УДК 517.95 : 519.24

МЕТОДИКА ПАССИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С УЧЁТОМ ОШИБОК ОЦЕНОК СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА И ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

А. Ж. Абденов, Г. А. Абденова

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,
010008, Республика Казахстан, г. Астана, ул. К. Сатпаева, 2
E-mail: amirlan21@gmail.com

Рассматривается задача пассивной идентификации коэффициентов уравнения теплопроводности с учётом шумов поведения модели динамики объекта и шумов модели измерительной системы. Использование метода конечных разностей позволило свести решение уравнений с частными производными к решению системы линейных конечно-разностных и алгебраических уравнений, описанных моделями в форме пространства состояний. Представление уравнения теплопроводности в форме такой модели даёт возможность применять алгоритм фильтра Калмана для достоверного оценивания поведения исследуемого объекта.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, модель в пространстве состояний, метод конечных разностей, пассивная идентификация коэффициентов, фильтр Калмана, вейвлет-преобразование.

DOI: 10.15372/AUT20160205

Введение. Разнообразие предлагаемых методов и алгоритмов идентификации систем с распределёнными параметрами в значительной степени определяется типом задаваемых априори уравнений в частных производных или частных разностях, которые моделируют идентифицируемый процесс (зависимость значений состояния объекта, например стержня, от двух независимых аргументов: фиксированных значений координат и фиксированных значений времени). Некоторая унификация при решении задачи идентификации коэффициентов уравнения теплопроводности [1] может быть достигнута, если исходное уравнение параболического типа представить моделями в форме пространства состояний с учётом шумов динамики исследуемого объекта и шумов измерительной системы [2, 3]:

$$X(t+1) = \Phi X(t) + B\upsilon(t) + \Gamma\omega(t); \quad X(1) = \bar{X}_1, \tag{1}$$

$$Y(t+1) = X(t+1) + \nu(t+1), \quad t = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $X(t)$ — n-вектор состояния исследуемого объекта; $\upsilon(t)$ — $(n+2)$-вектор входного управляющего сигнала; $\omega(t)$, $\nu(t)$ — одномерные белые гауссовские последовательности шумов динамической и измерительной систем с нулевыми математическими ожиданиями и неизвестными дисперсиями Q и R соответственно; $X(1)$ — n-вектор начального состояния с математическим ожиданием $\bar{X}_1$ и неизвестной дисперсией $P(1)$; Φ, B, Γ — переходные матрицы состояния, управления и шумов динамической системы размерами $n \times n$, $(n+2) \times n$, $n \times n$ соответственно; $Y(t)$ — n-вектор значений измерений состояния объекта; t — временной параметр.

В этом случае применение изученных и хорошо зарекомендовавших себя методов пассивной идентификации (в отличие от задач активной идентификации [4]) коэффициентов уравнения теплопроводности, описывающих динамику развития состояния объекта стохастическими обыкновенными дифференциальными или разностными уравнениями в форме пространства состояний, может оказаться предпочтительным и для систем с распределёнными параметрами [3–5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу теплопроводности для однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью и тепловым источником вида [1]

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} + bu(x,t) + p_1\mu(x,t), \tag{3}$$

где a, b, p_1 — постоянные коэффициенты; x — пространственная ограниченная заданная длина стержня ($0 \leq x \leq L$); t — время ($t \geq 0$); $u(x,t)$ — входное управляющее воздействие распределённого типа, которое удовлетворяет заданным амплитудным температурным ограничениям $u_{\min} \leq u(x,t) \leq u_{\max}$, $u_{\min} = \text{const}$, $u_{\max} = \text{const}$; $\mu(x,t)$ — белое гауссовское воздействие на динамику системы (зависящее от координаты x и времени t) с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией равной единице; аддитивное шумовое слагаемое $p_1\mu(x,t)$ имеет нулевое математическое ожидание и неизвестную дисперсию $\tilde{Q}$ (для непрерывной функции состояния); $q(x,t)$ — температура стержня в зависимости от координаты x и времени t с граничными условиями

$$q(x,t)\Big|_{x=0} = \tilde{q}_0, \tag{4а}$$

$$q(x,t)\Big|_{x=L} = \tilde{q}_L \tag{4б}$$

и начальным условием

$$q(x,t)\Big|_{t=1} = f(x). \tag{5}$$

Предположим, что ведётся измерение температуры в фиксированных точках x_k стержня в фиксированные моменты времени t_s, которое можно записать в виде

$$z(x_k,t_s) = q(x_k,t_s) + p_2\varepsilon(x_k,t_s), \quad k = \overline{1,n}, \;\; s = \overline{1,m}. \tag{6}$$

