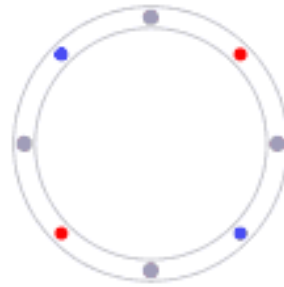


# К разработке модели ошибок гироскопов на волнах де Бройля



Н.И. Кробка, Н.В. Трибулев, Д.А. Туркин  
НИИ прикладной механики имени академика В.И. Кузнецова  
(филиал ФГУП «ЦЭНКИ», Москва)



**Всероссийская конференция «Физика ультрахолодных атомов»  
19-21 декабря 2016 года, Академгородок, Новосибирск,  
конференц-зал Института автоматизации и электрометрии СО РАН**

# МОТИВАЦИЯ ДОКЛАДА

## ОБЪЕКТИВНЫЙ АСПЕКТ

Поддержка команды российских физиков – разработчиков “нового поколения высокоточных компактных гироскопов на базе современных технологий лазерного охлаждения атомов и атомной интерферометрии” со стороны гироскопического и навигационного сообщества.

## СУБЪЕКТИВНЫЕ АСПЕКТЫ

1. «Передача эстафеты» – множество эффектов, инвариантных относительно типа гироскопов  
*(из личного опыта исследований особенностей построения бесплатформенных инерциальных систем ориентации и навигации на квантовых гироскопах на эффекте Саньяка двух предыдущих поколений – лазерных и волоконно-оптических)*
2. Забил в набат, – так участвуй!
3. Соскучился по физике, – так восстанавливай форму!



Кробка, Н. И. Генезис гироскопии на эффекте Саньяка / Н. И. Кробка // VII Международная научно-техническая конференция “Гиротехнологии, навигация, управление движением и конструирование авиационно-космической техники” (23-24 апреля 2009, НТУУ КПИ, Киев, Украина). – Киев: НТУУ «КПИ», 2009. – С. 26-35.

Кробка, Н. И. Квантовая микромеханика: гироскопы на волнах де Бройля и квантовых свойствах сверхтекучих жидкостей. Тенденции развития и состояние разработок / Н. И. Кробка // XVI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов (25-27 мая 2009 г., Санкт-Петербург, Россия) / Гл. ред. академик РАН В.Г. Пешехонов. – СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2009. – С. 124-137.

Кробка, Н. И. Гироскопия на эффекте Саньяка: Вчера, сегодня и завтра. Обзор состояния и тенденций развития / Н. И. Кробка // 2-я Международная научно-техническая конференция “Приборостроение - 2009”. – Минск: БНТУ, 2009. – С. 129-130.

# Группа X



Федеральное космическое агентство  
 Федеральное государственное унитарное предприятие  
 «ЦЕНТР ЭКСПЛУАТАЦИИ ОБЪЕКТОВ НАЗЕМНОЙ КОСМИЧЕСКОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ»  
 Научно-исследовательский институт прикладной механики  
 имени академика В. И. Кузнецова  
 Научно-образовательный центр по системному ориентации, навигации и стабилизации  
 высокоточных летательных аппаратов

УДК 531.383-11:681.7  
 Гос. регистрация № 01200964182  
 Изв. № КИИД.Э001.3664

УТВЕРЖДАЮ  
 Генеральный директор  
 ФГУП «Центр эксплуатации объектов  
 наземной космической инфраструктуры»  
 А.С. Фадеев  
 2012 г.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ОТЧЕТ  
 О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ  
 по Государственному контракту № 02.740.11.0528, от 15 марта 2010 г.  
 (с учетом дополнительного соглашения от 15 марта 2010г. № 1)

Исследование возможностей и путей создания принципиально новых типов  
 высокоточных гироскопов на обобщенном эффекте Саянжа  
 (на волнах де Бройля, Бозе-Эйнштейна конденсата и сверхтекучести гелия)  
 в микромеханических гироскопах повышенной точности  
 с разнесенными частотами возбуждения и съема для управления движением  
 космическими системами

Шифр заявки «2010-1.1-411-009-019»  
 КИИД.Э001.3664 Книга 1 (в 7-и томах)  
 Том 7

Директор – Главный конструктор  
 Фиднала ФГУП «ЦЭНИК»  
 «ИИИ прикладной механики  
 имени академика В.И. Кузнецова»

А. А. Вольтнец  
 «27» сентября 2012 г.

Научный руководитель работ  
 Главный научный консультант,  
 доктор технических наук, профессор

Н. Н. Саложников  
 «02» сентября 2012 г.

Руководитель темы  
 Главный научный сотрудник,  
 кандидат физико-математических наук

Н. И. Кробва  
 «02» сентября 2012 г.

Москва 2012



Федеральное космическое агентство  
 Федеральное государственное унитарное предприятие  
 «ЦЕНТР ЭКСПЛУАТАЦИИ ОБЪЕКТОВ НАЗЕМНОЙ КОСМИЧЕСКОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ»  
 Научно-исследовательский институт прикладной механики  
 имени академика В. И. Кузнецова

УТВЕРЖДАЮ  
 Генеральный директор  
 ФГУП «Центр эксплуатации объектов  
 наземной космической инфраструктуры»  
 А.С. Фадеев  
 2012 г.

ИИИ ОТЧЕТ  
 ЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ  
 №01.0528, от 15 марта 2010 г.  
 (с учетом дополнительного соглашения от 15 марта 2010г. № 1)  
 о исследовании возможностей и путей создания принципиально новых типов  
 высокоточных гироскопов на обобщенном эффекте Саянжа  
 (на волнах де Бройля, Бозе-Эйнштейна конденсата и сверхтекучести гелия)  
 в микромеханических гироскопах повышенной точности  
 с разнесенными частотами возбуждения и съема для управления движением  
 космическими системами

Шифр заявки «2010-1.1-411-009-019»  
 КИИД.Э001.3664 Книга 1 (в 7-и томах)  
 Том 7

Директор – Главный конструктор  
 Фиднала ФГУП «ЦЭНИК»  
 «ИИИ прикладной механики  
 имени академика В.И. Кузнецова»

Научный руководитель работ  
 Главный научный консультант,  
 доктор технических наук, профессор

Руководитель темы  
 Главный научный сотрудник,  
 кандидат физико-математических наук

Москва 2012

А. А. Вольтнец  
 «27» сентября 2012 г.

Н. Н. Саложников  
 «02» сентября 2012 г.

Н. И. Кробва  
 «02» сентября 2012 г.

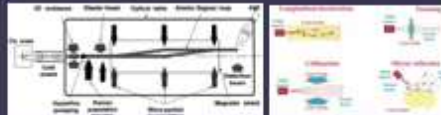
**Опτικο-физическая схема ЛГ,  
отрабатывавшаяся в НИИ ПМ имени академика В.И. Кузнецова в 1985-1995 гг.**

Разряд постоянного тока		Высокочастотный разряд			
Внешние электроды		Внутренние электроды			
$^{20}\text{Ne}$	$^{22}\text{Ne}$	$^{20}\text{Ne}: ^{22}\text{Ne}=1:1$			
$^4\text{He}$		$^4\text{He}: ^3\text{He}=X$			
Моноблочная конструкция резонатора		Модульная конструкция резонатора			
Зеркала резонатора		Призмы полного отражения резонатора			
3-х-отражательный резонатор ЛГ (треугольная конфигурация резонатора)		4-х-отражательный резонатор ЛГ (четырёхугольная конфигурация резонатора)			
Плоский оптический контур резонатора ЛГ		Неплоский оптический контур резонатора ЛГ			
1 сферическое зеркало резонатора ЛГ	2 сферических зеркала резонатора ЛГ	3 сферических зеркала резонатора ЛГ			
Длина волны излучения ЛГ $\lambda = 0,63$ мкм	Длина волны излучения ЛГ $\lambda = 1,19$ мкм	Длина волны излучения ЛГ $\lambda = 3,39$ мкм			
Одномодовый (2-х-частотный) ЛГ		Двухмодовый (4-х-частотный) ЛГ			
Линейная поляризация излучения ЛГ		Круговая поляризация излучения ЛГ			
Подвижные зеркала с пьезоприводом резонатора ЛГ		Пневматическая регулировка резонатора ЛГ			
Механическое вращение	ФНЭ на основе эффекта Фарадея	Эффект Зеемана	“Магнитные зеркала”		
Постоянная ЧП	Периодическая ЧП	Многочастотная ЧП	Шумовая ЧП	Комбинированная ЧП	Адаптивная ЧП
Однонаправленное вращение	Вибратор	РВО	РВО + вибратор		
Съем информации ЛГ в моменты времени $t_n: P(t_n) = 0$			Вычитание (в произвольный момент времени $t_n$ ) текущего значения $P(t_n) \neq 0$		

# Classification Tables and the Comparative Analysis of Optical-Physical Schemes of Gyroscopes on Cold Atoms

N.I. Krobka, A.I. Bidenko, N.V. Tribulev, V.S. Chemichenko  
 Branch of the Center for Ground-Based Space Infrastructure Facilities Operation  
 Scientific & Research Institute for Applied Mechanics named after academicians V. I. Kuznetsov,  
 Scientific & Production Union Company L.M.,  
 International Scientific Center of the Russian Academy of Sciences  
 Institute of Space and Astronautical Sciences, Moscow State Technical University named after Bauman,  
 55, Aviamotornaya st., Moscow, Russia

## Gyroscopes on the de Broglie waves



Type	Free-space	Chip-Based	Hybrid
Elements	Atoms		Microlens
Source	One	Two	Two
Temperature	Thermal	Cold	Ultracold (BEC) →
Initial state	In momentum space	In position space	In phase space (momentum + position)
Interferometer type	Near-field		Far-field
Influence	Time-domain		Space-domain
Observation	With the change of the internal state		Without the change of the internal state
Observation	In the momentum space		In the position space
Counting	With localization		Without localization

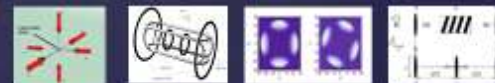


Fig. 1. a) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. b) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. c) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. d) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. e) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. f) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. g) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. h) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. i) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. j) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. k) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. l) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. m) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. n) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. o) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. p) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. q) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. r) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. s) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. t) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. u) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. v) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. w) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. x) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. y) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves. z) Schematic diagram of the gyroscope on de Broglie waves.

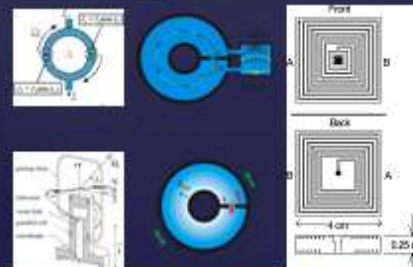
## Gyroscopes on the Bose-Einstein condensates



Atom Source	Active elements	Substrate	
		Evaporate	Other
Atom Source	Active elements	Li	Sr
		Mg	Ca
		K	Ba
		Ca	Fr
		Ra	Po
		Cr	Ag
		Cd	Hg
		Ni	Ga
		In	Hs
		Nb	Ar
		Co	Xe
		Dy	Er
		Tm	Yb
		Na	Rb
Cooling	Trap type	Laser type	
		Magnetic	Optical
	Evaporated cooling type	Magneto-optical	
		High-frequency radio impulses	Potential decrease
Working area	Interference	Other	One BEC
		Two BEC's	A considerable quantity
	Vortex superpositions in BEC		
	Density of atoms		
Detector	Reflection of coherently absorbed incident photons		



## Gyroscopes on the superfluidity of helium



Phys. Scheme	Torus shaped device		Helmholtz resonator
	Single turn	Multi turn	
Superfluid	<sup>4</sup> He		<sup>3</sup> He
Josephson oscillation	Strong link	Double Weak links	Weak link
Type of cooling	Dilution Refrigeration		
Soft membrane	Nuclear Demagnetization		Magnetic Refrigeration
	Superconducting film		Metalized Kapton
Aperture array	Molecules		Nickel foil
SOLID	Direct current		
Temperature regimes	Low T	High (near TA)	
Links	Phase slip oscillation	Synchronous oscillation	



# Classification Tables and the Comparative Analysis of Optical-Physical Schemes of Gyroscopes on Cold Atoms

N.I. Krobka, A.I. Bidenko, N.V. Tribulev, V.S. Chernichenko

Branch of the Center for Ground-Based Space Infrastructure Facilities Operation

“Scientific & Research Institute for Applied Mechanics named after academician V. I. Kuznetsov”,

Scientific & Production Epsilon Company Ltd.,

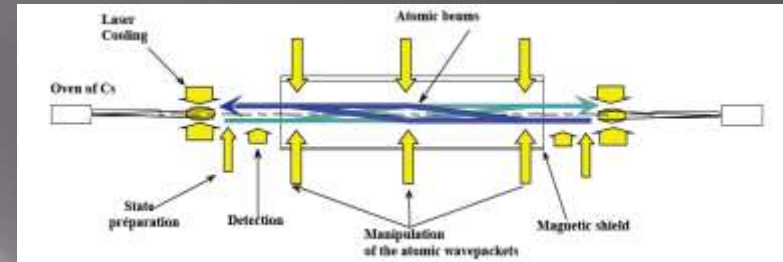
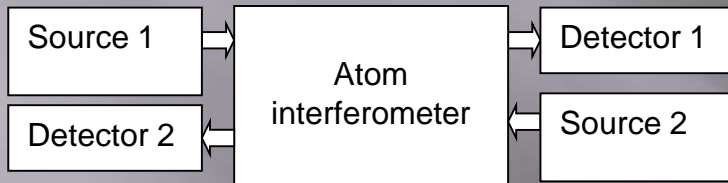
Instrument-making faculty of Moscow State Technical University named after Bauman,

55, Aviamotornaya str., Moscow, Russia

18th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS2011) 30 May – 01 June 2011, Saint Petersburg, Russia

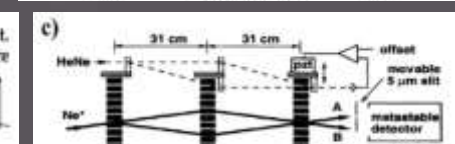
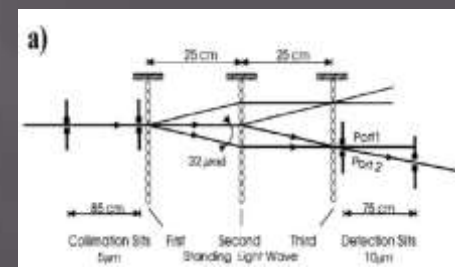
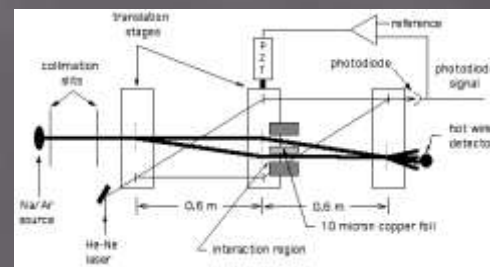
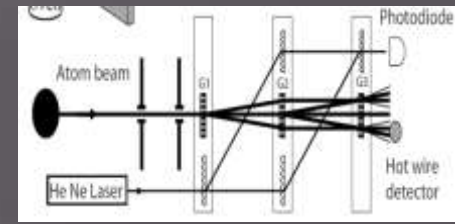
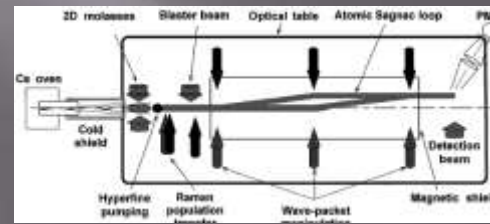


