УДК 621.321

ПРЕОДОЛЕНИЕ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ПРИ ОПТИМИЗАЦИОННОМ СИНТЕЗЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ*

А. А. Воевода, А. В. Чехонадских

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Новосибирский государственный технический университет», 630092, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20
E-mail: ucit@ucit.ru
alcheh@ngs.ru

Решается проблема минимизации овражной недифференцируемой функции, характеризующей качество расположения полюсов, при синтезе системы автоматического управления с регулятором неполного порядка. Изучена связь значений целевых функций размещения корней многочленов и их производных. Установлена возможность перехода от недифференцируемой характеристики расположения корней многочлена к гладкой характеристике его производной.

Ключевые слова: система автоматического управления, регулятор пониженного порядка, минимизация недифференцируемой овражной функции, градуировка корневого набора многочлена, выпуклая оболочка.

Введение. При операторном описании системы автоматического управления (САУ) её важнейшие свойства определяются полюсами — корнями характеристического многочлена. При синтезе систем полного порядка, регулятор которых сравним по сложности с управляемым объектом, можно задавать расположение полюсов по усмотрению конструктора; теория этих систем детально изучена и изложена во многих фундаментальных монографиях (например, в [1]).

Однако в промышленной и технической практике значительное преобладание получили регуляторы малых порядков ПИ и ПИД[1]. В последние годы исследование применения и настройки таких регуляторов стало одним из наиболее актуальных направлений теории линейных систем. Поскольку в этом случае число свободных параметров недостаточно для обеспечения произвольно заданного расположения полюсов, существует множество подходов к синтезу систем, применимых в тех или иных условиях. Один из возможных путей — оптимизационный: требуется достичь наилучшего расположения полюсов за счёт выбора значений параметров регулятора. Однако этот процесс осложняется невыпуклостью [2] большинства возникающих задач и, как следствие, их многоэкстремальностью [3]. Сравнительный анализ различных подходов [4] позволил установить ещё ряд трудностей.

Сочетание указанных факторов привело к тому, что развитие теории линейных систем сосредоточилось на двух крайностях: синтезе управления полного порядка (близкого по сложности описания к управляемому объекту) либо малого порядка (где регулятор имеет два или три параметра). При этом теория систем неполного порядка остаётся малоисследованной областью, в которой сохраняется множество содержательных проблем [2]. Оптимизационный метод, изложенный в [5], ориентирован как раз на синтез регуляторов пониженного порядка, а важнейшей проблемой в его практическом осуществлении

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (ГК № П694 от 12.09.2009).

[1]С включением пропорционального, интегрального и дифференцирующего звеньев.

оказалась недифференцируемость целевой функции[2].

Цель данной работы — установить способ перехода от овражной функции корней исходного многочлена к дифференцируемой целевой функции, допускающей сравнительно простую градиентную минимизацию; этот подход опирается на теорему Гаусса об области расположения корней производной многочлена [6].

Производное отображение соответствия корней и коэффициентов. Возникновение разрывов 2-го рода для производных целевых функций, характеризующих расположение полюсов, связано с известными соотношениями между корнями и коэффициентами многочленов [7].

Коэффициенты приведённого многочлена $f_n(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$ являются элементарными симметрическими функциями его корней $z_1, \ldots, z_n$:

$$a_{n-k} = (-1)^k \sigma_k[z_1, \ldots, z_n] \quad (k = 1, \ldots, n); \quad a_n = \sigma_0 = 1.$$

Поскольку от порядка записи корней ничего не зависит, для краткости положим $\sigma_k^n[z_1, \ldots, z_n] = \sigma_k^n$. Пропуск в многочленах σ_k^n одной из переменных z_l, равносильный подстановке значения $z_l = 0$, можно записать как

$$\sigma_k^{n\backslash l} = \sigma_k^n\Big|_{z_l=0} = \sigma_k[z_1, \ldots, z_{l-1}, z_{l+1}, \ldots, z_n].$$

Из определения многочлена σ_k^n ясно, что $\dfrac{\partial}{\partial z_j}\,\sigma_k^n = \sigma_{k-1}^{n\backslash j}$ и $\dfrac{\partial}{\partial z_j}\,\sigma_1^n = 1$.