Здесь $z(x_k,t_s)$ — выход измерительной системы, где индексы k и s означают, что пространственно-временна́я функция состояния $q(x,t)$ может находиться в дискретных по длине стержня точках x_k и в дискретные моменты времени t_s, т. е. $\{q(x,t) \approx q(x_k,t_s) = q_{k,s}$, $k = \overline{1,n}$, $s = \overline{1,m}\}$; $\{\varepsilon(x_k,t_s) = \varepsilon_{k,s}$, $k = \overline{1,n}$, $s = \overline{1,m}\}$ — белый гауссовский шум измерительной системы распределённого типа с нулевым математическим ожиданием и дисперсией равной единице; шумовое слагаемое $p_2\varepsilon(x_k,t_s)$ имеет нулевое математическое ожидание и неизвестную дисперсию R.

При этих условиях ставится задача пассивной идентификации коэффициентов a, b, p_1 и неизвестных дисперсий Q, R, $P(1)$ (для дискретного описания состояния объекта) на основе дискретного распределённого входного сигнала $\{u(x_k,t_s) = u_{k,s}$, $k = \overline{1,n}$, $s = \overline{1,m}\}$, краевых (4а), (4б) и начального (5) условий, а также дискретного распределённого выхода измерительной системы $\{z(x_k,t_s)$, $k = \overline{1,n}$, $s = \overline{1,m}\}$.

2. Методика решения задачи пассивной идентификации. Алгоритм решения задачи пассивной параметрической идентификации коэффициентов уравнения (3) реализуется на компьютере с использованием дискретного аналога уравнения в частных производных.

Для упрощения последующих преобразований выберем интервалы квантования для x и t равными $\Delta x = 1$ и $\Delta t = 1$ соответственно. Запишем соотношения в частных разностях

$$\frac{1}{\Delta t}(q_{k,\,s+1} - q_{k,\,s}) = \frac{a}{\Delta x^2}(q_{k+1,\,s} - 2q_{k,\,s} + q_{k-1,\,s}) + bu_{k,\,s} + p_1\mu_{k,\,s}, \quad k = \overline{1,n}, \;\; s = \overline{1,m}.$$

Проведём группировки дискретных значений функций $q(x,t)$ по величинам координат (k,s) узлов сетки и, учитывая значения интервалов $\Delta t = 1$ и $\Delta x = 1$, получим соотношение, в котором коэффициент при $q_{k,\,s}$ в правой части обозначим через $d = 1 - 2a$. Для (3) зададим соотношение

$$q_{k,\,s+1} = aq_{k-1,\,s} + dq_{k,\,s} + aq_{k+1,\,s} + bu_{k,\,s} + p_1\mu_{k,\,s}, \quad k = \overline{1,n}, \;\; s = \overline{1,m}. \tag{7}$$

Предположим, что $p_1\mu_{k,\,s}$ — белая гауссовская распределённая последовательность с нулевыми средними и конечными постоянными неизвестными дисперсиями $Q = p_1$.

Приведём уравнение (7) с некоторыми граничными и начальными условиями к стандартному виду модели в форме пространства состояний. Запишем систему уравнений, получаемых из (7), для $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{cases} q_{1,\,s+1} = aq_{0,\,s} + dq_{1,\,s} + aq_{2,\,s} + bu_{1,\,s} + p_1\mu_{1,\,s} & (k=1), \\ q_{2,\,s+1} = aq_{1,\,s} + dq_{2,\,s} + aq_{3,\,s} + bu_{2,\,s} + p_1\mu_{2,\,s} & (k=2), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \\ q_{n-1,\,s+1} = aq_{n-2,\,s} + dq_{n-1,\,s} + aq_{n,\,s} + bu_{n-1,\,s} + p_1\mu_{n-1,\,s} & (k=n-1), \\ q_{n,\,s+1} = aq_{n-1,\,s} + dq_{n,\,s} + aq_{n+1,\,s} + bu_{n,\,s} + p_1\mu_{n,s} & (k=n). \end{cases} \tag{8}$$