## Gyroscopes on the de Broglie waves

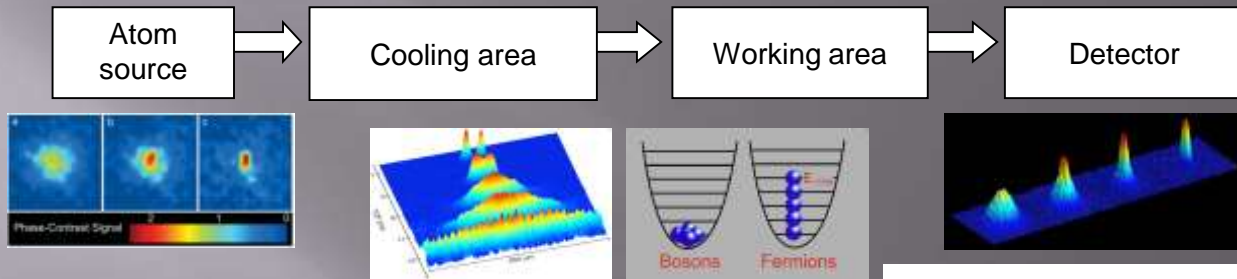


## Different atom interferometers

Type	Free-space	Chip-Based	Hybrid
Elements	Atoms		Molecules
Source	One		Two
Temperature	Thermal	Cold	Ultracold (BEC)
Initial state	In momentum space	In position space	In phase space (momentum + position)
Interferometer type	Near-field		Far-field
	Time-domain		Space-domain
Influence	With the change of the internal state		Without the change of the internal state
Observation	In the momentum space		In the position space
Counting	With ionization		Without ionization



# Gyroscopes on the Bose-Einstein condensate



Atom Source	Active elements	Fig. 1
	Atom source type	Substrate
		Evaporate
Other		
Cooling	Laser type	
	Trap type	Magnetic
		Optical
	Magneto-optical	
	Evaporated cooling type	High-frequency radio impulses
Potential decrease		
Other		
Working area	Interference	One BEC
		Two BEC's
		A considerable quantity
Vortex superpositions in BEC		
Detector	Density of atoms	
	Reflection of coherently absent-minded photons	

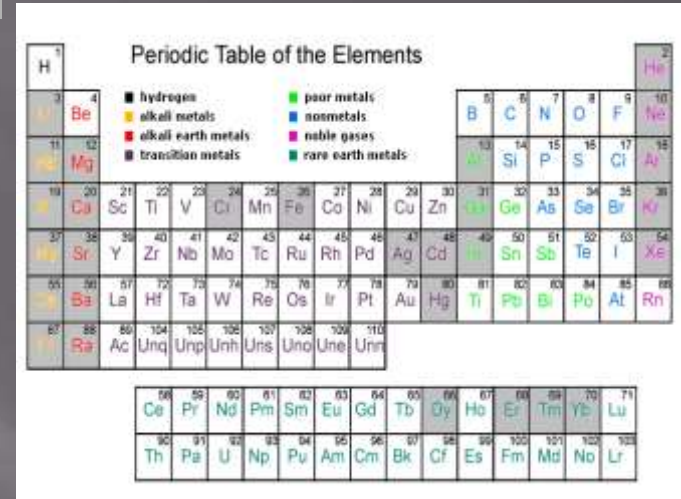
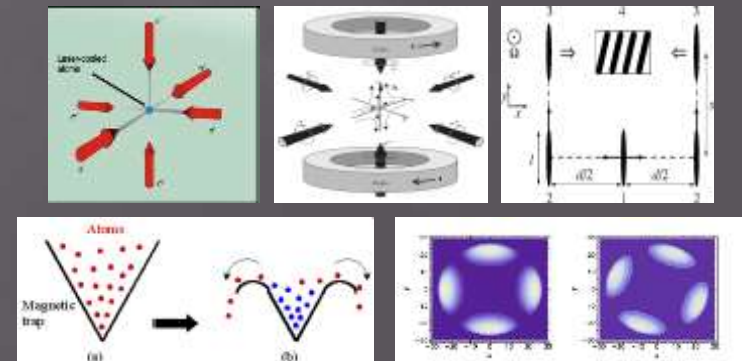


Figure 1. Active elements Technology



# Gyroscopes on the superfluid helium



Volume 1  
(Superfluid Helium)

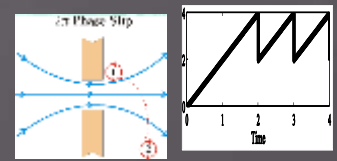
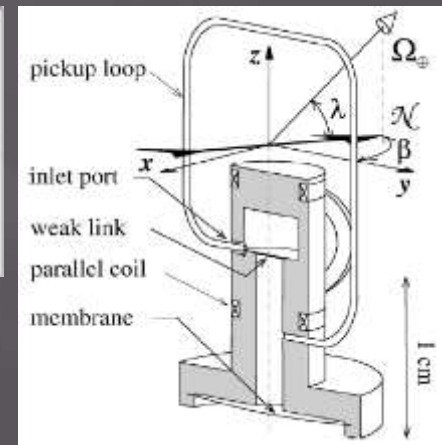
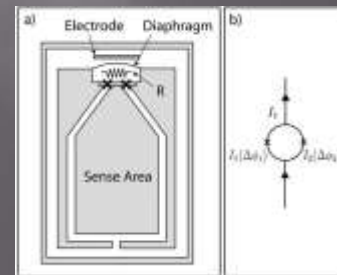
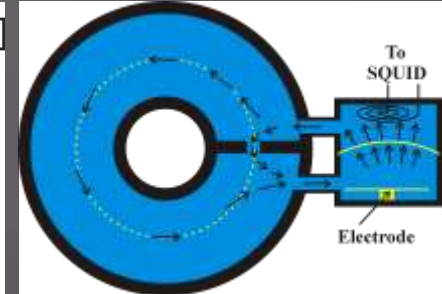
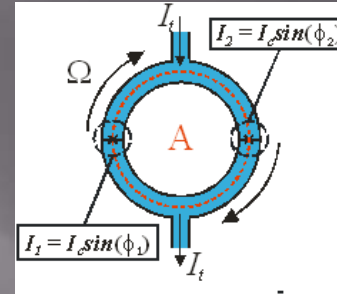
Volume 2  
(Superfluid Helium)



Data acquisition unit:  
Aperture  
Soft membrane  
SQUID



Phys. Scheme	Torus shaped dewar		Helmholtz resonator
	Single turn	Multiturn	
Superfluid	<sup>4</sup> He		<sup>3</sup> He
Josephson oscillation	Strong link	Double Weak links	Weak link
Type of cooling	Dilution Refrigeration		
	Nuclear Demagnetization		
	Magnetic Refrigeration		
Soft membrane	Superconducting film		Metallized Kapton
Aperture array	Multitude		Nickel foil
SQUID	Direct current		
Temperature regimes	Low T	High T (near T <sub>λ</sub> )	
Links	Phase slip oscillation	Sinusoidal oscillation	





# Dynamics of Patenting of Gyroscopes Based on de Broglie Waves,

## Bose-Einstein Condensates and Superfluid Helium

N.I. Krobka, A.I. Bidenko, N.V. Tribulev, V.S. Chernichenko

Branch of the Center for Ground-Based Space Infrastructure Facilities Operation

“Scientific & Research Institute for Applied Mechanics named after academician V. I. Kuznetsov”,

Scientific & Production Epsilon Company Ltd.,

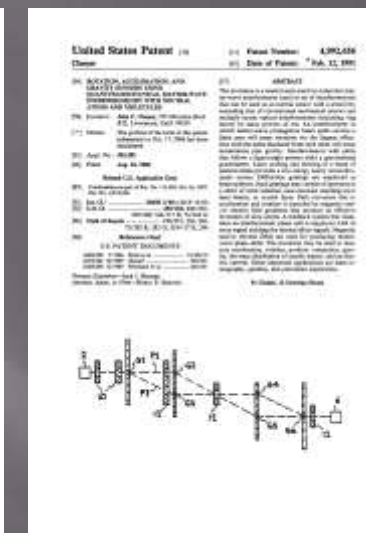
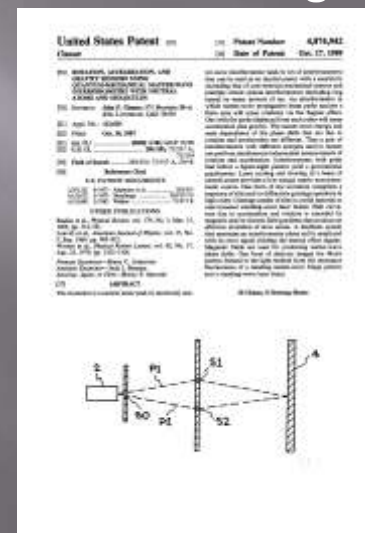
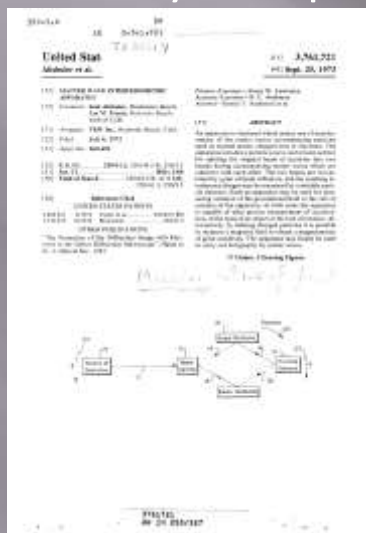
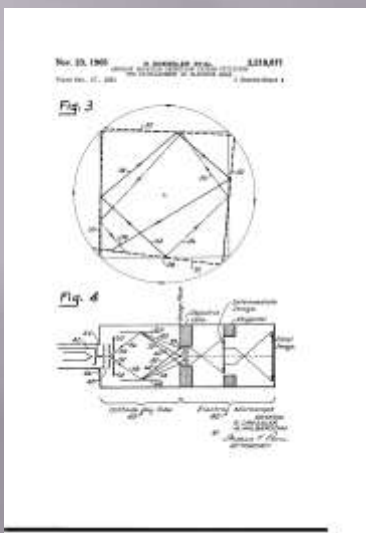
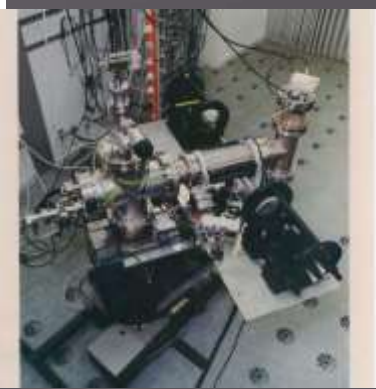
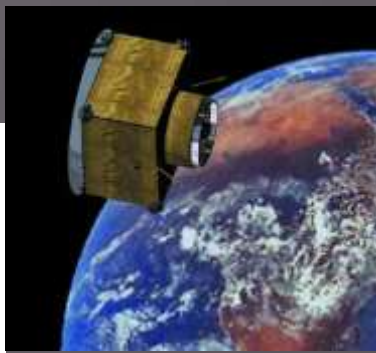
Instrument-making faculty of Moscow State Technical University named after Bauman,

55, Aviamotornaya str., Moscow, Russia

18th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems

(ICINS2011) 30 May – 01 June 2011, Saint Petersburg, Russia

### Gyroscopes on the de Broglie waves



### Patents

1965 – Measurements of rotation with the de Broglie waves of the electron

1973 – Apparatus for interferometry on matter-waves

1989 – Matter-wave interferometer

1991 – Matter-wave interferometer



[http://www.esa.int/esaSC/SEM056WO4HD\\_index\\_0\\_m.html](http://www.esa.int/esaSC/SEM056WO4HD_index_0_m.html)

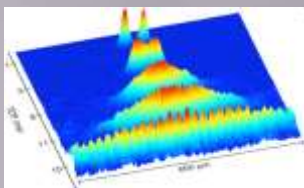
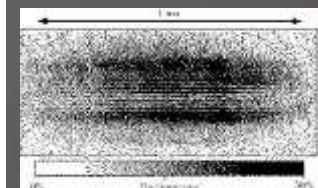
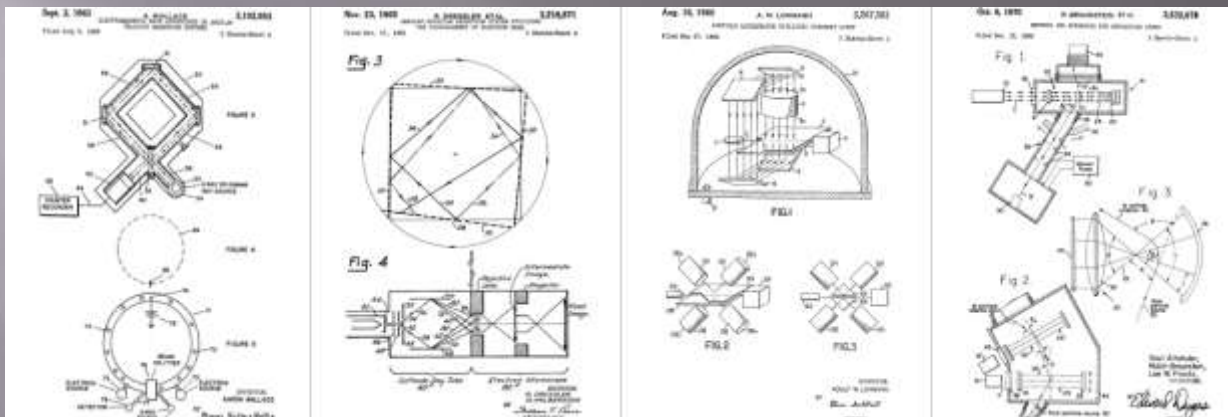
Bordé Ch. J. Spectroscopy and Atom Interferometry: from photons to molecules / Florence Physics Colloquium. – 2003.

Gustavson T.L., Landragin A., Kasevich M.A. Rotation sensing with a dual atom-interferometer Sagnac gyroscope // Class. Quantum Grav. – 2000. – Vol. 17. – Iss. 12. – Pp. 2385-2398.

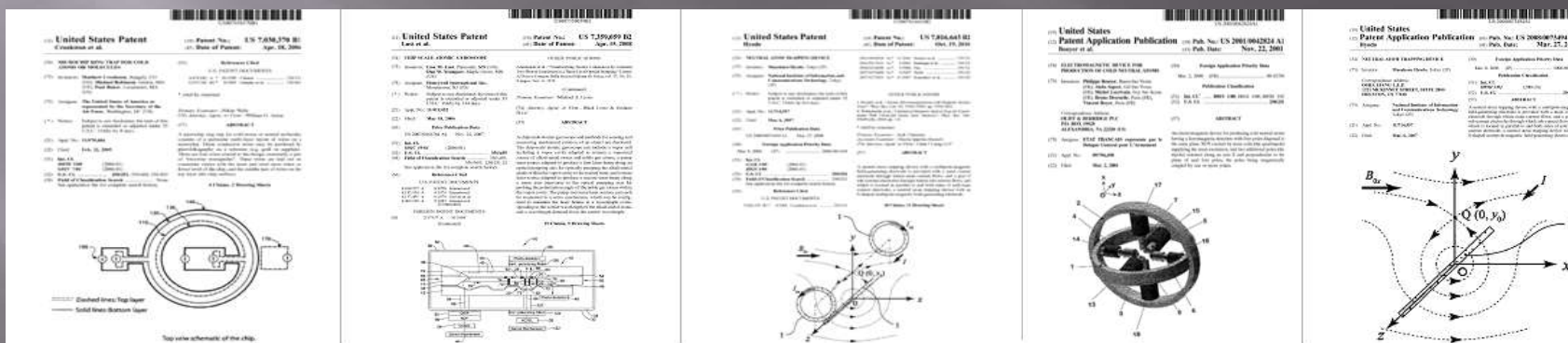
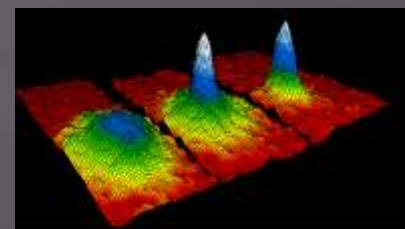
Gustavson T.L., Bouyer P., Kasevich M.A. Precision Rotation Measurements with an Atom Interferometer Gyroscope // Phys. Rev. Lett. – 1997.

