ФОС.

Следует отметить, что в отличие от известных методов оценки состояния ТО при использовании функции-регуляризатора срезывающего типа не возникает необходимости учёта погрешности усечения функции $P(x)$ в пространственной области, что, в свою очередь, исключает выбор ограничивающих констант, аналогичных σ и β в формуле (24). Данный факт значительно упрощает вычисления.

Отметим, что в случае быстрых изменений функции $P(x)$, $x\in[-X+\delta, X-\delta]$, целесообразно по аналогии с [4] применять функцию-регуляризатор более общего вида $g(x)=\zeta_{2\delta}(x)H(x)$, где $H(x)$ выбирается в зависимости от поведения $P(x)$ на информационном отрезке и обеспечения приемлемых для определения спектральных свойств функции $\tilde{P}(x)=P_{\infty}(x)g(x)$. Однако в этом случае возникают сложности вычислений [4], связанные с необходимостью последующего восстановления искомых производных на основе соотношений, полученных из формулы Лейбница для N-кратного дифференцирования произведения двух функций, и появляются дополнительные погрешности вычислений. Кроме того, выбор параметров функции $H(x)$, а также совокупности констант, ограничивающих пространственные и частотные изменения функции $\tilde{P}(x)$, достаточно сложен. Поэтому если $P(x)$ не содержит резко выраженных высокочастотных составляющих, то предложенный выше алгоритм обеспечивает существенное уменьшение методической погрешности дифференцирования по сравнению с известными операционными алгоритмами.

С использованием (33) и учётом того, что вид функциональной зависимости (4) известен, найдём оценку суммарной методической погрешности вычисления функции $W(x,t)$.

Оценка погрешности, возникающей при случайных ошибках задания отсчётов. На практике широко распространена ситуация, когда отсчёты $\tilde{P}_{\Omega}(k\Delta x)$ функции $\tilde{P}_{\Omega}(x)$ сами содержат погрешности различной природы. Их распределение, как правило, подчинено нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $K=\{k_{ij},\, i,j=-M,\ldots,0,\ldots,M\}$, где $k_{ii}=\sigma_i^2$ — дисперсия.

Так как преобразования (15)–(17) линейны, корреляционную матрицу ошибок вычисления производных N-го порядка можно представить в виде [9]

$$K_N = M_{(N)}^T K M_{(N)}. \tag{34}$$

Если матрица K диагональная и $k_{ll} = \sigma_l^2 = \sigma_0^2$, $l \in \{-M, \ldots, 0, \ldots, M\}$, то единичные дисперсии $\sigma^2_{(N)l}$ вычисления производных N-го порядка в отсчётных точках с учётом (34) вычисляются по формулам

$$\sigma^2_{(N)l} = \sigma_0^2 \Big[\sum_{\substack{i=-M \\ i\neq l}}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{N/2-1} \frac{N!\pi^{2j}(-1)^{l-i+j+1}}{\Delta x^N (2j+1)!(l-i)^{N-2j}} \Big)^2 + \frac{\pi^{2N}}{\Delta x^{2N}(N+1)^2} \Big] \tag{35}$$

для чётных N и

$$\sigma^2_{(N)l} = \sigma_0^2 \sum_{\substack{i=-M \\ i\neq l}}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{N/2} \frac{N!\pi^{2j}(-1)^{l-i+j}}{\Delta x^N (2j+1)!(l-i)^{N-2j}} \Big)^2 \tag{36}$$

для нечётных N.

В качестве величины, характеризующей погрешность N-кратного дифференцирования функции $\tilde{P}_\Omega(x)$, по аналогии с [9] целесообразно использовать сумму квадратов максимальных случайной и методической погрешностей:

$$\gamma_{(N)} = (3\sigma_{(N)})^2 + \xi^2_{(N)}, \tag{37}$$

где $\sigma_{(N)} = \max\limits_l \sigma_{(N)l}$.

Несложно показать [7], что при соответствующем выборе параметров предложенного алгоритма погрешность $\xi_{(N)}$ может быть сведена к сколь угодно малой величине, т. е. результирующая погрешность дифференцирования (37) будет определяться в основном величиной $(3\sigma_{(N)})^2$.

Анализ выражений (35) и (36) показывает, что степень устойчивости результатов дифференцирования к случайным погрешностям определяется в основном величиной Δx^{-N}. Рассуждая аналогично [4, 5], можно показать, что предлагаемый алгоритм из-за неизбыточного представления функций рядом Котельникова (формируемых с учётом (5)–(7), (14)) работоспособен при шаге Δx, значительно большем, чем шаг квантования, соответствующий традиционным разностным методам. Таким образом, алгоритм (20) обладает бо́льшим запасом устойчивости к случайным погрешностям различной природы по сравнению с уже известными [1, 3].