Тогда матрица Якоби $(\partial a_i/\partial z_j)$ будет иметь вид

$$\frac{\partial(a_{n-1}, \ldots, a_0)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \sigma_1^{n\backslash 1} & \cdots & \sigma_1^{n\backslash k} & \cdots & \sigma_1^{n\backslash n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (-1)^n\sigma_{n-1}^{n\backslash 1} & \cdots & (-1)^n\sigma_{n-1}^{n\backslash k} & \cdots & (-1)^n\sigma_{n-1}^{n\backslash n} \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что матрица J^{-1} обратной зависимости коэффициентов от корней оказывается матрицей Вандермонда с диагональным «знаменателем»:

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} (z_1 - z_2)\ldots(z_1 - z_n) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (z_2 - z_1)\ldots(z_2 - z_n) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (z_n - z_1)\ldots(z_n - z_{n-1}) \end{pmatrix}^{-1} \times$$

[2]Точнее, разрывы 2-го рода у частных производных и неограниченный субдифференциал целевой функции. За счёт этого образуется овражный рельеф «с тесно смыкающимися стенками» и возникает множество «ложных экстремумов»: точек стабилизации градиентных алгоритмов на «дне ущелья». Так, при численном исследовании двойного маятника с ПИД-регулятором в критических зонах применялись комбинации различных приёмов: варьирования шага, нахождения направления дна и др., пока не достигался надёжный результат [5].

$$\times \begin{pmatrix} z_1^{n-1} & \cdots & z_1 & 1 \\ z_2^{n-1} & \cdots & z_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_n^{n-1} & \cdots & z_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что при кратных корнях многочлена производное отображение соответствия корней и коэффициентов терпит разрыв 2-го рода, в результате чего возникают «ущелья рельефа» целевых функций координат корней [4, 5]. Это имеет место как для функций типа метрики, зависящих от всех корней, так и для функций типа градуировки, зависящих только от самых «правых» из них; к рассмотрению последних и переходим.

Корневые R-градуировки. Наиболее эффективной целевой функцией с точки зрения оптимизации расположения полюсов представляется градуировка, включающая только координаты наименее устойчивых корней. Принципиальный для данной работы список требований к ней таков[3]:

Определение. Назовём комплексную плоскость $\mathbf{R}$-градуированной, если на ней задано упорядоченное по включению семейство выпуклых замкнутых областей $\{B_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbf{R}\}$ такое, что: 1) $B_\alpha \subset B_\beta$ при $\alpha < \beta$; 2) $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathbf{R}} B_\alpha = \mathbf{C}$; 3) $\mathrm{Re}c \le \alpha$ для всякого $c \in B_\alpha$.

Определение. Градуировкой множества $M \subset \mathbf{C}$ называется величина $\alpha(M) = \inf\{\alpha \,|\, M \subset B_\alpha\}$; градуировкой $\alpha(f)$ многочлена $f(s)$ — градуировка множества его корней.

В эту конструкцию укладываются многие апробированные возможности, например семейства:

— левых полуплоскостей $F(a) = \max \mathrm{Re} z_k$, где $B_\alpha = \{s \,|\, \mathrm{Re}s \le \alpha\}$;

— левых конусов $G(a) = \max(\mathrm{Re}z_k + |\mathrm{Im}z_k|)$, где $B_\alpha = \{s \,|\, \mathrm{Re}s + |\mathrm{Im}s| \le \alpha\}$;

— усечённых конусов $H_l(a) = \max(F(a), G(a) - l)$, где $B_\alpha = \{s \,|\, \mathrm{Re}s \le \alpha, \mathrm{Re}s + |\mathrm{Im}s| \le \alpha + l\}$.