# Gyroscopes on the Bose-Einstein condensate

## The First Patents

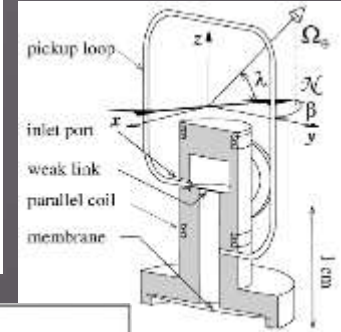
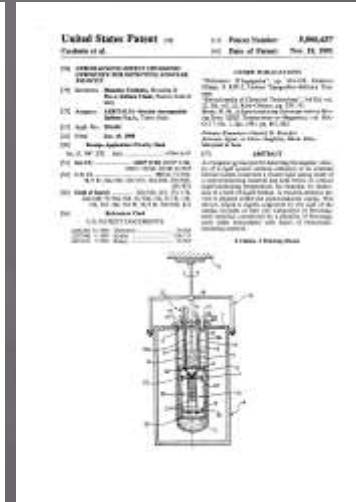
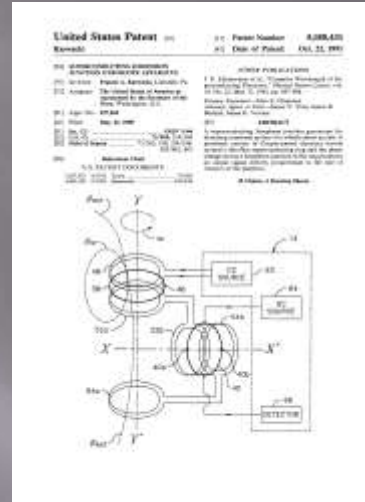
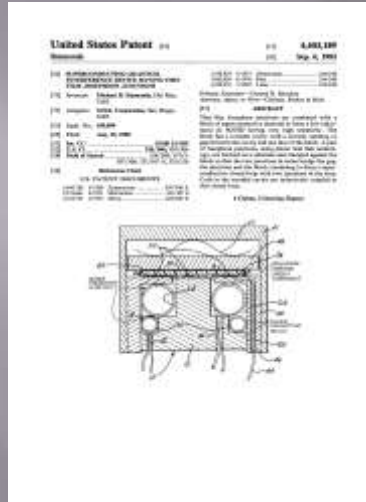
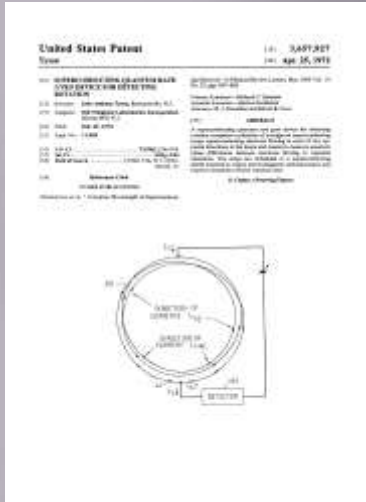


- 1958 – Electromagnetic wave gyroscopes or angular velocity measuring systems
- 1961 – Angular rotation detection system utilizing the displacement of electron beam
- 1963 – Particle accelerator utilizing coherent light
- 1970 – Method and apparatus for deflecting atoms



- 2001 – Electromagnetic device for production of cold neutral atoms
- 2005 – Microchip ring trap for cold atoms or molecules
- 2006 – Chip scale atomic gyroscope
- 2007 – Neutral atom trapping device
- 2010 – Neutral atom trapping device

# Gyroscopes on the superfluid helium



## Patents

1972 – Superconducting quantum rate gyro device

1983 – SQUID having a thin film Josephson junction

1991 – Superconducting Josephson junction gyroscope apparatus

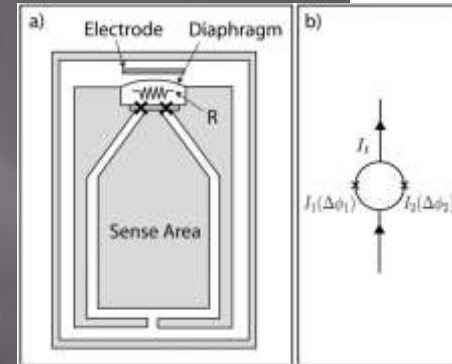
1991 – Gyromagnetic - effect cryogenic gyroscope

Tyson, J.A. Superconducting quantum rate gyro device for detecting rotation // US Patent No. 3, 657,927. Patented Apr. 25, 1970. Filed Feb. 25, 1970. Appl. No. 13,905. Int. Cl. G01p 3/44. U.S. Cl. 73/505, 324/43 R.

Simmonds, M.B. Superconducting quantum interference device having thin film Josephson junctions // US Patent No. 4,403,189. Patented Sep. 6, 1983. Filed Aug. 25, 1980. Appl. No. 180,690. Int. Cl.3 G01R 33/035. U.S. Cl. 324/248; 307/306.

Karwacki, F.A. Superconducting Josephson junction gyroscope apparatus // US Patent No. 5,058,431. Patented Oct. 22, 1991. Filed May 23, 1990. Appl. No. 527,963. Int. Cl.5 G01P 3/44. U.S. Cl. 73/505; 324/248.

Cerdonio, M., Vitale, S. Gyromagnetic-effect cryogenic gyroscope for detecting angular velocity // US Patent No. 5,066,637. Patented Nov. 19, 1991. Filed Jun. 23, 1988. Appl. No. 210,432. Int. Cl.5 G01P 9/00; G01P 3/44; G01C 19/00; G01R 33/035. U.S. Cl. 501/1; 73/504; 74/5 R; 324/160; 324/163; 324/248; 505/842; 505/872.



*This work is partially supported by the state contract No. 02.740.11.0528 (March 15, 2010) and accomplished with information support of Scientific & Production Epsilon Company Ltd.*



**Nikolay Krobka** id 5.25

PhD phys & math 1985

Chief Researcher

Research Institute for Applied... - Department of promising...

Add a new Article

Overview Contributions Timeline Info Stats Scores

Your conference papers [Edit list](#) Sorted by: **Newest**



Source

**Conference Paper: ПРОЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ АТОМНЫХ ИНТЕРФЕРОМЕТРОВ В КОСМОСЕ И НА МОРЕ: АКТУАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ**

Nikolay Krobka · N.V. Трибулев · А.И. Биденко

Full-text available · Conference Paper · May 2016

Add to project Add resources



**Conference Paper: THE PROJECTS ON APPLICATION OF ATOM INTERFEROMETERS IN SPACE AND SEA: CURRENT STATE**

N I Krobka · N V Tribulev · A I Bidenko

[\[Show abstract\]](#)

Full-text available · Conference Paper · May 2016

Projects · 6

---

Research · 50 91% of RG SCORE

- Article · 21
- Conference Paper · 21**
- Patent · 2
- Data · 6
- Other Research
- Full-texts · 32

---

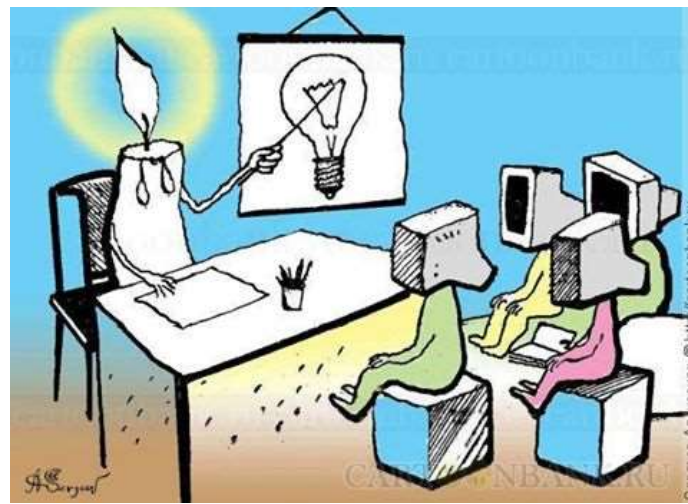
Questions · 1

---

Answers · 21

---

Followers · 19



18<sup>30</sup> – 19<sup>00</sup>

Д.В.Бражников<sup>4,13</sup>, О.Н.Прудников<sup>4</sup>, А.Е.Афанасьев<sup>6</sup>, С.Н.Багаев<sup>4,13</sup>,  
В.И.Балыкин<sup>6</sup>, М.Ю.Басалаев<sup>4</sup>, А.Н.Гончаров<sup>4,12,13</sup>, В.Н.Задков<sup>6</sup>,  
В.Г.Пальчиков<sup>2</sup>, И.И.Рябцев<sup>4,13</sup>, А.В.Тайченачев<sup>4,13</sup>, В.И.Юдин<sup>4,12,13</sup>,  
Исследование возможностей создания нового поколения высокоточных  
компактных гироскопов на базе современных технологий лазерного  
охлаждения атомов и атомной интерферометрии



## Программа Всероссийской конференции

### Физика ультрахолодных атомов

19-21 декабря 2016 года

конференц-зал Института автоматизации и электрометрии СО РАН (3-й этаж),  
Академгородок, Проспект Академика Коптюга, 1, 630090 Новосибирск  
Организаторы: ИАЭ СО РАН, ИЛФ СО РАН, ИФП СО РАН, НГУ

# СОДЕРЖАНИЕ

1. О понятии «модель ошибок гироскопа».
2. Пример «стандартизированной» модели ошибок гироскопа (IEEE Std 952)
3. Закономерности влияния погрешностей и шумов гироскопов на точность инерциальных систем ориентации.  
Вращение вокруг точки и некоммутативные кинематические эффекты.  
Полезный анизотропный кинематический эффект.  
(I этап эстафеты от «физтеха – квантового гироскописта» Николая Кробки)
4. Эффект Саньяка на фотонах и  
обобщенный эффект Саньяка на холодных и ультрахолодных атомах
5. Нерешенные задачи атомной интерферометрии .  
Навигация атомов в атомных интерферометрах  
и модели передаточной функции атомного интерферометра. Многоосные  
гироскопы-акселерометры на холодных и ультрахолодных атомах
6. Диалектика корпускулярно-волнового дуализма («волна-  
частица» - «частица-волна»).  
Новый (альтернативный к эффекту Саньяка и обобщенному эффекту Саньяка)  
«кинематический» нелинейный гироскопический эффект на холодных и  
ультрахолодных атомах (Дискуссионная  
модель Николая Кробки)
7. Феноменологические модели ошибок  
лазерных гироскопов и гироскопов на волнах де Бройля

# 1. Понятие «модель ошибок гироскопа»

Набор точностных характеристик гироскопа:

стабильность нуля;

стабильность и нелинейность масштабного коэффициента;

стабильность направления оси чувствительности,

нелинейность передаточной характеристики,

зависимости от внешних факторов

(вибрации, удары, перегрузки, температура, магнитное поле и др.)

«Динамическая» модель

$$\omega_*(t) = \omega(t) + \delta\omega(t)$$

$$\delta\omega(t) = \delta\omega(t, \vec{\omega}(t), \ddot{\vec{R}}(t), \vec{\Gamma}(\vec{R}(t), t), \sum_i \zeta_i(t), \sum_j \xi_j(t), \sum_k z(t))$$

Феноменологические модели плюс идентификация параметров  
модели по результатам испытаний

Модель ошибок «для разработчика навигационной системы»

Модель ошибок «для разработчика гироскопа»

# 1. Понятие «модель ошибок гироскопа»

Набор точностных характеристик гироскопа:

стабильность нуля;

стабильность и нелинейность масштабного коэффициента;

стабильность направления оси чувствительности,

нелинейность передаточной характеристики,

зависимости от внешних факторов

(вибрации, удары, перегрузки, температура, магнитное поле и др.)

“Динамическая” модель  $\omega_*(t) = \omega(t) + \delta\omega(t)$

$$\delta\omega(t) = \delta\omega(t, \vec{\omega}(t), \ddot{\vec{R}}(t), \vec{\Gamma}(\vec{R}(t), t), \sum_i \zeta_i(t), \sum_j \xi_j(t), \sum_k z(t))$$

**Феноменологические модели плюс идентификация параметров  
модели по результатам испытаний**

**Модель ошибок «для разработчика навигационной системы»**

**Модель ошибок «для разработчика гироскопа»**



## Модель ошибок одноосного гироскопа

$$\delta\omega(t) = a(t) + m(t)\omega(t) + n(t, \omega(t));$$

$$a(t) \equiv \sum_{i=1}^{N_a} a_i(t, \zeta_i);$$

$$m(t)\omega(t) \equiv \sum_{j=1}^{N_m} m_j(t, \zeta_j)\omega(t);$$

$$n(t, \omega(t)) \equiv \sum_{k=1}^{N_n} n_k(t, \omega(t), \zeta_k).$$

## Модель ошибок трехосного гироскопа

$$\delta\bar{\omega}(t) = \bar{a}(t) + M(t)\bar{\omega}(t) + \bar{n}(t, \omega(t));$$

$$\bar{a}(t) \equiv \sum_{i=1}^{N_a} \bar{a}_i(t, \zeta_i);$$

$$M(t)\bar{\omega}(t) \equiv \sum_{j=1}^{N_m} M_j(t, \zeta_j)\bar{\omega}(t);$$

$$\bar{n}(t, \omega(t)) \equiv \sum_{k=1}^{N_n} \bar{n}_k(t, \omega(t), \zeta_k).$$

УДК 531.38

## О ВЛИЯНИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ НА РЕШЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

КРЮКОВА Н. И., СВИРИДОВ М. В.

Среди аналитических методов интегрирования кинематических уравнений [1-4] особое место занимают асимптотические представления решения этих уравнений при «малых», в определенном смысле, возмущениях исходной задачи. Такой подход позволяет достаточно универсальным образом оценивать небольшие вариации кинематических параметров, обусловленные возмущениями угловой скорости твердого тела.

При исследовании влияния случайных возмущений их следует разделить на два разных по смыслу класса. К первому относятся возмущения, обусловленные внешним статистическим воздействием на твердое тело, а ко второму — наличием шумов измерения угловой скорости. Хотя в обоих случаях цели решения кинематической задачи, как правило, не совпадают, методы решения не носят принципиальных различий. Поэтому в публикуемой работе для определенности рассматриваются шумы измерений и исследуется погрешность определения углового положения твердого тела.

Известно, что в произвольном случае решение системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами дается мультипликативным интегралом [5]. Поэтому естественно аддитивным возмущениям угловой скорости ставить в соответствие мультипликативные возмущения матрицы оператора вращения, определяемой через кинематические параметры. Ближайший подход предложен в [3, 4], где решение кинематической задачи представлено в виде бесконечного произведения определенным образом построенных операторов вращения (матриц направленных косинусов) и решены вопросы о сходимости указанного представления и его преимуществах перед обычным методом последовательных приближений. Однако при случайных возмущениях (шумах) статистическое усреднение произведения операторов выполнить, как правило, труднее, чем суммы. В связи с этим представляется более удобным промежуточный подход, когда решение кинематических уравнений дается в виде оператора невозмущенного вращения, умноженного на некоторый оператор возмущения, заданный в виде обычного матрицанта [5].

В настоящей работе используются кинематические параметры Кейли — Клейна. Погрешности определения углового положения твердого тела характеризуется углом, на который надо «довернуть» рассчитанный инерциальный базис вокруг соответствующей эйлеровой оси, чтобы его положение совпало с невозмущенным положением [6]. Для получения конкретных результатов в качестве невозмущенного движения рассматривается «плоское» вращение твердого тела [1] и анализируются две статистические модели шумов измерения вектора абсолютной угловой скорости.

1. В параметрах Кейли — Клейна поворот твердого тела описывается унитарной унимодулярной матрицей  $u$  второго порядка. Зависимость  $u$  от времени дается кинематическим уравнением [1]:

$$du/dt = -\omega_j \sigma_j u, \quad \omega = \omega_j \sigma_j \quad (1.1)$$

$\omega_j$  — компоненты вектора  $\omega(t)$  угловой скорости вращения твердого тела, заданные в связанном базисе, и  $\sigma_j$  — синговые матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

В общем случае кинематические уравнения для возмущенной матрицы  $u'$  может быть представлено в виде

$$du'/dt = -\omega_j \sigma_j u' \quad (1.2)$$

Здесь  $\xi = \xi_j \sigma_j$ ,  $\xi_j$  — компоненты векторного случайного процесса  $\xi(t)$ , описывающего шум измерения угловой скорости твердого тела, и  $\mu$  — безразмерный «малый» параметр, порядок величины которого рассматривается ниже.