Если на отрезке $[-X+\delta, X-\delta]$ имеется избыточная совокупность отсчётов $\tilde{P}_\Omega(i\Delta\bar{x})$, $i \in \{-I, \ldots, 0, \ldots, I\}$, функции $\tilde{P}_\Omega(x)$ (где $\Delta\bar{x} < \Delta x$, $I > M$), появляется возможность снижения случайной погрешности $\sigma^2_{(N)}$ за счёт оптимального оценивания производных $\tilde{P}^{(N)}_\Omega(k\Delta x)$, $k \in \{-M, \ldots, 0, \ldots, M\}$, в соответствии с критерием минимума среднеквадратической невязки [10]

$$S = \sum_{i=-I}^{I} \Big\{ \sum_{k=-M}^{M} \widehat{\tilde{P}}_\Omega(k\Delta x) \operatorname{sinc}\Big[\frac{\pi}{\Delta x}(i\Delta\bar{x} - k\Delta x)\Big] - \tilde{P}_\Omega(i\Delta\bar{x}) \Big\}^2,$$

где $\widehat{\tilde{P}}_\Omega(k\Delta x)$ — оценка отсчёта $\tilde{P}_\Omega(k\Delta x)$ функции $\tilde{P}_\Omega(x)$.

Исходя из условия минимума величины S, получим систему из $(2M+1)$ уравнений

$$\sum_{k=-M}^{M} \widehat{\tilde{P}}_\Omega(k\Delta x) \sum_{i=-I}^{I} \operatorname{sinc}\Big[\frac{\pi}{\Delta x}(i\Delta\bar{x} - k\Delta x)\Big] \operatorname{sinc}\Big[\frac{\pi}{\Delta x}(i\Delta\bar{x} - j\Delta x)\Big] =$$

$$= \sum_{i=-I}^{I} \tilde{P}_\Omega(k\Delta x) \operatorname{sinc}\Big[\frac{\pi}{\Delta x}(i\Delta\bar{x} - k\Delta x)\Big], \quad j \in \{-M,\dots,0,\dots,M\}. \tag{38}$$

Систему уравнений (38) можно записать в матричной форме:

$$A^T A \widehat{\tilde{P}}_\Omega = A^T \tilde{P}_{\Omega,I}, \tag{39}$$

где $\widehat{\tilde{P}}_\Omega = \{\widehat{\tilde{P}}_\Omega(k\Delta x),\, k \in -M,\dots,0,\dots,M\}^T$; $\tilde{P}_\Omega = \{\tilde{P}_\Omega(k\Delta x),\, k \in -M,\dots,0,\dots,M\}^T$; A — известная переходная матрица размера $(2I+1)\times(2M+1)$ [10].

В соответствии с (15), (38) и (39) оценка $\widehat{\tilde{P}}_\Omega = \{\widehat{\tilde{P}}_\Omega(k\Delta x),\, k \in -M,\dots,0,\dots,M\}^T$ вектора производных $\tilde{P}_\Omega^{(N)}$ вычисляется по формуле

$$\widehat{\tilde{P}}_\Omega^{(N)} = M_{(N)}^T (A^T A)^{-1} A^T \tilde{P}_{\Omega,I}. \tag{40}$$

При использовании оптимальных оценок (40) корреляционную матрицу погрешностей вычислений компонент вектора $\widehat{\tilde{P}}_\Omega^{(N)}$ (при некоррелированных погрешностях задания отсчётов $\tilde{P}_\Omega(k\Delta x)$, $k \in \{-M,\dots,0,\dots,M\}$) получим в виде

$$K_{(N)} = \sigma_0^2 M_{(N)}^T (A^T A)^{-1} M_{(N)}. \tag{41}$$

Как частный случай из (40) и (41) при $K=0$ и $M=I$ следуют соотношения (15), (35) и (36).

Заключение. Таким образом, в данной работе подтверждается, что при использовании функции-регуляризатора срезывающего типа не возникает дополнительных погрешностей, связанных с восстановлением искомых производных $\bar{W}^{(N)}(k\Delta x)$ по полученным значениям $\tilde{\tilde{\bar{W}}}^{(N)}(k\Delta x)$ на отрезке $[-X+\delta, X-\delta]$. Это позволяет при синтезе управляющих воздействий (21) и оценке состояния ТО (22) значительно уменьшить объём сетки аппроксимации по координате состояния, что, в свою очередь, даёт возможность существенно повысить оперативность оценивания состояния и управления. Кроме того, использование функции-регуляризатора срезывающего типа позволяет не учитывать погрешности усечения рассматриваемых функций по координате x, что делает перспективным использование предложенного алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Буков В. Н., Красовский А. А.** Операционный алгоритм оптимального управления // АиТ. 1974. № 10. С. 5–12.
2. **Красовский А. А.** Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 560 с.

3. **Красовский А. А., Буков В. Н., Шендрик В. С.** Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. М.: Наука, 1977. 271 с.
4. **Булычев Ю. Г.** Математический аппарат N-кратного дифференцирования функций с финитным спектром и его применение // ЖВМиМФ. 1994. **39**, № 5. С. 643–657.
5. **Самарский А. А., Гулин А. В.** Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
6. **Треногин В. А.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
7. **Хургин Я. И., Яковлев В. П.** Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971. 408 с.
8. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 801 с.
9. **Казаков И. Е.** Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. М.: Наука, 1975. 264 с.
10. **Жданюк Б. Ф.** Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978. 384 с.

Поступила в редакцию 10 марта 2010 г.