Введём обозначения:

$$X_{s+1} \triangleq \begin{pmatrix} q_{1,\,s+1} \\ q_{2,\,s+1} \\ \vdots \\ q_{n,\,s+1} \end{pmatrix}_{n\times 1}; \quad X_s \triangleq \begin{pmatrix} q_{1,\,s} \\ q_{2,s} \\ \vdots \\ q_{n,\,s} \end{pmatrix}_{n\times 1}; \quad U_s \triangleq \begin{pmatrix} u_{1,\,s} \\ u_{2,\,s} \\ \vdots \\ u_{n,\,s} \end{pmatrix}_{n\times 1};$$
$$\mu_s \triangleq \begin{pmatrix} \mu_{1,\,s} \\ \mu_{2,\,s} \\ \vdots \\ \mu_{n,\,s} \end{pmatrix}_{n\times 1}; \quad e_1 \triangleq \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}; \quad e_2 \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a \end{pmatrix}_{n\times 1}. \tag{9}$$

Для граничных условий (4а) и (4б) отдельно запишем выражения

$$\theta_s = q_{1,\,s}; \qquad \eta_s = q_{n+1,\,s}. \tag{10}$$

Для того чтобы (8) представить в векторно-матричном виде, введём следующие обозначения:

$$M \overset{\Delta}{=} \begin{pmatrix} d & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & d & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & d & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & d \end{pmatrix}_{n \times n}, \tag{11}$$

$$\bar{G} \overset{\Delta}{=} bE, \tag{12}$$

$$D \overset{\Delta}{=} p_1 E, \tag{13}$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$; $\bar{G}$ и D — диагональные матрицы размера $n \times n$. Далее с учётом обозначений (9)–(13) соотношение (8) запишем в векторно-матричном виде:

$$X_{s+1} = MX_s + \bar{G}U_s + D\mu_s + (e_1\theta_s + e_2\eta_s). \tag{14}$$

Форма представления моделей в пространстве состояний относительно выражения (14) требует введения дополнительных обозначений после некоторых преобразований. Пусть

$$\rho_s \overset{\Delta}{=} (e_1\theta_s | 0_{n \times n} | e_2\eta_s)_{n \times (n+2)} \tag{15}$$

или

$$\rho_s \overset{\Delta}{=} \begin{pmatrix} \theta_s & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \eta_s \end{pmatrix}_{n \times (n+2)}, \quad D \overset{\Delta}{=} \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & p_1 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

С учётом (15) запишем расширенную матрицу управления:

$$G = (e_1 \vdots \bar{G} \vdots e_2)_{n \times (n+2)}. \tag{16}$$

Теперь n-вектор управления U_s расширим на две компоненты, предварительно введя обозначение

$$u_s = (\theta \;\; U_s \;\; \eta)^T_{(n+2) \times 1}, \tag{17}$$

где T — операция транспонирования.

Окончательно выражение (14) запишем как

$$X_{s+1} = MX_s + Gu_s + D\mu_s. \tag{18}$$

Заметим, что по форме (18) совпадает с соотношением (1). При этом $(n+2)$-вектор-столбец $u_s = \upsilon(t)$ (временной параметр $s = t$) может принимать значения $s = \{1, 2, \ldots, m\}$, а начальные условия (5) будут иметь вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} q_{1,1} \\ q_{2,1} \\ \vdots \\ q_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ \vdots \\ f_{n,1} \end{pmatrix}_{n \times 1}. \tag{19}$$

Входные воздействия окончательно получат размерность вектора $(n+2) \times 1$ и для $s = \{1, 2, \ldots, m\}$ примут вид $u_s = (\theta_s \ u_{1,s} \ u_{2,s} \ \cdots \ u_{n,s} \ \eta_s)^T_{(n+2)\times 1}$, а ненаблюдаемые шумовые воздействия — $\mu_s = (\mu_{1,s} \ \mu_{2,s} \ \cdots \ \mu_{n,s})^T_{n \times 1}$.