Согласно сказанному, матрицу  $u'$  представим в виде  $u' = uv$ , где  $v$  — матрица оператора возмущения. В соответствии с (1.1) и (1.2)  $v$  удовлетворяет уравнению

$$dv/dt = -\omega_j \sigma_j v \quad (1.3)$$

с единичным начальным условием. В (1.3) введено обозначение

$$v = u^{-1} \xi v \quad (1.4)$$

( $u^{-1}$  — эрмитово сопряженная матрица). Решение (1.3) может быть представлено в виде матрицанта

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{i}{2} \mu \Gamma^{-1} \right)^n \xi \quad (1.5)$$

где  $E$  — единичная матрица и  $\Gamma$  — интегральный оператор, действующий на произвольную матрицу  $x$  по правилу

$$\Gamma x = \int_0^t dt_1 x(t_1) \omega(t_1) \quad (1.6)$$

$$\varphi = 2 \arccos (1/2 \text{Sp } v) \quad (1.10)$$

$$R_{jk} = \langle \xi_j(t_1) \xi_k(t_2) \rangle = K \delta_{jk} \delta(t_1 - t_2) \quad (2.1)$$

$$R_{jk} = K T^2 \delta_{jk} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \delta(t_1 - t_2) \quad (2.2)$$

$$M_2 = 3KT,$$

$$M_2 = 2KT^2 \int_0^t dt_1 f^2(t_1) \quad (3.7)$$

$$M_2(t) = Bt - C + Q(t)$$

$$B = \int_0^t d\tau W(\tau), \quad C = \int_0^t d\tau \tau W(\tau), \quad Q = \int_0^t d\tau (\tau - t) W(\tau) \quad (3.5)$$

В частном случае постоянного вращения твердого тела со скоростью  $f = f_0 = \text{const}$  и некоррелированных стационарных шумах  $\xi_j$ , имеющих одинаковую спектральную плотность  $G(v)$ :

$$B = G(0) + 2G(f_0) \quad (3.6)$$

$$M_1 = -\frac{1}{4} K^2 t^2 \quad (4.3)$$

$$M_1 = 6K^2 T t - \frac{5}{3} K^2 T^2 \int_0^t dt_1 f^2(t_1) - \frac{1}{12} K^2 T^2 \left[ \int_0^t dt_1 f^2(t_1) \right]^2 \quad (4.4)$$

Н. И. Кробка, М. В. Свиридов

**ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ЧАСТОТНОЙ ПОДСТАВКИ В КОЛЬЦЕВОМ ЛАЗЕРЕ НА ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ВРАЩЕНИЯ**

*Теоретически исследована точность измерения вращения в инерциальном пространстве с помощью кольцевых лазеров. Основным источником погрешности считаются случайные составляющие частотных подставок. Рассмотрена зависимость погрешности от вектора угловой скорости как функция времени. В случае диффузионной зависимости дисперсии ошибки от времени получены приближенные формулы для коэффициентов диффузии.*

**Influence of a random frequency pedestal in a ring laser on the accuracy of rotation measurements**

N. I. Krobka and M. V. Sviridov

(Submitted March 2, 1984)

Kvantovaya Elektron. (Moscow) 12, 363–367 (February 1985)

A theoretical analysis is made of the accuracy of measurements of rotation in an inertial space using ring lasers. The main source of error is assumed to be random components of frequency pedestals. An analysis is made of the dependence of the error on the angular velocity vector as a function of time. Approximate equations are derived for the diffusion coefficients in the diffusion-error variance.

Soviet Journal of  
Quantum Electronics

Influence of a random frequency pedestal in a ring laser on the accuracy of rotation measurements

N I Krobka, M V Sviridov

**Abstract**

A theoretical analysis is made of the accuracy of measurements of rotation in an inertial space using ring lasers. The main source of error is assumed to be random components of frequency pedestals. An analysis is made of the dependence of the error on the angular velocity vector as a function of time. Approximate equations are derived for the diffusion coefficients in the diffusion-like time dependence of the error variance.

DOI: 10.1070/QE1985015402ABEH006135

Citation: N I Krobka, M V Sviridov, "Influence of a random frequency pedestal in a ring laser on the accuracy of rotation measurements", SOV J QUANTUM ELECTRON, 1985, 15 (2), 232–234.

Classification: PACS: 42.62.Eh, 42.60.Da, 06.30.Bp, 06.20.Dk

Full Text: PDF file (306 kb)

References: HTML file

a ring laser in an inertial space. The main source of error is assumed to be random components of frequency pedestals. An analysis is made of the dependence of the error on the angular velocity vector as a function of time. Fairly detailed equations are derived for the diffusion coefficients in the diffusion-error variance.

esses taking place in laser systems. The main source of error is assumed to be random components of frequency pedestals. An analysis is made of the dependence of the error on the angular velocity vector as a function of time. Fairly detailed equations are derived for the diffusion coefficients in the diffusion-error variance.

three ring lasers form an inertial space. The main source of error is assumed to be random components of frequency pedestals. An analysis is made of the dependence of the error on the angular velocity vector as a function of time. Fairly detailed equations are derived for the diffusion coefficients in the diffusion-error variance.

nts of the rotation of this error was analyzed for

they are statistically independent, and that they have  $\langle \eta_m \rangle = 0$  (the angular brackets denote statistical averaging), the variance  $\sigma^2$ , the characteristic correlation time  $\tau_0$ , and the correlation matrix  $\langle \eta_m(t_1) \eta_n(t_2) \rangle = H(\tau) \delta_{mn}$  ( $\tau = t_1 - t_2$ ,  $\delta_{mn}$  is the Kronecker delta). In many cases, the following function is used for specific estimates

$$H(\tau) = \sigma^2 \exp(-|\tau|/\tau_0). \quad (2)$$

The phases  $\varphi_m$  of the harmonic components are assumed to be independent random quantities uniformly distributed over the interval  $[0, 2\pi]$ .

Cayley-Klein parameters are used to describe a group of rotations. The kinematic equations take the form<sup>1</sup>

## 2. Пример «стандартизированной» модели ошибок гироскопа

# IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single- Axis Interferometric Fiber Optic Gyros

Sponsor

**Gyro and Accelerometer Panel  
of the  
IEEE Aerospace and Electronic Systems Society**

Reaffirmed 10 December 2008  
Approved 16 September 1997

**IEEE-SA Standards Board**

## Annex A

(informative)

### Design features of IFOGs

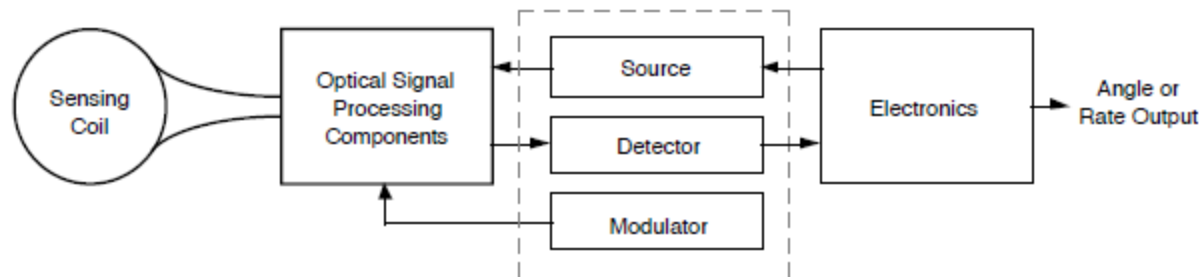


Figure A.1 – Configuration of an IFOG

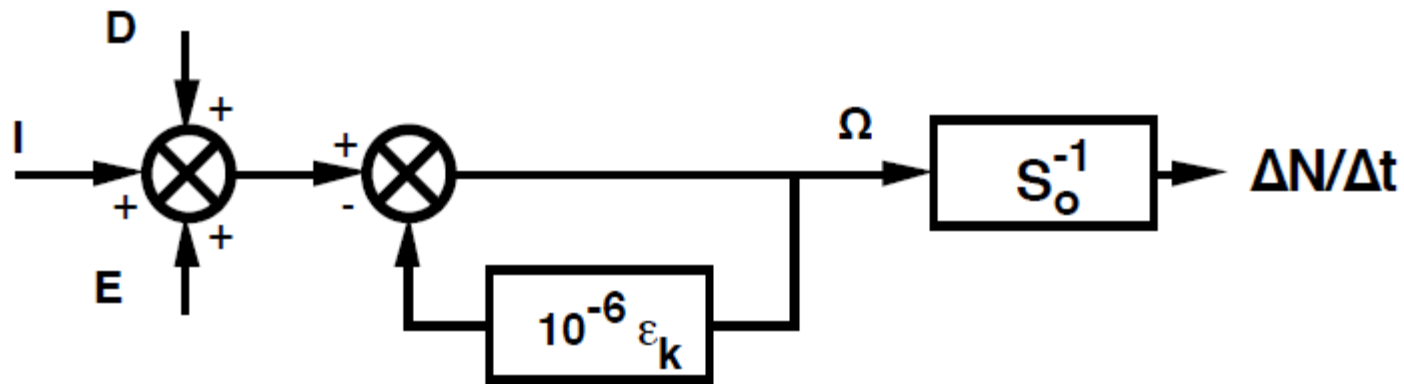
- a) Sensing coil
  - 1) Multi-mode fiber
  - 2) Polarization maintaining fiber
  - 3) Single mode fiber
- b) Optical signal processing components
  - 1) Directional coupler
  - 2) Depolarizer
  - 3) Isolator
  - 4) Polarization controller
  - 5) Polarizer
  - 6) Y-junction
  - 7) Mode filter
  - 8) Mode scrambler
  - 9) Optical dump
- c) Opto-electric interface
  - 1) Sources
    - Laser diode
    - Light emitting diode/edge light emitting diode
    - Super luminescent diode
    - Pumped rare earth doped fiber
  - 2) Detector
  - 3) Modulator
    - Phase modulator
    - Piezo-electric
    - Electro-optical
    - Frequency modulator
- d) Electronics
  - 1) Signal processing
  - 2) Power conditioning
  - 3) Environmental control

NOTE—A number of components such as y-junction, polarizers, and electro-optical modulators, can be fabricated as part of an integrated optic circuit (IOC). The IOC is typically based on a lithium niobate substrate.

### B.1.3 Gyro model equation

A generic model equation [B13] and [B15] that applies to many types of inertial sensors is shown in Figure B.2. It consists of inertial (including misalignment), environmental, and random (including quantization) contributors.

This approach to compartmentalizing gyro model equations is introduced to better organize the various model components.



$\omega_*(t)$

$S_0(\Delta N / \Delta t)$  is  $[I + E + D](1 + 10^{-6} \epsilon_k)^{-1}$

$S_0$  is nominal scale factor

$\Delta N / \Delta t$  is output pulse rate

$I$  is inertial input terms

$E$  is environmentally sensitive terms

$D$  is drift terms

$\epsilon_k$  is scale factor error terms (ppm)

$\Omega$  is equivalent gyro rate output

Figure B.2—Generic model equation

### 8.3 Model equation

The model equation for a single-axis ifog expresses the relationship between the input rotation rate and the gyro output in terms of parameters whose coefficients are necessary to specify the performance of the gyro.

The use of the coefficients defined in this subclause to simulate gyro performance is discussed in Annex B.

$$S_0(\Delta N/\Delta t) = [I + E + D][1 + 10^{-6} \epsilon_K]^{-1}$$

where

$S_0$  is nominal scale factor ("/p)

$(\Delta N/\Delta T)$  is output pulse rate (p/s)

In the analog rate sensing mode

$S_0 V$  is  $[I + E + D][1 + 10^{-6} \epsilon_K]^{-1}$

$S_0$  is nominal scale factor [(°/h)/V]

$V$  is analog output (volts)

$I$  is inertial input terms (°/h)

$E$  is environmentally sensitive terms (°/h)

$D$  is drift terms (°/h)

$\epsilon_K$  is scale factor error terms (ppm)

$I$  is  $\omega_{IRA} + \omega_{XRA} \sin \Theta_Y - \omega_{YRA} \sin \Theta_X$

$E$  is  $D_T \Delta T + D_{\dot{T}}(dT/dt) + \bar{D}_{\nabla \dot{T}} \cdot \frac{d\nabla \dot{T}}{dt}$

$D$  is  $D_F + D_R + D_Q$



$$S_0(\Delta N/\Delta t) = [I + E + D][1 + 10^{-6} \epsilon_K]^{-1}$$

$I$  is inertial input terms ( $^{\circ}/h$ )

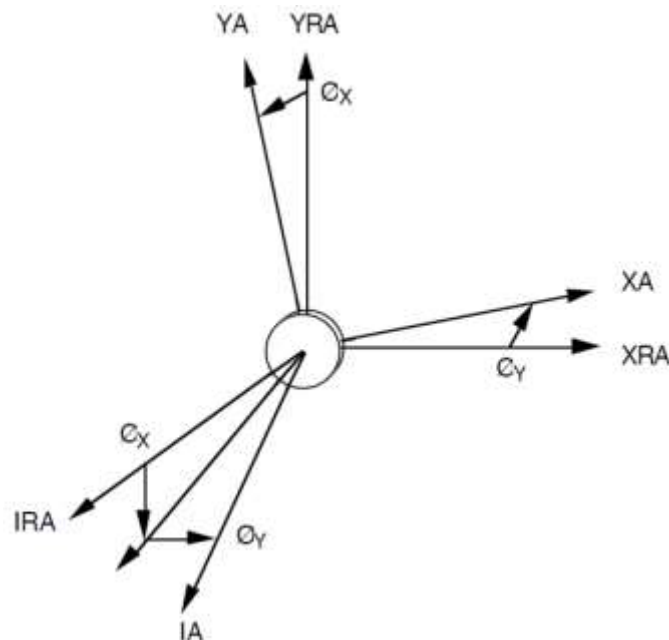
$I$  is  $\omega_{IRA} + \omega_{XRA} \sin \Theta_Y - \omega_{YRA} \sin \Theta_X$

$\omega_{IRA}, \omega_{XRA},$

$\omega_{YRA}$  are components of the inertial input rate resolved into the gyro reference coordinate frame

$\Theta_X$  is misalignment of the IA about the XRA

$\Theta_Y$  is misalignment of the IA about the YRA



The X gyro case reference axis (XRA) and Y gyro case reference axis (YRA) are mutually perpendicular and are located by means of the gyro mounting surface and the reference index on the gyro case [notch, pin, scribe line, \_\_\_\_\_]. The IRA, XRA, and YRA are reference axes defined with respect to the mounting provisions. These axes are nominally parallel to IA, XA, and YA respectively, and define a right-handed coordinate system. The IRA is perpendicular to the gyro mounting surface and shall conform to [drawing number \_\_\_\_\_, Figure \_\_\_\_\_] (see Figure 1).

### **5.3.4 IA alignment characteristics**

#### **5.3.4.1 IA misalignment**

\_\_\_\_\_ [' , mrad], maximum with respect to the input reference axis (IRA).

The specific direction of IA misalignment may be important in some applications and should be specified with respect to XRA and YRA gyro case reference axes. Note that these axes are defined in 5.4.3.

#### **5.3.4.2 IA alignment repeatability**

\_\_\_\_\_ [",  $\mu$ rad], [maximum spread,  $1\sigma$ , \_\_\_\_\_].

Thermal cycles and other environmental exposures, shutdowns, time between runs, remounting, and additional factors pertinent to the particular application should be specified.

#### **5.3.4.3 IA alignment sensitivities**

IA alignment sensitivities may be specified, such as those due to temperature, thermal gradients, rate of temperature change, acceleration, vibration, and additional environments pertinent to the particular application.

$$S_0(\Delta N / \Delta t) = [I + E + D][1 + 10^{-6} \varepsilon_K]^{-1}$$

$E$  is environmentally sensitive terms ( $^{\circ}/h$ )

$$E \text{ is } D_T \Delta T + D_{\dot{T}}(dT/dt) + \bar{D}_{\nabla \dot{T}} \cdot \frac{d\nabla \bar{T}}{dt}$$

$D_T \Delta T$  is drift rate attributable to a change in temperature,  $\Delta T$ , where  $D_T$  is the drift rate temperature sensitivity coefficient

$D_{\dot{T}}(dT/dt)$  is drift rate attributable to a temperature ramp,  $dT/dt$ , where  $D_{\dot{T}}$  is the coefficient of the temperature-ramp drift-rate sensitivity

$\bar{D}_{\nabla \dot{T}} \cdot \frac{d\nabla \bar{T}}{dt}$  is drift rate attributable to a time-varying temperature-gradient,  $\frac{d\nabla \bar{T}}{dt}$ , where  $\bar{D}_{\nabla \dot{T}}$  is the coefficient vector of the time-varying temperature-gradient drift-rate sensitivity

Other sensitivities may be added to the model equation, such as those due to variations in supply voltage, orientation, acceleration, vibration, and other environments pertinent to the particular application.

$$S_0(\Delta N / \Delta t) = [I + E + D][1 + 10^{-6} \varepsilon_K]^{-1}$$

$D$  is drift terms ( $^{\circ}/h$ )

$D$  is  $D_F + D_R + D_Q$

$D_F$  is bias

$D_R$  is  $D_{RN} + D_{RB} + D_{RK} + D_{RR}$

$D_{RN}$  is random drift rate attributable to angle random walk, where  $N$  is the coefficient

$D_{RB}$  is random drift rate attributable to bias instability, where  $B$  is the coefficient

$D_{RK}$  is random drift rate attributable to rate random walk, where  $K$  is the coefficient

$D_{RR}$  is random drift rate attributable to ramp, where  $R$  is the coefficient

$D_Q$  is equivalent random drift rate attributable to angle quantization, where  $Q$  is the coefficient

Other sensitivities may be added to the model equation, such as those due to variations in supply voltage, orientation, acceleration, vibration, and other environments pertinent to the particular application.