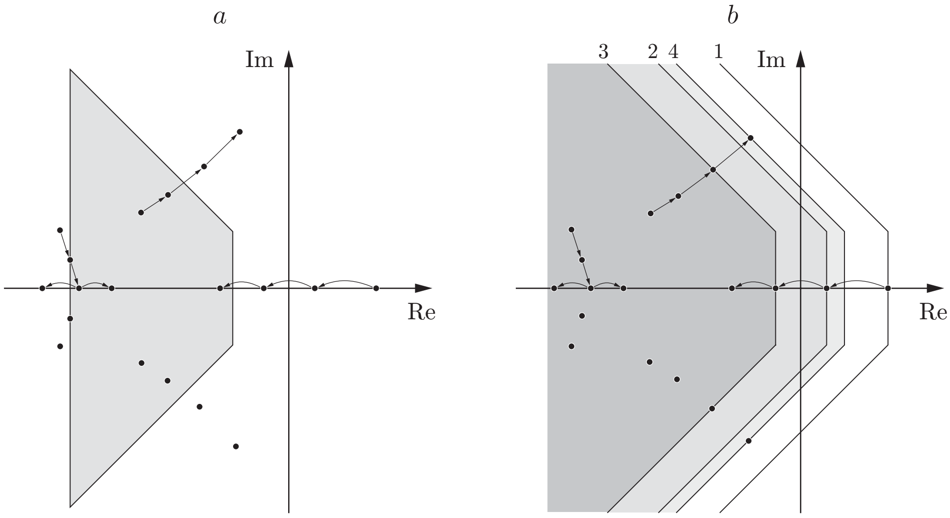
Здесь a — вектор коэффициентов многочлена. Семейства вложенных трапеций и эллипсов также можно рассматривать как $\mathbf{R}$-градуированные.

Очевидно, градуировка многочлена совпадает с градуировкой одного из его корней как одноэлементного множества — назовём этот корень α-старшим. Естественно требовать кусочно-гладкой зависимости градуировки от координат такого корня.

Если общепринятый подход к синтезу систем в операторной форме предполагает фиксированную целевую область некоторого стандартного вида (см. рисунок, a), то конструкция $\mathbf{R}$-градуировки позволяет решать задачу размещения корней, указывая только вид области (см. рисунок, b). Так, при любых значениях свободных параметров полюсы системы накрываются одним из усечённых конусов, как показано на рисунке, b; абсцисса правой границы конуса оказывается функцией параметров регулятора, а её минимизация позволяет либо находить их оптимальные значения, либо делать вывод о невозможности стабилизации системы регулятором выбранной структуры и необходимости перехода к более сложному управлению.

В такой форме могли бы найти решение многие задачи синтеза САУ. Однако минимизация функции $\mathbf{R}$-градуировки сочетает в себе все трудности, упомянутые во введении. В

[3]По сравнению со списком [8] он неполон, что связано с большей общностью производимого здесь рассмотрения.



Целевые области расположения корней при модальном синтезе систем неполного порядка: общепринятый подход — обеспечение попадания полюсов в заданную трапецию на плоскости **C**, корневые годографы соответствуют изменению некоторого параметра (a); оптимизационный подход — обеспечение самого левого положения усечённого конуса, охватывающего все полюсы и задаваемого самым «неудобным» из них; границы конусов 1 и 2 определяются действительным корнем, конуса 4 — комплексной парой, конуса 3 — корнем и парой вместе (b)

[5] решалась проблема представления критических зон в пространстве параметров и оценки множества возможных минимумов. Однако в численном эксперименте (см. сноску 2) наибольшие сложности создавала стабилизация градиентного алгоритма вблизи многообразий, соответствующих кратным α-старшим корням. Принципиальным условием преодоления этого затруднения оказывается выпуклость множеств, входящих в градуировочное семейство $\{B_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$.