После введённых обозначений матрица G преобразуется к структуре

$$G \triangleq \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}_{n \times (n+2)}.$$

Теперь примем обозначения для уравнения (6), которое описывает вход—выход измерительной системы:

$$\mathbf{y}_s = \begin{pmatrix} z_{1,s} \\ z_{2,s} \\ \vdots \\ z_{n,s} \end{pmatrix}_{n \times 1}, \quad \mathbf{X}_s = \begin{pmatrix} q_{1,s} \\ q_{2,s} \\ \vdots \\ q_{n,s} \end{pmatrix}_{n \times 1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,s} \\ \varepsilon_{2,s} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n,s} \end{pmatrix}_{n \times 1}, \quad s = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\mathbf{X}_1 = y_1. \tag{20}$$

Окончательно соотношение (6) можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{X}_s + \boldsymbol{\varepsilon}_s, \quad s = 1, 2, \ldots, m. \tag{21}$$

Выражения (18), (19), (21) обозначают редуцированную модель стохастической системы уравнения теплопроводности, описываемую моделями в виде пространства состояний для (3)–(6).

Система (18) содержит три неизвестных коэффициента (структура матрицы M имеет лишь один неизвестный коэффициент a, матрица G — два неизвестных коэффициента a, b, а матрица D — один неизвестный коэффициент p_1), которые требуется оценить.

3. Пример методики идентификации коэффициентов уравнения теплопроводности. Рассмотрим два предпоследних уравнения из соотношения (8) при определённых фиксированных значениях n и $s = 1, 2, \ldots, m$. Раскроем коэффициент d, сгруппируем дискретные температурные величины в этих соотношениях и получим два уравнения с тремя неизвестными коэффициентами a, b, p_1:

$$\begin{cases} q_{n-2,s+1} = aq_{n-3,s} + (1-2a)q_{n-2,s} + aq_{n-1,s} + bu_{n-1,s} + p_1\mu_{n-2,s}, \\ q_{n-1,s+1} = aq_{n-2,s} + (1-2a)q_{n-1,s} + aq_{n,s} + bu_{n,s} + p_1\mu_{n-1,s}. \end{cases} \tag{22}$$

Слагаемое с p_1 есть коэффициент при шумовой ненаблюдаемой переменной μ. При этом p_1 количественно характеризует дисперсию шумов поведения динамики исследуемого объекта при предположении, что μ — стандартная гауссовская последовательность с нулевым средним и дисперсией равной единице.

Заметим, что для использования уравнений фильтра Калмана [2] в целях получения наиболее достоверных фильтрационных оценок состояния $(q_{k,\,s})$ исследуемого объекта требуются знания значений коэффициентов уравнения теплопроводности, дисперсий шумов динамики, начального состояния, измерительной системы, а также самих результатов наблюдений за объектом.

Чтобы вычислить дисперсии, необходимые для уравнений фильтра Калмана, в данной работе предлагается использовать эвристический инженерный алгоритм приближённого расчёта всех дисперсий моделей динамики и измерительной системы на основе всей совокупности наблюдений $\{z_{k,\,s},\ k = \overline{1,n},\ s = \overline{1,m}\}$ [5, 6].

Для этого мы будем применять другую, отличную от исходной, упрощённую линейную дискретную модель в форме пространства состояний, которая при фиксированных $k = 1, 2, \ldots, n$ может соответствовать модели вида

$$x(t_{s+1}) = x(t_s) + w(t_s), \quad x(t_1) = x_1,$$
$$y(t_{s+1}) = x(t_{s+1}) + v(t_{s+1}), \quad s = \overline{1, m-1},$$

где $x(t_s)$ — истинное значение состояния исследуемого объекта от момента t_s до момента t_{s+1}, представляющего собой некоррелированную последовательность с нулевым средним и неизвестной дисперсией $p_1E[(\mu(t_s))^2] \approx \sigma_\mu^2 = Q$; $v(t_s)$ — случайная последовательность с неизвестными средним значением $E[\varepsilon(t_s)] = \rho$ и дисперсией $p_2E[(\varepsilon(t_s))^2] \approx \sigma_v^2 = R$. Зафиксируем значение k. Например, пусть $k = 1$, тогда для дальнейших расчётов будем использовать данные измерений, которые соответствуют этому значению индекса, а именно $\{\tilde{y}(t_s) = z_{1,\,s},\ k = 1,\ s = \overline{1,m}\}$.