### 5.3.3 Drift rate, $D$ , $E$

#### 5.3.3.1 Bias and random, $D$

##### 5.3.3.1.1 Bias, $D_F$

\_\_\_\_\_  $\pm$  \_\_\_\_\_  $^{\circ}/h$ .

Repeatability. \_\_\_\_\_  $^{\circ}/h$  [maximum spread,  $1\sigma$ , \_\_\_\_\_].

Thermal cycles and other environmental exposures, shutdowns, time between runs, remounting, and additional factors pertinent to the particular application should be specified.

##### 5.3.3.1.2 Random, $D_R$

Random drift rate is usually defined in terms of the Allan variance components. These components should be specified. See  $D_R$  terms under 8.3 and Annex C.

- a) Angle random walk (rate white noise) coefficient,  $N$ . \_\_\_\_\_  $^{\circ}/h^{1/2}$  maximum.
- b) Bias instability coefficient,  $B$ . \_\_\_\_\_  $^{\circ}/h$  maximum.
- c) Rate random walk coefficient,  $K$ . \_\_\_\_\_  $(^{\circ}/h)/h^{1/2}$  maximum.
- d) Ramp coefficient,  $R$ . \_\_\_\_\_  $(^{\circ}/h)/h$  maximum.

For some applications it may be sufficient to define random drift as the standard deviation of the output. The time interval and integration time should be specified.

##### 5.3.3.1.3 Measurement noise, $D_Q$

Quantization noise coefficient,  $Q$  \_\_\_\_\_ [ $^{\circ}$ ,  $\mu rad$ ] maximum.

Measurement noise is usually defined as the Allan variance component  $Q$ . See 8.3 and Annex C.

$$S_0(\Delta N / \Delta t) = [I + E + D][1 + 10^{-6} \varepsilon_K]^{-1}$$

$\varepsilon_K$  is scale factor error terms (ppm)

$\varepsilon_K$  is  $\varepsilon_T \Delta T + f(I)$

$\varepsilon_T \Delta T$  is scale factor error attributable to a change in temperature,  $\Delta T$ , where  $\varepsilon_T$  is the scale factor temperature sensitivity coefficient

$f(I)$  is scale factor errors dependent on input rate

### 5.3.2.1 Gyro scale factor errors

- a) Linearity Error. \_\_\_\_\_ [ppm, %] of full scale and/or \_\_\_\_\_ [ppm, %] of output, [maximum  $1\sigma$ , \_\_\_\_\_].

Scale factor linearity error may have a component periodic in rate due to optical feedback to the source.

- b) Asymmetry. The difference between the scale factor measured with positive input rates and negative input rates shall not exceed \_\_\_\_\_ [ppm, %] of half the sum of the magnitudes of the scale factor determined for positive and negative inputs.
- c) Repeatability. [ppm, %], [maximum spread,  $1\sigma$ , \_\_\_\_\_].

Repeatability involves changes in scale factor that occur between periods of operation. Thermal cycles and other environmental exposures, shutdowns, time between runs, remounting, and additional factors pertinent to the particular application should be specified.

- d) Stability. \_\_\_\_\_ [ppm, %], [maximum spread,  $1\sigma$ , \_\_\_\_\_] for \_\_\_\_\_ [hours, days, \_\_\_\_\_].

### 5.3.2.2 Gyro scale factor sensitivities

- a) Temperature. The change in gyro scale factor resulting from a change in steady-state operating temperature shall not exceed \_\_\_\_\_ ppm from that measured at \_\_\_\_\_ °C over the range \_\_\_\_\_ °C to \_\_\_\_\_ °C.
- b) Other sensitivities.

Additional sensitivities may be specified such as those due to variations in supply voltage, rate of temperature change, temperature gradient, orientation, acceleration, vibration, magnetic field, radiation, and other environments pertinent to the particular application.

## **12.9.4.2 Gyro scale factor errors**

### **12.9.4.2.1 Linearity Error**

From the test data taken in 12.9.3.1, compute the deviation of the output data at each input (rate, angle) from the least squares fit of the data calculated in 12.9.4.1. The linearity error shall conform to the requirements of subclause \_\_\_\_\_.

Alternate methods include weighting, calculation over a limited range, and computing linearity error after compensation.

### **12.9.4.2.2 Asymmetry**

Compute the asymmetry at specified rates as the ratio of the difference in magnitudes of scale factor measured for positive and negative inputs to one-half the sum of the magnitudes. Asymmetry shall conform to the requirements of subclause \_\_\_\_\_.

### **12.9.4.2.3 Repeatability**

Compute changes in the scale factor [ppm, \_\_\_\_\_], [maximum spread,  $1\sigma$ , \_\_\_\_\_] that occur between specified periods of operation. The results of the gyro scale factor repeatability shall conform to the requirements of subclause \_\_\_\_\_.

### **12.9.4.2.4 Stability**

The variation in scale factor obtained from the test series of 12.9.3.1 shall conform to the requirements of subclause \_\_\_\_\_.

## **12.9.4.3 Gyro scale factor sensitivities**

### **12.9.4.3.1 Temperature**

From the test data taken in 12.9.3.2.1, compute the temperature sensitivity as the maximum scale factor change over the specified temperature range, divided by the temperature range. The temperature sensitivity of the gyro scale factor shall conform to the requirements of subclause \_\_\_\_\_.

### **12.9.4.3.2 Other sensitivities**



#### 12.11.4.1 Bias, random and measurement noise

##### 12.11.4.1.1 Bias, $D_F$

From the test data taken in 12.11.3.1 after warm-up, compute the bias,  $D_F$ , for each sample interval by dividing the accumulated number of pulses in each sample interval by the corresponding sample time, multiplying by the gyro scale factor and removing the component of earth rate along the IA.

Compute  $D_F$  by obtaining the average of all the  $D_F$  data. The results shall conform to the requirements of subclause \_\_\_\_\_.

##### 12.11.4.1.2 Random, $D_R$ and measurement noise, $D_Q$

From the test data taken in 12.11.3.1 after warm-up compute the random drift coefficients  $R$ ,  $K$ ,  $B$ ,  $N$ , and  $Q$  by forming the Allan variance estimates

$$\sigma_{\Omega}^2(nT_0) = \frac{1}{2(M-2n)} \sum_{m=1}^{M-2n} (\Omega_{m+2n} - 2\Omega_{m+n} + \Omega_m)^2$$

for  $n = 1, 2, 3, \dots, n_{\max} \leq (M-1)/2$  and fitting the results to the polynomials

$$\sigma_{\Omega}^2(nT_0) = \frac{R^2 n^2 T_0^2}{2} + \frac{K^2 n T_0}{3} + B^2 \left[ \frac{2}{\pi} \right] \ln(2) + \frac{N^2}{n T_0} + \frac{3Q^2}{n^2 T_0^2}$$

in the least squares sense,

where

$\Omega_m$  is gyro rate output calculated in the manner described in 12.11.4.1.1

$1/T_0$  is data sample rate

$MT_0$  is data record length

The results shall conform to the requirements of subclauses \_\_\_\_\_ and \_\_\_\_\_.

Annex C presents a detailed explanation of the random drift coefficients and their relationship to the Allan variance method.

Table B.1 – Properties of noise and drift processes

Stochastic model contributor				Asymptotic properties PSD $S(f)$		
Nomenclature	Equivalent white noise input		Other name	$\theta$	$\Omega$	$S_{\Omega}(f)$
	Generic	This Std				
White angle	$N_{\theta}^2$	$\Phi^2$	Angle measurement noise	0	+2	$(2\pi f)^2 \phi^2$
Angle quantization	—	$Q^2$	White angle energy spectrum	0	+2	$\frac{4Q^2}{\tau} \sin^2 \pi f \tau$
Flicker angle	$N_{F\theta}^2$	—	Pink angle noise	-1	+1	$2\pi f N_{F\theta}^2$
Angle random walk, white rate noise	$N_{\Omega}^2$	$N^2$	Reg angle noise	-2	0	$N^2$
Rate quantization	—	—	Discrete white rate noise or white rate energy spectral density	-2	0	—
Bias instability	$N_{F\Omega}^2$	$B^2$	Pink rate noise	-3	-1	$\frac{B^2}{2\pi f}$
Markov rate	$N_{c\Omega}^2$	$q^2$	Correlated drift rate	-2, -4	0, -2	$\frac{(q_c \tau_c)^2}{1 + (2\pi f \tau_c)^2}$
Rate random walk	$N_{\Omega}^2$	$K^2$	Red rate noise	-4	-2	$\frac{K^2}{(2\pi f)^2}$
Ramp instability	$N_{F\Omega}^2$	$R^2$	Pink angular acceleration noise	-5	-3	$\frac{R^2}{(2\pi f)^3}$
Random bias	$\Omega(0)$	$B_0^2$	Bias or fixed draft	See Note 2	See Note 2	$B_0^2 \delta(f)$
Random ramp	$\hat{\Omega}(0)$	$R_0^2$	Rate ramp	See Note 2	See Note 2	—
Periodic rate	$\Omega_0$	—	Harmonic	Discrete spectra	Discrete spectra	$\frac{1}{2} \Omega_0^2 \delta(f - f_0)$

NOTES

- 1 – Mod  $\sigma$  – Modified Allan variance  
 2 – Remove by regression or by filtering

## Annex C<sup>7</sup>

(informative)

### An overview of the Allan variance method of IFOG noise analysis

In this annex, Allan's definition and results are related to five basic gyro noise terms and are expressed in a notation appropriate for gyro data reduction. The five basic noise terms are angle random walk, rate random walk, bias instability, quantization noise, and rate ramp.

Consider  $N$  samples of gyro data<sup>9</sup> with a sample time of  $\tau_o$ . Form data clusters of lengths  $\tau_o, 2\tau_o, \dots, k\tau_o$  ( $k < N/2$ ) and obtain averages of the sum of the data points contained in each cluster over the length of that cluster. The Allan variance is defined as a function of cluster time.

To be specific, the Allan variance can be defined either in terms of the output rate,  $\Omega(t)$ , or the output angle

$$\theta(t) = \int^t \Omega(t') dt'$$

The lower integration limit is not specified as only angle differences are employed in the definitions. Angle measurements are made at discrete times given by  $t = k\tau_o, k = 1, 2, 3, \dots, N$ . Accordingly, the notation is simplified by writing  $\Theta_k = \Theta(k\tau_o)$ .

The average rate between times  $t_k$  and  $t_k + \tau$  is given by:

$$\bar{\Omega}_k(\tau) = \frac{\theta_{k+m} - \theta_k}{\tau}$$

where

$$\tau = m\tau_o$$

---

<sup>7</sup>This annex is adapted from Annex C in IEEE Std 647-1995, IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Laser Gyros.

<sup>8</sup>The numbers in brackets preceded by the letter C correspond to those of the bibliography in C.4.

<sup>9</sup>Sometimes referred to as time series or data streams.

The Allan variance<sup>10</sup> is defined as:

$$\begin{aligned}\sigma^2(\tau) &= \frac{1}{2} \langle (\bar{\Omega}_{k+m} - \bar{\Omega}_k)^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2\tau^2} \langle (\theta_{k+2m} - 2\theta_{k+m} + \theta_k)^2 \rangle\end{aligned}$$

where

$\langle \rangle$  is the ensemble average

The Allan variance is estimated as follows:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2(N-2m)} \sum_{k=1}^{N-2m} (\theta_{k+2m} - 2\theta_{k+m} + \theta_k)^2$$

The Allan variance obtained by performing the prescribed operations, is related to the PSD of the noise terms in the original data set. The relationship between Allan variance and the two-sided PSD<sup>11</sup>,  $S_{\Omega}(f)$  is given by:

$$\sigma^2(\tau) = 4 \int_0^{\infty} S_{\Omega}(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \quad (C.1)$$

Equation (C.1) is the key result that will be used to calculate the Allan variance from the rate noise PSD. An interpretation is that the Allan variance is proportional to the total noise power of the gyro rate output when passed through a filter with the transfer function of the form  $\sin^4(x)/(x)^2$ . This particular transfer function is the result of the method used to create and operate on the clusters.

It is seen from Equation (C.1) and the above interpretation that the filter bandpass depends on  $\tau$ . This suggests that different types of random processes can be examined by adjusting the filter bandpass, namely by varying  $\tau$ . Thus, the Allan variance provides a means of identifying and quantifying various noise terms that exist in the data. It is normally plotted as the square root of the Allan variance versus  $\tau$ ,  $[\sigma(\tau)]$ , on a log-log plot.

Subclauses C.1.1 through C.1.7 show the application of Equation (C.1) to a number of noise terms that are either known to exist in the IFOG or otherwise influence its data. Detailed derivations are given in [C6]. The physical origin of each noise source term will be discussed.

### C.1.1 Angle random walk

The main source for this error is spontaneous emission of photons. This component of the IFOG angle random walk is caused by the spontaneously emitted photons that are always present in the source output. The angle random walk due to spontaneously emitted photons is called the quantum limit [C4].

Other high frequency noise terms that have correlation time much shorter than the sample time, can also contribute to the gyro angle random walk. However, most of these sources can be eliminated by design. These noise terms are all characterized by a white noise spectrum on the gyro rate output.

The associated rate noise PSD is represented by:

$$S_{\Omega}(f) = N^2 \quad (\text{C.2})$$

where

$N$  is the angle random walk coefficient<sup>12</sup>

Substitution of Equation (C.2) in Equation (C.1) and performing the integration yields:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{N^2}{\tau} \quad (\text{C.3})$$

As shown in Figure C.1, Equation (C.3) indicates that a log-log plot of  $\sigma(\tau)$  versus  $\tau$  has a slope of  $-1/2$ . Furthermore, the numerical value of  $N$  can be obtained directly by reading the slope line at  $\tau = 1$ .

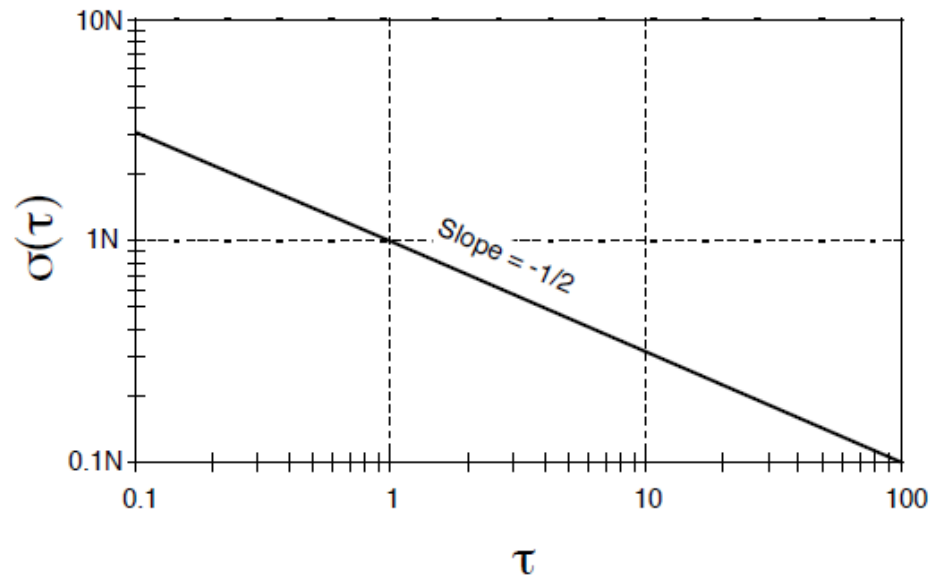


Figure C.1 —  $\sigma(\tau)$  Plot for angle random walk

### C.1.2 Bias instability

The origin of this noise is the electronics, or other components susceptible to random flickering [C5]. Because of its low-frequency nature it shows up as the bias fluctuations in the data. The rate PSD associated with this noise is:

$$S_{\alpha}(f) = \begin{cases} \left(\frac{B^2}{2\pi}\right) \frac{1}{f} & f \leq f_0 \\ 0 & f > f_0 \end{cases} \quad (C.4)$$

where

$B$  is the bias instability coefficient  
 $f_0$  is the cutoff frequency

Substitution of Equation (C.4) in Equation (C.1) and performing the integration yields:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{2B^2}{\pi} \left[ \ln 2 - \frac{\sin^3 x}{2x^2} (\sin x + 4x \cos x) + Ci(2x) - Ci(4x) \right] \quad (C.5)$$

where

$x$  is  $\pi f_0 \tau$   
 $Ci$  is the cosine-integral function [C2]

Figure C.2 represents a log-log plot of Equation (C.5) that shows that the Allan variance for bias instability reaches a plateau for  $\tau$  much longer than the inverse cut off frequency. Thus, the flat region of the plot can be examined to estimate the limit of the bias instability as well as the cutoff frequency of the underlying flicker noise.