Теорема Гаусса и R-градуировка кратных корней. Свойство, выражаемое данной теоремой, использовалось в [9] при синтезе линейных САУ с регуляторами пониженного порядка, причём для целей работы достаточно было более слабого утверждения: производная гурвицева полинома есть гурвицев полином. В [10] дано его новое доказательство, свободное от сложных геометрических и механических рассуждений.

Ввиду важности основной теоремы для данной работы приведём её короткое доказательство.

Лемма. Пусть $f_n(s)$ — приведённый многочлен (возможно, с комплексными коэффициентами), $z_1, \ldots, z_n$ — его корни. Тогда любой корень z_0 его производной удовлетворяет условиям

$$\min_{1 \le l \le n} \mathrm{Re} z_l \le \mathrm{Re} z_0 \le \max_{1 \le l \le n} \mathrm{Re} z_l, \quad \min_{1 \le l \le n} \mathrm{Im} z_l \le \mathrm{Im} z_0 \le \max_{1 \le l \le n} \mathrm{Im} z_l.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим логарифмическую производную многочлена $f(s)$:

$$\frac{d}{dz} \ln f(s) = \frac{d}{dz} \ln[(z - z_1) \ldots (z - z_n)] = \frac{1}{z - z_1} + \ldots + \frac{1}{z - z_n}.$$

Так как действительные части комплексной величины и обратной к ней совпадают по знаку, при $\mathrm{Re}z > \max \mathrm{Re}z_l$ получается неравенство

$$\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-z_k}=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\frac{1}{z-z_k}>0;$$

аналогично при $\mathrm{Re}z < \min\limits_l \mathrm{Re}z_l$ имеем

$$\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-z_k}<0.$$

Следовательно, все нули и все полюсы логарифмической производной сосредоточены в полосе $\{z \mid \min\limits_l \mathrm{Re}z_l \le \mathrm{Re}z \le \max\limits_l \mathrm{Re}z_l\}$. Поскольку $\dfrac{d}{dz}\ln f(s)=\dfrac{f'(s)}{f(s)}$, то корень $z=z_0$ производной $f'(s)$ является либо корнем логарифмической производной, либо её простым полюсом (когда $z_0=z_k$ — кратный корень многочлена $f(s)$).

Повторяя это рассуждение для мнимых составляющих (учитывая, что мнимые части комплексной величины и обратной к ней противоположны по знаку), получаем второе неравенство леммы.

Теорема Гаусса [6]. Выпуклая оболочка корней многочлена с комплексными коэффициентами содержит выпуклую оболочку его производной, причём общими точками границ этих многоугольников будут кратные корни исходного многочлена.

Доказательство. Прежде всего заметим, что любой выпуклый многоугольник на плоскости может быть получен как пересечение конечного числа полуплоскостей. Поэтому нужно установить, что если корни многочлена расположены на полуплоскости $P(\varphi,a)$, задаваемой неравенством $x\cos\varphi+y\sin\varphi\ge a$ для некоторых значений φ, a, то на ней же находятся и корни производной.

Однако если корни $z_k=x_k+iy_k$ удовлетворяют соотношению, определяющему полуплоскость $P(\varphi,a)$, то числа $\xi_k=z_k\mathrm{e}^{-i\varphi}$ находятся в полуплоскости $P(0,\,a)$, задаваемой неравенством $x\ge a$. Поскольку $z_1,\ldots,z_n$ — корни многочлена $f_n(s)$, числа ξ_k оказываются корнями многочлена $g_n(s)=f_n(\mathrm{e}^{i\varphi}s)$. Корни $\tilde{\xi}_1,\ldots,\tilde{\xi}_{n-1}$ его производной $g_n'(s)=\mathrm{e}^{i\varphi}f_n'(\mathrm{e}^{i\varphi}s)$ по лемме находятся в полуплоскости $P(0,\,a)$. А так как они получаются умножением $\tilde{\xi}_k=\tilde{z}_k\mathrm{e}^{-i\varphi}$ из корней $\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{n-1}$ производной многочлена $f_n(s)$, то числа $\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{n-1}$ также должны располагаться в полуплоскости $P(\varphi,\,a)$.