Для оценивания среднего значения сформируем последовательность псевдоизмерений следующим образом:

$$w(t_s)^{(2)} = \tilde{y}(t_s) - \tilde{y}(t_{s-1}), \quad s = 2, 3, \ldots, m. \tag{23}$$

Верхний индекс при переменных означает количество измерений, используемых для формирования псевдоизмерений. Предположим, что ρ постоянно и позволяет записать соотношение

$$w(t_s)^{(2)} = \rho + \tilde{w}(t_s). \tag{24}$$

При этом оценка значения ρ в предположении о её постоянстве определяется рекуррентным выражением

$$\hat{\rho}(t_s \,|\, t_s) = \hat{\rho}(t_{s-1} \,|\, t_{s-1}) + \frac{1}{4(m+3)}\, abs(w(t_s)^{(2)} - \hat{\rho}(t_{s-1} \,|\, t_{s-1})), \quad s = \overline{2, m}, \tag{25}$$

с начальным условием $\hat{\rho}(t_1 \,|\, t_1) = 0$.

Можно рассмотреть выражение для невязки упрощённого фильтра по трём наблюдениям в виде

$$w(t_s)^{(3)} = \tilde{y}(t_s) - \frac{1}{2}\,\tilde{y}(t_{s-1}) - \frac{1}{2}\,\tilde{y}(t_{s-2}), \quad s = 3, 4, \ldots . \tag{26}$$

Средние значения невязок: $E[w(t_s)^{(2)}] = \rho$, $E[w(t_s)^{(3)}] = (3/2)\rho$. В [5] показано, что $E[(w(t_s)^{(3)} - (3/2)\rho)(w(t_s)^{(2)} - \hat{\rho})] = (1/2)\sigma_w^2$. Тогда последовательность измерений дисперсии σ_w^2 определяется следующим образом:

$$y(t_s)^{(w)} = 2\Big(w(t_s)^{(3)} - \frac{3}{2}\,\hat{\rho}(t_s\,|\,t_s)\Big)\Big(w(t_s)^{(2)} - \frac{1}{2}\,\hat{\rho}(t_s\,|\,t_s)\Big), \quad s = 3, 4, \ldots, m, \tag{27}$$

а оценка постоянной дисперсии σ_w^2 рассчитывается по формуле

$$\hat{\sigma}_w^2(t_s\,|\,t_s) = \hat{\sigma}_w^2(t_{s-1}\,|\,t_{s-1}) + \frac{1}{3m}\,(y(t_s)^{(w)} - \hat{\sigma}_w^2(t_{s-1})\,|\,t_{s-1})), \quad s = \overline{3, m}, \tag{28}$$

с начальным условием $\hat{\sigma}_w^2(t_2\,|\,t_2) = 0$. Последний элемент расчёта в рекуррентном соотношении (28) даёт приближённую оценку дисперсии поведения динамики объекта, т. е. $p_1 \approx \hat{\sigma}_w^2(t_m\,|\,t_m) = Q$. В [5] также показано, что $E[(w(t_s)^{(2)} - \hat{\rho})^2] = 2\sigma^2 + \sigma_w^2 = 2R + Q$. Поэтому выражение

$$y(t_s)^{(v)} = \frac{1}{2}\,[(w(t_s)^{(2)} - \hat{q}(t_s\,|\,t_s))^2 - \hat{\sigma}_w^2(t_s\,|\,t_s)], \quad s = 2, 3, \ldots, m, \tag{29}$$

может рассматриваться как последовательность измерений дисперсии $\sigma^2 = R$, оценка которой при принятом предположении о её постоянстве рассчитывается по рекуррентной формуле

$$\hat{\sigma}^2(t_s\,|\,t_s) = \hat{\sigma}^2(t_{s-1}\,|\,t_{s-1}) + \frac{1}{m}\,abs(y(t_s)^{(v)} - \hat{\sigma}^2(t_{s-1}\,|\,t_{s-1})), \quad s = \overline{2, m}, \tag{30}$$

с начальным условием $\hat{\sigma}^2(t_1\,|\,t_1) = 0$. Последний элемент расчёта в (30) даёт приближённую оценку дисперсии измерительной системы, т. е. $p_2 \approx \hat{\sigma}^2(t_m\,|\,t_m) = R$.