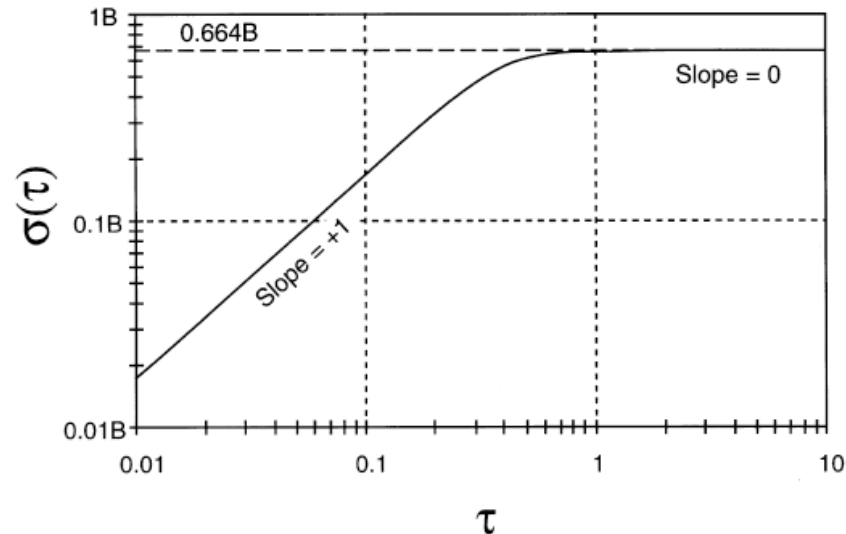


Figure C.2— $\sigma^2(\tau)$  Plot for bias Instability (for  $f_0 = 1$ )

### C.1.3 Rate random walk

This is a random process of uncertain origin, possibly a limiting case of an exponentially correlated noise with a very long correlation time, as discussed in Clause 3.

The rate PSD associated with this noise is:

$$S_{\alpha}(f) = \left(\frac{K}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{f^2} \quad (\text{C.6})$$

where

$K$  is the rate random walk coefficient

Substitution of Equation (C.6) in Equation (C.1) and performing the integration yields:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{K^2\tau}{3} \quad (\text{C.7})$$

This indicates that rate random walk is represented by a slope of +1/2 on a log-log plot of  $\sigma(\tau)$  versus  $\tau$ , as shown in Figure C.3. The magnitude of this noise can be read off the slope line at  $\tau = 3$ .

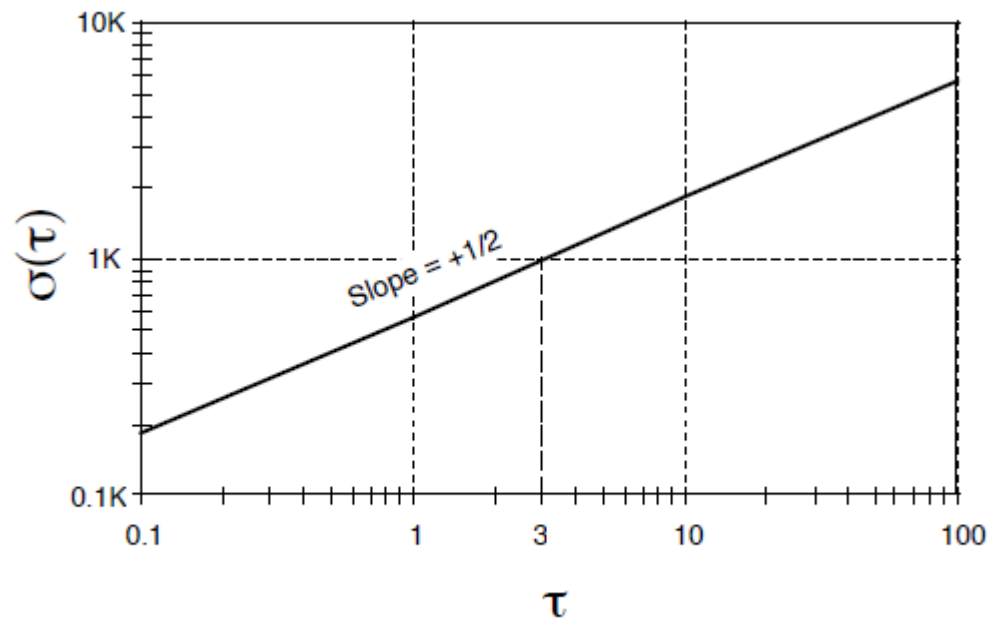


Figure C.3— $\sigma(\tau)$  Plot for rate random walk

### C.1.4 Rate ramp

For long, but finite time intervals this is more of a deterministic error rather than a random noise. Its presence in the data may indicate a very slow monotonic change of the IFOG source intensity persisting over a long period of time. It could also be due to a very small acceleration of the platform in the same direction and persisting over a long period of time. It appears as a genuine input to the IFOG given by:

$$\Omega = Rt \tag{C.8}$$

where

$R$  is the rate ramp coefficient

By forming and operating on the clusters of data containing an input given by Equation (C.8), we obtain:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{R^2 \tau^2}{2} \tag{C.9}$$

This indicates that the rate ramp noise has a slope of +1 in the log-log plot of  $\sigma(\tau)$  versus  $\tau$ , as shown in Figure C.4. The magnitude of rate ramp  $R$  can be obtained from the slope line at  $\tau = \sqrt{2}$ .

The rate PSD associated with this noise is:

$$S_{\Omega}(f) = \frac{R^2}{(2\pi f)^3} \tag{C.10}$$

The user should be aware that there may be a flicker acceleration noise with  $1/f^3$  PSD that leads to the same Allan variance  $\tau$  dependence. See Annex B for a discussion.

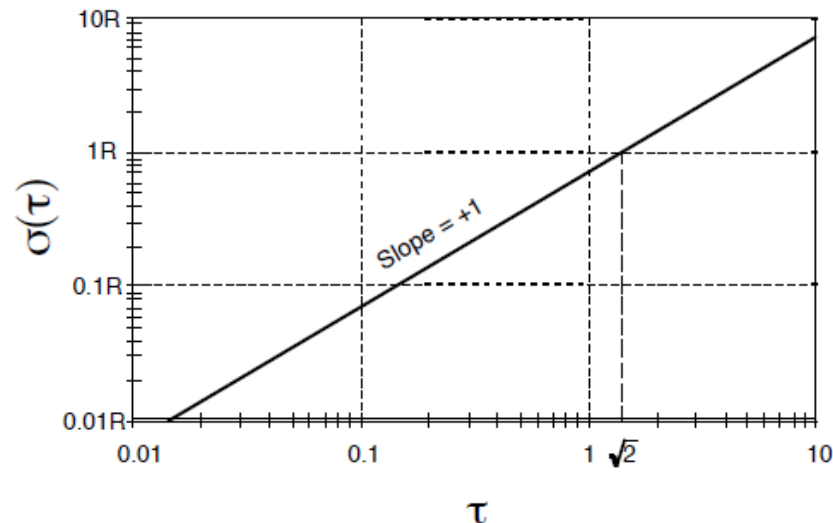


Figure C.4— $\sigma(\tau)$  plot for rate ramp



### C.1.5 Quantization noise

This noise is strictly due to the digital nature of the IFOG output. The readout electronics registers a count only when the gyro phase changes by a predetermined amount, e.g.,  $2\pi/2^n$ , where  $n = 0, 1, 2, \dots$

The angle PSD for such a process, given in [C8] is:

$$S_{\theta}(f) = \begin{cases} \tau_0 Q^2 \left( \frac{\sin^2(\pi f \tau_0)}{(\pi f \tau_0)^2} \right) \\ \approx \tau_0 Q^2 \end{cases} \quad f < \frac{1}{2\tau_0} \quad (C.11)$$

where

$Q$  is the quantization noise coefficient

The theoretical limit for  $Q$  is equal to  $S/\sqrt{12}$  where  $S$  is the gyro scale factor, for tests with fixed and uniform sampling times. The rate PSD is related to the angle PSD through the equation:

$$S_{\Omega}(2\pi f) = (2\pi f)^2 S_{\theta}(2\pi f) \quad (C.12)$$

and is

$$S_{\Omega}(f) = \begin{cases} \frac{4Q^2}{\tau_0} \sin^2(\pi f \tau_0) \\ \approx (2\pi f)^2 \tau_0 Q^2 \end{cases} \quad f < \frac{1}{2\tau_0} \quad (C.13)$$

Substitution of Equation (C.13) in Equation (C.1) and performing the integration yields:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{3Q^2}{\tau^2} \quad (C.14)$$

This indicates that the quantization noise is represented by a slope of  $-1$  in a log-log plot of  $\sigma(\tau)$  versus  $\tau$ , as shown in Figure C.5. The magnitude of this noise can be read off the slope line at  $\tau = \sqrt{3}$ .

The user should be aware that there are other noise terms with different spectral characteristics, such as flicker angle noise and white angle noise, that lead to the same Allan variance  $\tau$  dependence. See Annex B for a discussion of these noise terms.

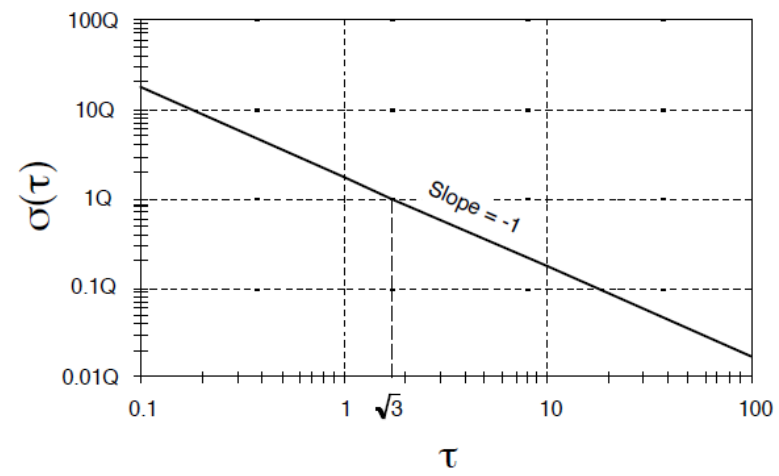


Figure C.5— $\sigma(\tau)$  Plot for quantization noise

## C.1.6 Other noise terms

### C.1.6.1 Exponentially correlated (Markov) noise

This noise is characterized by an exponential decaying function with a finite correlation time.

The rate PSD for such a process:

$$S_{\Omega}(f) = \frac{(q_c T_c)^2}{1 + (2\pi f T_c)^2} \quad (\text{C.15})$$

where

$q_c$  is the noise amplitude  
 $T_c$  is the correlation time

Substitution of Equation (C.15) in Equation (C.1) and performing the integration yields:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{(q_c T_c)^2}{\tau} \left[ 1 - \frac{T_c}{2\tau} \left( 3 - 4e^{-\frac{\tau}{T_c}} + e^{-\frac{2\tau}{T_c}} \right) \right] \quad (\text{C.16})$$

Figure C.6 shows a log-log plot of Equation (C.16). It is instructive to examine various limits of this equation. For  $\tau$  much longer than the correlation time, it is found that:

$$\sigma^2(\tau) \Rightarrow \frac{(q_c T_c)^2}{\tau} \quad \tau \gg T_c \quad (\text{C.17})$$

which is the Allan variance for angle random walk where  $N = q_c T_c$  is the angle random walk coefficient. For  $\tau$  much smaller than the correlation time, Equation (C.16) reduces to:

$$\sigma^2(\tau) \Rightarrow \frac{q_c^2}{3} \tau \quad \tau \ll T_c \quad (\text{C.18})$$

which is the Allan variance for rate random walk.

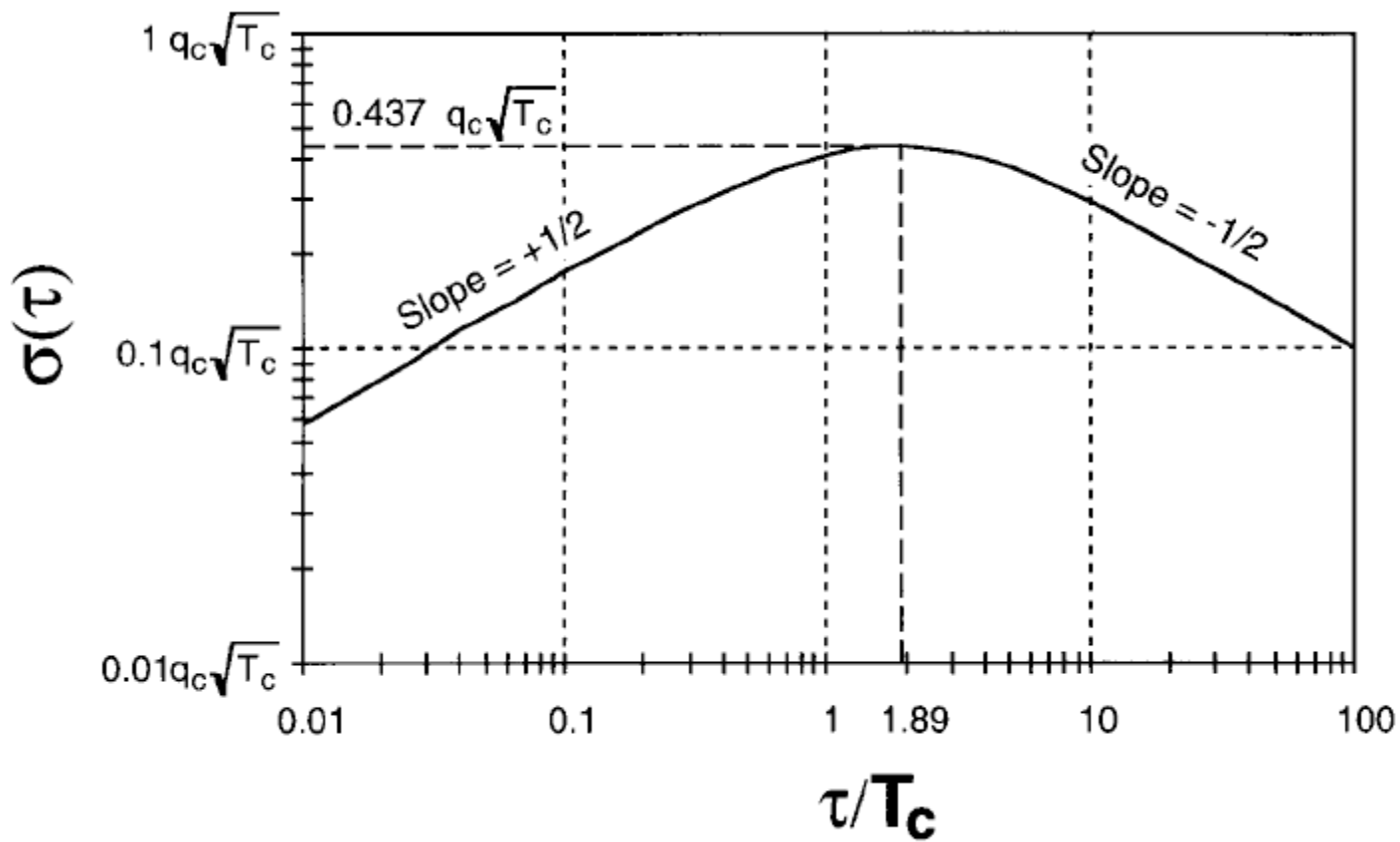


Figure C.6— $\sigma(\tau)$  Plot for correlated noise

### C.1.6.2 Sinusoidal noise

The PSD of this noise is characterized by one or more distinct frequencies. A low-frequency source could be the slow motion of the test platform due to periodic environmental changes. A representation of the PSD of this noise containing a single frequency is given as:

$$S_{\Omega}(f) = \frac{1}{2}\Omega_0^2[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \quad (\text{C.19})$$

where

- $\Omega_0$  is the amplitude
- $f_0$  is the frequency
- $\delta(x)$  is the Dirac delta function

Multiple frequency sinusoidal errors can be similarly represented by a sum of terms such as Equation (C.19) at their respective frequencies and amplitudes. Substitution of Equation (C.19) in Equation (C.1) and performing the integration yields:

$$\sigma^2(\tau) = \Omega_0^2 \left( \frac{\sin^2 \pi f_0 \tau}{\pi f_0 \tau} \right)^2 \quad (\text{C.20})$$

Figure C.7 shows a log-log plot of Equation (C.20). Identification and estimation of this noise in IFOG data requires the observation of several peaks. As is seen however, the amplitudes of consecutive peaks fall off rapidly and may be masked by higher order peaks of other frequencies making observation difficult.