Замечание. Утверждение леммы не удаётся усилить, воспроизводя в комплексной плоскости известную в классическом анализе теорему Ролля. Например, многочлен

$$f_5(s)=(z-0{,}4)(z^2+1)(z^2+2z+2)=z^5+1{,}6z^4+2{,}2z^3+0{,}8z^2+1{,}2z-0{,}8$$

имеет производную $f'(z)=5z^4+6{,}4z^3+6{,}6z^2+1{,}6z+1{,}2$, корни которой $z_{1,\,2}\approx-0{,}6233\pm\pm 0{,}8132i$ и $z_{3,\,4}\approx-0{,}0167\pm0{,}4778i$ не попадают в полосу $\{z\,|\,0\le\mathrm{Re}z\le0{,}4\}$, задаваемую корнями $z=\pm i$ и $z=0{,}4$ самого многочлена $f(s)$.

Предложение 1. Если α-старший корень многочлена имеет кратность r, то значения градуировок самого многочлена и его производных совпадают:

$$\alpha(f)=\alpha(f')=\ldots=\alpha(f^{[r-1]}).$$

Доказательство. В силу теоремы Гаусса выпуклые оболочки корней следующих производных вложены в оболочки предыдущих. Но α-старший корень сохраняется для всех производных с 1-й до $(r-1)$-й. За счёт этого совпадают градуировочные области и значения градуировок производных и самого многочлена.

Следствие. Минимизация на многообразии r-кратных α-старших корней в пространстве параметров регулятора позволяет переходить от недифференцируемой градуировки исходного многочлена к гладкой градуировке его $(r-1)$-й производной.

Доказательство. Поскольку кратность корня с каждым дифференцированием снижается на единицу, вплоть до $(r-2)$-й производной многочлена для матрицы Якоби J^{-1}, у производного отображения координат кратных корней как функций коэффициентов сохраняется разрыв 2-го рода, который передаётся и α-градуировке как функции параметров регулятора. Для $(r-1)$-й производной α-старший корень оказывается простым, а функция её α-градуировки — гладкой. Отметим, что в силу теоремы о неявной функции координаты простых корней дифференцируемы как функции коэффициентов независимо от кратности прочих корней. В этом случае знаменатель формулы производной неявной функции $(\partial z_k/\partial a_l = -z_k^l/f'[z_k])$ заведомо отличен от нуля.

Можно указать практически значимое условие U-образного экстремума на «дне ущелья» с Y-образным поперечным сечением.

Предложение 2. При минимизации градуировки на многообразии r-кратных α-старших корней многочлена необходимым признаком экстремума является ортогональность градиента $(r-1)$-й производной и касательного подпространства многообразия.

Направление дна оврага и донный градиент R-градуировки. Если при некотором значении вектора параметров характеристический многочлен имеет кратные корни и в окрестности этой точки пространства параметров кратность корней не увеличивается, то матрица Якоби $(\partial a_i/\partial z_j)$ позволяет находить касательное подпространство многообразия кратных корней. В пространстве коэффициентов касательное подпространство D_a имеет размерность не выше числа различных корней, поскольку столбцы матрицы, соответствующие кратным корням многочлена, одинаковы[4]. Подпространство D_a порождается как линейная оболочка столбцов $\partial a/\partial z_j$ матрицы Якоби (суммирование ведётся по различным корням, коэффициентами служат приращения Δz_j, $1 \le j \le n$):

$$D_a = \sum_j \partial a/\partial z_j \Delta z_j.$$

Далее рассмотрим производное отображение $(\partial a_i/\partial p_k)$ зависимости коэффициентов характеристического многочлена $f_n(s) = s^n + a_{n-1}(p)s^{n-1} + \ldots + a_1(p)s + a_0(p)$ от вектора p параметров регулятора (в одноканальном случае такая зависимость линейная, а матрица $(\partial a_i/\partial p_k)$ числовая). Касательное подпространство к многообразию, задаваемому в пространстве коэффициентов зависимостью $a(p)$, представляется полным дифференциалом