Теперь остаётся оценить дисперсии помех начального состояния $P(t_1)$. За дисперсию шума начального состояния возьмём оценку дисперсии шумов динамики объекта, т. е. $P(t_1) = P(t_1\,|\,t_1) \approx Q$.

При этом описанный выше инженерный алгоритм можно применять для каждого $k = \overline{1, n}$ из $\{\tilde{y}_k(t_s) = z_{k,s},\ k = \overline{1, n},\ s = \overline{1, m}\}$ и найденные оценки дисперсий $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$ усреднять, что позволит получить наиболее достоверные дисперсии, в частности, для неизвестных коэффициентов $p_1 \approx Q$, $P(1) \approx Q$ и $p_2 \approx R$. Вычисленные дисперсии можно использовать при решении задачи оценивания состояния исследуемого объекта на основе уравнений фильтра Калмана, чтобы получить наиболее достоверные фильтрационные температурные оценки поведения состояния исследуемого объекта [1, 2, 5].

На основе вейвлет-преобразований [7] решается задача очищения всех данных измерений от шума, что позволяет осуществлять приближённый расчёт значений оценок коэффициентов a_1, b_1. Если рассматривать (22) как систему двух уравнений с двумя неизвестными, то на их основе можно получить $(n-1)$ пар оценок $\hat{a}, \hat{b}$, которые при $s = \overline{1, m-1}$ рассчитываются из следующих соотношений:

$$\hat{a} = \frac{\dfrac{q_{n-1,\,s+1} - q_{n-1,\,s}}{u_{n,\,s}} - \dfrac{q_{n-2,\,s+1} - q_{n-2,\,s}}{u_{n-1,\,s}}}{\dfrac{q_{n-2,\,s} - 2q_{n-1,\,s} + q_{n,\,s}}{u_{n,\,s}} - \dfrac{q_{n-3,\,s} - 2q_{n-2,\,s} + q_{n-1,\,s}}{u_{n-1,\,s}}}, \tag{31}$$

$$\hat{b} = \frac{q_{n-2,\,s+1} - q_{n-2,\,s}}{u_{n-1,\,s}} - \hat{a}\Big(\frac{q_{n-3,\,s} - 2q_{n-2,\,s} + q_{n-1,\,s}}{u_{n-1,\,s}}\Big). \tag{32}$$

k	s							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	21,8629	22,4916	23,6851	24,8308	25,7877	26,2314	26,6846	27,1282
2	26,4812	27,5005	28,0822	28,6745	29,4714	29,9521	30,3082	30,7682
3	30,8254	31,6230	32,3004	32,7901	33,6183	33,8723	34,2014	34,6882
4	34,6827	35,8499	36,8759	37,7283	38,2038	38,5674	38,6735	39,3039
5	42,6265	42,1634	42,1808	42,2573	42,5021	42,2745	42,7410	43,0953

Из полученных $(n-1)$ пар оценок можно вычислить усреднённую, наиболее достоверную, пару $\bar{a}_1, \bar{b}_1$.

4. Алгоритм численной апробации методики решения задачи идентификации.

Пример. 1. Промоделируем температурные значения при следующих исходных данных стержня: $a = 0{,}2$, $b = 0{,}5$, $n = 5$, $m = 8$, $s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ с теплоизолированной боковой поверхностью и тепловым источником $u = \{q(1,1); 1; 1; 1; 1; 1; q(1,5)\}$, с заданными краевыми $q(1,1) = 21$, $q(1,5) = 42$ и начальными $X_1 = \{21\ 26\ 30\ 34\ 42\}$ условиями, а также известными значениями дисперсий $p_1 = Q = 0{,}05$, $P(1) = Q$, $p_2 = R = 0{,}07$. Расчёты для примера проводились с помощью математической системы MATLAB.

Далее решаем задачу идентификации коэффициентов уравнения теплопроводности при заданных входных и выходных значениях распределённого типа, а также краевых и начальных условиях. Расчёты с помощью соотношений (31) и (32) дали следующие коэффициенты уравнения теплопроводности: $\hat{a}_1 = 0{,}0978$, $\hat{b}_1 = 0{,}6033$.