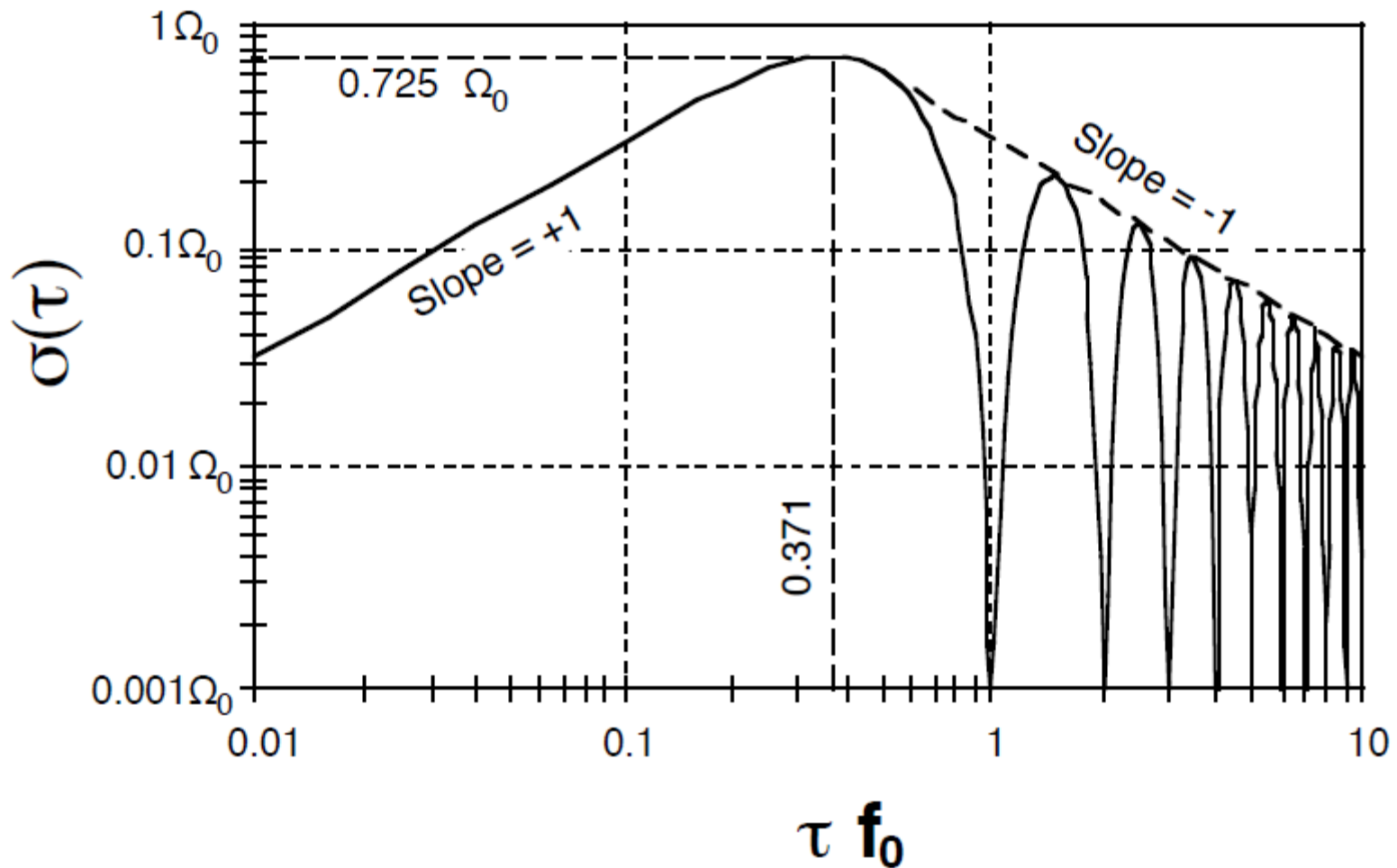


Figure C.7— $\sigma(\tau)$  Plot for sinusoidal error

**О ТОПОЛОГИИ ГРАФИКОВ ВАРИАЦИИ АЛЛАНА  
И ТИПОВЫХ ЗАБЛУЖДЕНИЯХ В ИНТЕРПРЕТАЦИИ СТРУКТУРЫ ШУМОВ ГИРОСКОПОВ  
(На примере докладов Санкт-Петербургской международной конференции  
по интегрированным навигационным системам)**

**Часть I**

**О РАЗЛИЧИИ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ НАКОПЛЕНИЯ ШУМОВ ГИРОСКОПОВ  
В ПЛАТФОРМЕННЫХ И БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ**

**Часть II**

**ТЕХНИКА  $\sigma(\tau)$  ГРАФИКОВ АЛЛАНА  
ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТРУКТУРЫ ШУМОВ ГИРОСКОПОВ**

**Н. И. Кробка<sup>1</sup>**

НИИ прикладной механики имени академика В.И. Кузнецова (филиал ФГУП “ЦЭНКИТ”),  
ООО “Научно-производственная фирма “Эпсилон”,  
Москва, Россия, e-mail: KrobkaNick@msn.com



*Отцам инерциальной навигационной техники  
для ракетно-космических применений  
Чарльзу Старку Дрейперу и Виктору Ивановичу Кузнецову  
и их командам разработчиков  
ПОСВЯЩАЕТСЯ*



**ИТОГИ**

Общая информация

Программный и  
организационный  
комитеты

Важные даты

Организационный  
взносСообщения  
оргокомитетаРешение МПК по  
поданным рефератам

Программа

Круглый стол

**XXII САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
ПО ИНТЕГРИРОВАННЫМ НАВИГАЦИОННЫМ СИСТЕМАМ (МКИНС2015)**  
25-27 мая 2015 г.,  
Санкт-Петербург, Россия

При поддержке:

- Научного Совета Российской Академии Наук по проблемам управления движением и навигации
- Международной общественной организации "Академия Навигации и Управления Движением" (АНУД)
- Американского Института Аэронавтики и Астронавтики (AIAA)
- Института Инженеров по Электротехнике и Электронике (IEEE), США
- Ассоциации Астронавтики и Аэронавтики Франции (AAAF)
- Французского Института Навигации (IFN)
- Немецкого Института Навигации (DGON)
- Российского Фонда Фундаментальных Исследований (РФФИ)

**Как нас найти****Информация для связи****Достопримечательности**

[http://www.elektropribor.spb.ru/cnf/icins2015/disc\\_alan.pdf](http://www.elektropribor.spb.ru/cnf/icins2015/disc_alan.pdf)

[http://www.elektropribor.spb.ru/cnf/icins2015/disc\\_krobka.pdf](http://www.elektropribor.spb.ru/cnf/icins2015/disc_krobka.pdf)





**«... Очень рад, что приехал на эту впечатляющую конференцию, услышал от Николая Кробки много нового о своем методе, чего раньше не знал. Одобряю все предложенное Николаем Кробкой для развития методов идентификации структуры шумов и гироскопов, и многих других приборов ...» (Дэвид Аллан, 27.05.2015).**







НАУЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ  
БИБЛИОТЕКА  
**LIBRARY.RU**

ПОИСК

НАВИГАТОР

#### ЛЕГЕНДА

-  Доступ к полному тексту документа открыт
-  Полный текст доступен на сайте издателя
-  Полный текст может быть получен через систему заказа
-  Доступ к полному тексту закрыт



## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА

### КРОБКА НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ \*

Центр эксплуатации объектов наземной космической инфраструктуры, научно-исследовательский институт прикладной механики имени академика В.И. Кузнецова, отдел 014 перспективных разработок (Москва)

#### ПАРАМЕТРЫ

- ▼ ТЕМАТИКА
- ▼ ЖУРНАЛЫ
- ▼ ОРГАНИЗАЦИИ
- ▼ АВТОРЫ
- ▼ ГОДЫ
- ▼ ТИП ПУБЛИКАЦИИ
- ▼ УЧАСТИЕ В ПУБЛИКАЦИИ

Выбрать:

публикации автора, включенные в РИНЦ

Показывать:

включенные в список работ автора (привязанные) публикации

- учитывать публикации, извлеченные из списков цитируемой литературы ?
- объединять оригинальные и переводные версии статей и переиздания книг ?

Сортировка:

по числу цитирований

Порядок:

по убыванию

Очистить

Поиск

**1** Всего найдено **99** публикаций с общим количеством цитирований: **328**.  
Показано на данной странице: с **1** по **99**.

№

Публикация

Цит.

**1** ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТРУКТУРЫ ШУМОВ ГИРОСКОПОВ

 Кробка Н.И.

 Гироскопия и навигация. 2011. № 1 (72). С. 59-77.

25

**3.**

**Закономерности влияния погрешностей и шумов гироскопов  
на точность инерциальных систем ориентации.**

**Вращение вокруг точки и некоммутативные кинематические эффекты.**

**Полезный анизотропный кинематический эффект.**

**(I этап эстафеты от «физтеха – квантового гироскописта» Николая Кробки)**

**“Николай Иванович!  
Я тебя записал в классики  
и ввел в историю!”  
(С.А. Харламов, 2003)**

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

## Топологическая фаза в классической механике

Г.Б. Малыкин, С.А. Харламов

*История открытия топологической фазы в классической механике рассматривается на периоде времени с середины XIX века по настоящее время. Этот период можно разделить на три этапа. Первый этап, относящийся к середине XIX века, — это изучение кинематики вращения твердого тела. Представлена цепь событий, начинающаяся с теоремы Эйлера о конечном повороте твердого тела и формулы Гаусса об избытке суммы углов сферического многоугольника, продолженная Родригом, доказавшим некоммутативность двух конечных поворотов, и завершившаяся формулировкой и доказательством теоремы о телесном угле Гамильтоном в его "Лекциях по теории кватернионов". Второй этап связан с экспериментальным обнаружением неголономной ошибки гироскопических приборов и его исчерпывающим объяснением, которое принадлежит А.Ю. Ишлинскому. На третьем этапе, начавшемся в 80-х годах XX века, неголономный эффект снова открыт в рамках гамильтонова формализма. На этом этапе центральное место занимает формирование топологической фазы, или дополнительного угла в механической системе, рассматриваемой в переменных "действие – угол".*

PACS numbers: 01.65.+g, 03.65.Vf, 45.40.Cc

### 10. Развитие, обобщение и применения теоремы о телесном угле

Наиболее  
полное представление о некоммутативности вращений  
и ее роли в навигации содержится в работе Н.И. Кробка  
[59].

59. Krobka N I, in *Proc. of the 2nd Saint Petersburg Intern. Conf. on Gyroscopic Technology and Navigation Pt. II* (St. Petersburg, 1995) p. 99

**Алгоритм С.Л. Манделштама:**  
**Если вы не знаете, как подступиться к проблеме,**  
**поручите ее студенту-физтеху и он ее решит**

**В 1979 году в навигационную тематику неожиданно пришел молодой физик-физтех  
и в помощь механикам (разработчикам гироскопов и навигационных систем)  
впервые в мире**

$$\frac{d^2 \bar{R}(t)}{dt^2} \equiv \ddot{\bar{R}}(t) = \ddot{\bar{a}}(t) + \bar{\Gamma}[\bar{R}(t), t] - \bar{\Gamma}(\bar{0}, t)$$

$$\frac{d\bar{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\bar{r}}(t) = \bar{\omega}(t) \times \bar{r}(t);$$

**Доработал до логического завершения  
теорию инерциальной навигации:**

**1. Строгие уравнения ошибок  
БИНС (и платформенных ИНС)  
с учетом всех существенных факторов.**

**2. Аналитические решения  
(в квадратурах) строгих динамических  
уравнений ошибок 2D навигации.**

**3. Новый алгоритм  
“автономно корректируемых” БИНС.**

**4. Строго обоснованные оценки  
квантового предела точности  
БИНС на квантовых гироскопах.**

**Парадоксально, но факт:  
Весь этот задел пригодится  
для построения корректных  
передаточных функций  
атомных интерферометров.**

**“Разобрался с нюансами кинематики  
3D вращения вокруг точки”:**

**1. Различные строгих кинематических  
уравнений ошибок БИНС  
и платформенных ИНС.**

**2. Закономерности влияния шумов и  
погрешностей и гироскопов на точность  
инерциальных систем ориентации.**

**3. Счетное множество некоммутативных  
кинематических эффектов.**

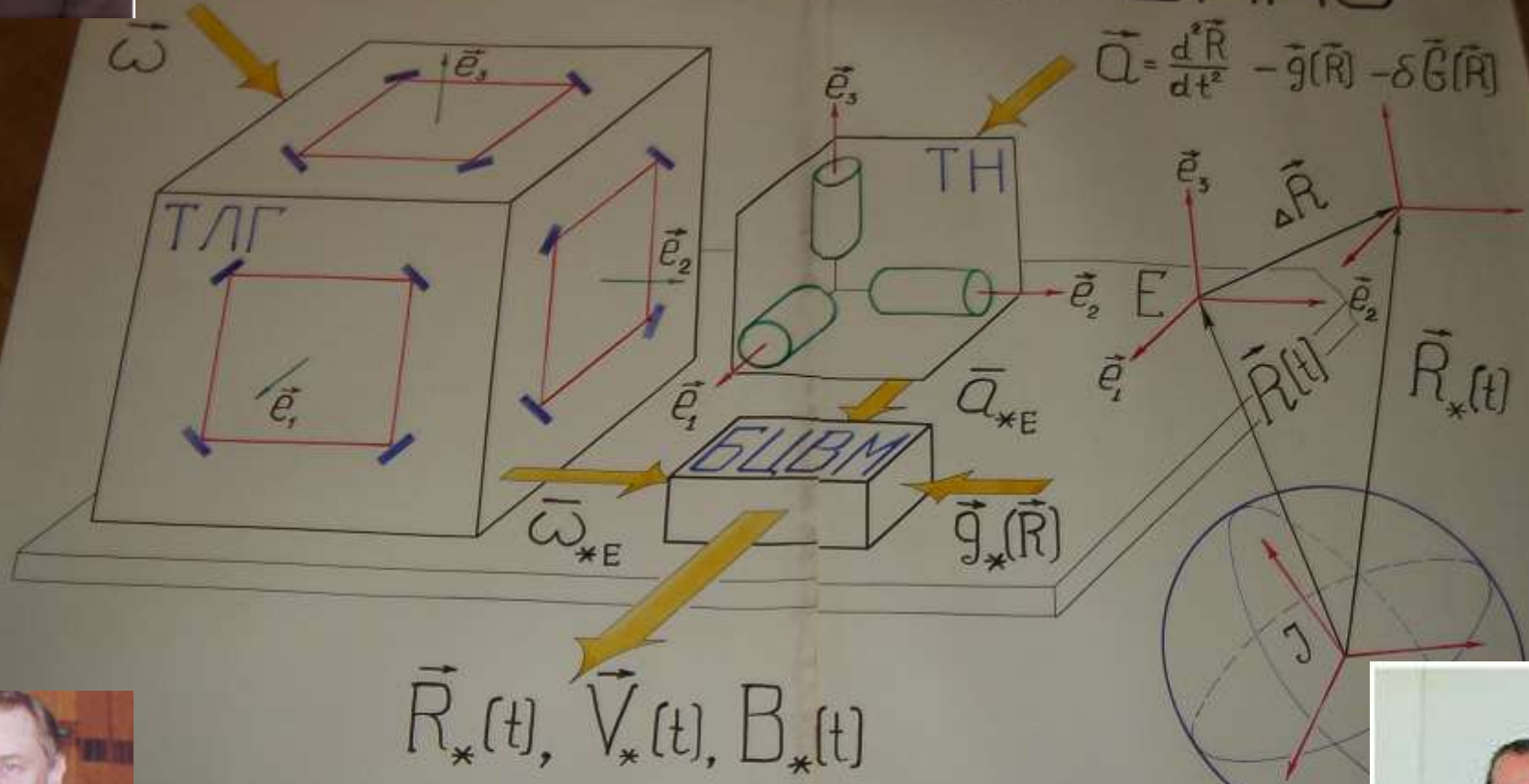
**4. Новый “кинематический” закон  
сохранения и асимметрия вращения  
вокруг точки вправо и влево.**