$$da(p) = \sum_k \partial a/\partial p_k \Delta p_k.$$

Чтобы найти касательное подпространство D_p к многообразию кратных корней в пространстве параметров, достаточно решить (относительно Δp_k) систему, описывающую пересечение подпространств $D_a \cap da(p)$:

$$\sum_k \partial a/\partial p_k \Delta p_k = \sum_j \partial a/\partial z_j \Delta z_j,$$

или в более привычной форме:

$$((\partial a/\partial p) \,|\, (\partial a/\partial z)) \begin{pmatrix} \Delta p \\ -\Delta z \end{pmatrix} = 0.$$

[4]В [11] доказано, что ранг матрицы Якоби равен числу различных корней.

Взяв координаты фундаментального решения, соответствующие параметрам p, получим порождающие подпространства D_p, а проекция вектора $\nabla\alpha(f^{[r-1]})$ на это подпространство и задаёт искомый «донный градиент» корневой $\mathbf{R}$-градуировки.

Заключение. Принимая в качестве численной характеристики расположения полюсов системы автоматического управления $\mathbf{R}$-градуировку, зависящую от наименее устойчивых корней характеристического многочлена, можно свести задачу синтеза системы к минимизации этой величины. Наибольшие трудности здесь создаёт возникающая на многообразиях кратных корней недифференцируемость, которая приводит к овражному рельефу и стабилизации градиентного спуска на «дне ущелий». Пользуясь особенностями построения $\mathbf{R}$-градуировки и теоремой Гаусса, для выпуклого градуировочного семейства удаётся доказать равенство недифференцируемой градуировки корней многочлена и гладкой градуировки корней его производной. Это обеспечивает возможность нахождения «донного градиента» целевой функции и эффективного применения градиентных алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Chen C.-T.** Linear system theory and design. N. Y.: Holt, Rinehart and Winstone, 1984. 682 p.
2. **Поляк Б. Т., Щербаков П. С.** Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к их решению // АиТ. 2005. № 5. С. 7–46.
3. **Воевода А. А., Чехонадских А. В.** Множественность экстремумов при оптимизации системы характеристических корней системы АУ// Науч. вестн. НГТУ. 2008. № 2(31). С. 197–200.
4. **Чехонадских А. В.** Метрика, градуировка и оптимизация расположения характеристических корней системы автоматического управления // Науч. вестн. НГТУ. 2009. № 1(34). С. 165–182.
5. **Воевода А. А., Чехонадских А. В.** Оптимизация расположения полюсов системы автоматического управления с регулятором пониженного порядка // Автометрия. 2009. **45**, № 5. С. 113–123.
6. **Gauss C. F.** Opera omnia. Gottingen, 1886. Vol. 3. P. 112.
7. **Ван дер Варден Б. Л.** Алгебра. М.: Наука, 1975. 648 с.
8. **Чехонадских А. В.** О ступенчато-дифференциальной оптимизации корней характеристического многочлена САУ // Науч. вестн. НГТУ. 2008. № 4(33). С. 205–208.
9. **Воевода А. А., Мелешкин А. И.** Синтез регуляторов пониженного порядка // Науч. вестн. НГТУ. 1997. № 3. С. 41–58.
10. **Воевода А. А., Пономарёв К. Н., Чехонадских А. В.** Об устойчивости производной устойчивого многочлена // Науч. вестн. НГТУ. 1998. № 1(4). С. 185–186.
11. **Chekhonadskih A. V., Voevoda A. A.** On Jacoby matrix rang of polynomial coefficients-roots correspondence // Algebra and Model Theory 5. Novosibirsk: Novos. State Techn. Univ., 2005. P. 275–280.

Поступила в редакцию 31 мая 2010 г.