Смоделированные значения температур однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью и тепловым источником $u = \{q(1,1); 1; 1; 1; 1; 1; q(1,5)\}$, с заданными измеренными (с учётом шумов измерений) краевыми $q(1,1) = 21{,}8629$, $q(1,5) = 42{,}6265$ и начальными $X_1 = \{21{,}8629\ 26{,}4812\ 30{,}8254\ 34{,}6827\ 42{,}6265\}$ условиями соответственно сведены в таблицу.

2. Пара оценок $\hat{a}$, $\hat{b}$ вместе с исходными входными данными была использована для моделирования выхода измерительной системы и позволила получить суммарное среднеквадратическое отклонение $ss = 3{,}1604$.

3. Чтобы повысить достоверность оценок поведения исследуемого объекта, решена задача определения состояния его поведения на основе уравнений фильтра Калмана [2, 5] с учётом шумов динамики ($\hat{p}_1 = Q \approx 0{,}032$, $P(1) = Q$) и шумов измерительной системы ($\hat{p}_2 = R \approx 0{,}074$), рассчитанных по алгоритму из разд. 3.

Затем с использованием фильтрационных оценок поведения объекта была решена обратная задача идентификации коэффициентов. Получена пара оценок $\breve{a} = 0{,}1149$ и $\breve{b} = 0{,}5701$, которая также применялась для моделирования выхода измерительной системы. Этот выход использовался для вычисления суммарного среднеквадратического отклонения $ss = 2{,}4578$.

Как видим, фильтрационные оценки состояния по схеме Калмана дали возможность получить лучшие оценки коэффициентов и соответственно более достоверные оценки состояний поведения исследуемого объекта.

Заключение. В данной работе поставлена задача идентификации коэффициентов a, b, p_1 и оценивания неизвестных дисперсий Q, R, $P(1)$ для уравнения теплопроводности (3), что позволяет на основе уравнений фильтра Калмана рассчитать температуру стержня в любой точке ($x \in [0, L]$) и в любой момент времени ($t \geq 0$).

Предложенная методика решения задачи идентификации в достаточной степени проста и универсальна. Для уточнения значений коэффициентов уравнения теплопроводности, входящих в (3), имеются и другие возможности, к которым (кроме фильтрации шумов по Калману) можно отнести:

1) уменьшение шага сетки между соседними узлами;

2) применение для внутренних точек более точных формул аппроксимации вида $(\partial q/\partial x)_{k,\,s} \approx (q_{k+1,\,s} - q_{k-1,\,s})/2h$;

3) использование идей планирования динамического эксперимента [4], например можно улучшить точность оценок параметров с помощью повышения информативности выхода измерительной системы, для чего применяют различные подходы к управлению экспериментом [4] (планирование (синтез) входного управляющего сигнала [4, 8, 9], моментов измерений [4] и т. д.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Араманович И. Г., Левин В. И.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 287 с.
2. **Синицын И. Н.** Фильтры Калмана и Пугачева: Учеб. пособие. М.: Университетская книга, Логос, 2006. 640 с.
3. **Абденова Г. А.** Структурно-параметрическая идентификация систем с распределенными параметрами с использованием модели типа «вход—состояние—выход» // Науч. вестн. НГТУ. 2006. № 1(38). С. 9–16.
4. **Горский В. Г., Адлер Ю. П., Талалай А. М.** Планирование промышленных экспериментов. Модели динамики. М.: Металлургия, 1978. 112 с.
5. **Mehra R.** Identification and adaptive Kalman filtering // Mechanics. 1971. N 3. P. 34–52.
6. **Абденова Г. А.** Прогнозирование значений уровня временного ряда на основе уравнений фильтра Калмана // Ползуновский вестник. 2010. № 2. С. 4–6.
7. **Смоленцев Н. К.** Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2005. 304 с.
8. **Абденов А. Ж.** Повышение информативности измерений для стохастических динамических систем на основе оптимизации спектральной плотности входного сигнала // Автометрия. 1999. № 1. С. 77–93.
9. **Абденов А. Ж.** Планирование автокорреляционной функции входного сигнала для стохастических непрерывно-дискретных динамических систем // Автометрия. 2005. **41**, № 2. С. 81–97.

Поступила в редакцию 17 марта 2015 г.