**Парадоксально, но факт:  
Почти весь этот задел пригодится  
для построения корректных  
моделей ошибок нового поколения  
гироскопов на волнах де Бройля**



Первая задача: Построить строгую теорию БИНС на ЛГ (1979)  
 “Трехосные лазерные гироскопы  
 и теория их применений в бесплатформенных инерциальных системах” (1985)

# МОДЕЛЬ ЛАЗЕРНОЙ БИНС



“Пионерская работа на стыке квантовой электроники и навигации”  
 (официальный отзыв ведущей организации НИИ “Полос”, 1985)

“... с Николаем Ивановичем мы давно знакомы, -  
 по его работам НИИ “Полос” учился правильно строить БИНС на ЛГ”  
 (Дмитриев Валентин Георгиевич, 1990-е)



Н.И.КРОБКА. О некоммутативных кинематических эффектах и их проявлениях в трехосных лазерных гироскопах. Анализируется ряд "паразитных" некоммутативных кинематических эффектов (НКЭ), открытых в процессе исследований особенностей применения трехосных лазерных гироскопов (ТЛГ) в бесплатформенных инерциальных навигационных системах (БИНС). Проводится сравнение НКЭ в ТЛГ с известным эффектом возникновения "неголономных ошибок" в механических гироскопах. Все рассматриваемые эффекты обусловлены некоммутативностью вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. Специфические для ТЛГ НКЭ обусловлены использованием "частотных подставок" (ЧП), применяемых в ЛГ для устранения эффекта "захвата". Предложена классификация НКЭ в ТЛГ.

НКЭ I класса возникают при неидеальной компенсации знакопеременных ЧП в ТЛГ различных типов (на основе трех одноосных ЛГ с виброподставкой, в ТЛГ с оптико-электронными устройствами создания ЧП) и состоят в возникновении возрастающей во времени ошибки определения пространственной ориентации в БИНС при ограниченной во времени ошибке измерения угла кажущегося поворота в каждом из трех каналов ТЛГ.

НКЭ II класса возникают в ТЛГ с подвижными относительно корпуса БИНС осями чувствительности (ЧП создается колебаниями при вращении ТЛГ в целом вокруг фиксированной оси) при возмущении программного плоского вращения ТЛГ и состоят в том, что финитное возмущение (коническое движение основания, бой оси и т.п.) приводит к возникновению линейных по амплитуде углового возмущения составляющих смещения нулей информационных каналов ТЛГ. Этот класс НКЭ, в частности, не позволяет проводить калибровку систематических составляющих погрешностей ТЛГ для одного отдельно взятого канала ТЛГ, т.е. без использования информации ТЛГ в целом и интегрирования кинематических уравнений. Обнаружено различие помехозащищенности ТЛГ с одним общим вибратором (малые углы колебаний 2-5 угл.мин) и ТЛГ на реверсивно-вращающемся основании (большие углы поворотов  $2\pi$  рад) относительно симметричных и несимметричных возмущений.

НКЭ III класса возникают при фильтрации измеряемой абсолютно угловой скорости из-за квантования информационных сигналов ЛГ по уровню и по времени и состоят в том, что нефинитные вращения объекта могут быть полностью не наблюдаемы, либо измеряться с накапливающейся во времени погрешностью. НКЭ III класса имеют место не только для ЛГ, но и для интегрирующих гироскопов других типов.

Приведены рекомендации по устранению НКЭ в ТЛГ и их применениях.

Предельно достижимая точность БИНС при движении с единичной перегрузкой за 1 час составляет:

- на ЛГ при  $D^{1/2} = (3-4) \cdot 10^{-4}$  град/час $^{1/2}$  – (55-75) м [15, 135];
- на ВОГ при  $D^{1/2} = 5 \cdot 10^{-5}$  град/час $^{1/2}$  – 10 м [9, 10];
- на АИ на волнах де Бройля (АИВБ) при  $D^{1/2} = 3 \cdot 10^{-6}$  град/час $^{1/2}$  – менее 1 м [10].

**Кробка, Н. И. Концепция строгих уравнений ошибок и оценки квантовых пределов точности бесплатформенных инерциальных навигационных систем на лазерных гироскопах, волоконно-оптических гироскопах и атомных интерферометрах на волнах де Бройля / Н. И. Кробка // Гироскопия и навигация. – 2010. – № 3. – С. 88.**

**Krobka, N. I. Estimating Quantum Limits on SINS Accuracy Based on Accurate Error Equations / N. I. Krobka // Gyroscopy and Navigation. – 2014. – Vol. 5. No. 1. – Pp. 9-19.**



**О ТОПОЛОГИИ ГРАФИКОВ ВАРИАЦИИ АЛЛАНА  
И ТИПОВЫХ ЗАБЛУЖДЕНИЯХ В ИНТЕРПРЕТАЦИИ СТРУКТУРЫ ШУМОВ ГИРОСКОПОВ  
(На примере докладов Санкт-Петербургской международной конференции  
по интегрированным навигационным системам)**

**Часть I**

**О РАЗЛИЧИИ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ НАКОПЛЕНИЯ ШУМОВ ГИРОСКОПОВ  
В ПЛАТФОРМЕННЫХ И БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ**

**Часть II**

**ТЕХНИКА  $\sigma(\tau)$  ГРАФИКОВ АЛЛАНА  
ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТРУКТУРЫ ШУМОВ ГИРОСКОПОВ**

**Н. И. Кробка<sup>1</sup>**

НИИ прикладной механики имени академика В.И. Кузнецова (филиал ФГУП “ЦЭНКИТ”),  
ООО “Научно-производственная фирма “Эпсилон”,  
Москва, Россия, e-mail: KrobkaNick@msn.com

*Отцам инерциальной навигационной техники  
для ракетно-космических применений  
Чарльзу Старку Дрейнеру и Виктору Ивановичу Кузнецову  
и их командам разработчиков  
ПОСВЯЩАЕТСЯ*

▶ [Выпуски](#)

▶ [Авторам](#)

▶ [Конкурсы](#)

▶ [Конференции](#)

▶ [О журнале](#)

- ♦ [Общая информация](#)
- ♦ [Редакционный совет](#)
- ♦ [Список авторов](#)
- ♦ [Публикационная этика](#)
- ♦ [Контакты](#)

Рекомендуем

## Кробка Николай Иванович



**Город:** Москва

**Степень:** кандидат физико-математических наук

**Место работы:** НИИ прикладной механики имени академика В. И. Кузнецова (филиал ФГУП «Центр эксплуатации объектов наземной космической инфраструктуры»)

**Должность:** главный научный сотрудник

[Список трудов](#)

99

Публикаций в РИНЦ

10

Индекс Хирша

0

Индекс SCOPUS

2

Публикаций в журнале

## Статьи автора

🌐 [Международная публикация](#)

[О новом не замеченном за всю историю инерциальной навигации различии закономерностей накопления шумов гироскопов в платформенных и бесплатформенных инерциальных системах \(35 лет спустя\)](#)

🌐 [Международная публикация](#)

[Стратегия решения открытых задач и асимметрия вращения вокруг точки вправо и влево](#)

## **О новом не замеченном за всю историю инерциальной навигации различии закономерностей накопления шумов гироскопов в платформенных и бесплатформенных инерциальных системах (35 лет спустя)**

*Кробка Н. И. О новом не замеченном за всю историю инерциальной навигации различии закономерностей накопления шумов гироскопов в платформенных и бесплатформенных инерциальных системах (35 лет спустя) // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2015. – Т. 13. – С. 4586–4590. – URL: <http://e-koncept.ru/2015/85918.htm>.*

[Полный текст статьи](#)

[Читать онлайн](#)

[Статья в РИНЦ](#)

ART 85918

Автор:  Н. И. Кробка

Просмотров: 804

В статье впервые в мире представлен новый кинематический эффект: «Точность определения ориентации платформенной инерциальной навигационной системой и бесплатформенной инерциальной навигационной системой, построенных на одних и тех же гироскопах, различается даже при тождественно совпадающих погрешностях и шумах гироскопов в составе платформенной инерциальной навигационной системы и бесплатформенной инерциальной навигационной системы». Одно из проявлений этого эффекта: «Шумы гироскопов с равными нулю значениями спектральной плотности мощности шума на нулевой частоте не приводят к существенному росту ошибки ориентации платформенной инерциальной навигационной системы (эффект второго порядка "малости"), но приводят к весьма существенному росту ошибки ориентации бесплатформенной инерциальной навигационной системы (эффект первого порядка "малости")» Различие парциальных вкладов таких шумов в точность ориентации платформенных и бесплатформенных инерциальных навигационных систем составляет порядки (в 10, 100, 1000 и в большее число раз) в зависимости от структуры шумов гироскопов и вида вращения объекта.

Ключевые слова: шумы гироскопов, инерциальные навигационные системы, ориентация, точность

$$\begin{array}{ccc} & A(\bar{\omega}_E) & \\ I & \rightarrow & E \end{array}$$

(2.1)

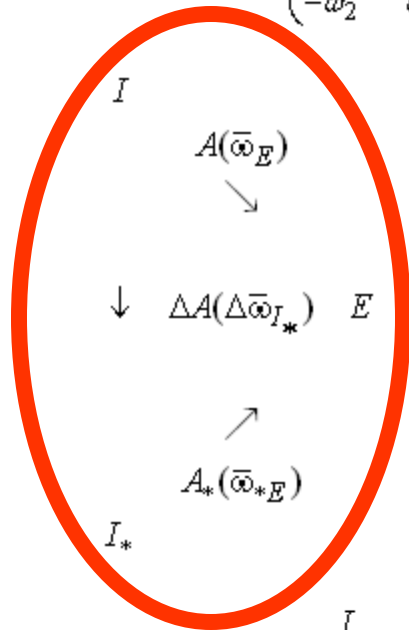
$$E(t) = \{\bar{e}_1(t), \bar{e}_2(t), \bar{e}_3(t)\} \equiv E; \quad E(t)|_{t=0} = \{\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3\} = I;$$

$$A = A(t) = \|(\bar{e}_m(t) \cdot \bar{i}_n)\|; \quad A^{-1} = A^T = B = B(t) = \|(\bar{i}_m \cdot \bar{e}_n(t))\|; \quad \det A = \det B = +1;$$

$$\bar{\omega}(t) = \sum_{p=1}^3 \omega_p(t) \bar{i}_p = \sum_{q=1}^3 \omega'_q(t) \bar{e}_q(t) \rightarrow \bar{\omega}_I(t) \equiv (\omega_1(t) \omega_2(t) \omega_3(t))^T; \quad \bar{\omega}_E(t) \equiv (\omega'_1(t) \omega'_2(t) \omega'_3(t))^T.$$

$$\dot{A} = -\Omega(\bar{\omega}_E)A \Leftrightarrow \dot{B} = B\Omega(\bar{\omega}_E) \Leftrightarrow \dot{A} = -A\Omega(\bar{\omega}_I) \Leftrightarrow \dot{B} = \Omega(\bar{\omega}_I)B; \quad A|_{t=0} = B|_{t=0} = I_0;$$

$$\Omega(\bar{\omega}_E) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_3 & \omega'_2 \\ \omega'_3 & 0 & -\omega'_1 \\ -\omega'_2 & \omega'_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Omega(\bar{\omega}_I) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Omega(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



$$\bar{\omega}_{*E} = \bar{\omega}_E + \delta \bar{\omega}_E \Rightarrow$$

$$A(\bar{\omega}_E) = A_*(\bar{\omega}_{*E}) \Delta A(\Delta \bar{\omega}_{I_*}) \Rightarrow \Delta A(\Delta \bar{\omega}_{I_*}) = B_*(\bar{\omega}_{*E}) A(\bar{\omega}_E);$$

$$\bar{\omega}_E = \bar{\omega}_{*E} + A_*(\bar{\omega}_{*E}) \Delta \bar{\omega}_{I_*} \Rightarrow \Delta \bar{\omega}_{I_*} = -B_*(\bar{\omega}_{*E}) \delta \bar{\omega}_E; \quad \Delta \bar{\omega}_I = -B(\bar{\omega}_E) \delta \bar{\omega}_E;$$

$$B_*(\bar{\omega}_{*E}) = A_*(\bar{\omega}_{*E})^{-1}; \quad B(\bar{\omega}_E) = A(\bar{\omega}_E)^{-1}.$$

$$\begin{array}{ccc} & \Delta A(\Delta \bar{\omega}_{I_*}) & \\ I & \rightarrow & I_* \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} & \Delta A(\Delta \bar{\omega}_I) & \\ I & \rightarrow & I_* \end{array}$$

$$\Delta \bar{\omega}_{I_*} = -B_*(\bar{\omega}_{*E}) \delta \bar{\omega}_E \qquad \Delta \bar{\omega}_I = -B(\bar{\omega}_E) \delta \bar{\omega}_E$$

$$\begin{array}{ccc}
 & A(\bar{\omega}_E) & \\
 A'(\bar{\omega}_J) & & B''(\bar{\omega}_E'') \\
 I \rightarrow & J & \leftarrow E
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 A(\bar{\omega}_E) &= A''(\bar{\omega}_E'')A'(\bar{\omega}_J); \\
 \bar{\omega}_E &= \bar{\omega}_E'' + A''(\bar{\omega}_E'')\bar{\omega}_J; \\
 B''(\bar{\omega}_E'') &= A''(\bar{\omega}_E'')^{-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & A'(\bar{\omega}_J) & \\
 I \rightarrow & J &
 \end{array}$$

$J$

$$\begin{array}{c}
 A'(\bar{\omega}_J) \\
 \nearrow
 \end{array}$$

$$A'_*(\bar{\omega}_{*J_*}) = \Delta A'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})A'(\bar{\omega}_J) \Rightarrow \Delta A'(\Delta \bar{\omega}_{J_*}) = A'_*(\bar{\omega}_{*J_*})B'(\bar{\omega}_J);$$

$$\bar{\omega}_{*J_*} = \Delta \bar{\omega}_{J_*} + \Delta A'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})\bar{\omega}_J \Rightarrow$$

$$I \quad \downarrow \Delta A'(\Delta \bar{\omega}_{J_*}); \quad \Delta \bar{\omega}_{J_*} = \bar{\omega}_{*J_*} - \Delta A'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})\bar{\omega}_J = \bar{\omega}_{*J_*} - \bar{\omega}_{J_*} = \bar{\omega}_{J_*} + \delta \bar{\omega}_{J_*} - \bar{\omega}_{J_*} = \delta \bar{\omega}_{J_*};$$

$$\begin{array}{c}
 A'_*(\bar{\omega}_{*J_*}) \\
 \searrow
 \end{array}$$

$$\Delta \bar{\omega}_J = \Delta B'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})\Delta \bar{\omega}_{J_*} = \Delta B'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})\delta \bar{\omega}_{J_*}.$$

$$B'(\bar{\omega}_J) = A'(\bar{\omega}_J)^{-1}; \quad \Delta B'(\Delta \bar{\omega}_{J_*}) = \Delta A'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})^{-1}.$$

$J_*$

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta A'(\Delta \bar{\omega}_{J_*}) & & \Delta A'(\Delta \bar{\omega}_J) \\
 J \rightarrow & J_* & \Leftrightarrow J \rightarrow J_* \\
 \Delta \bar{\omega}_{J_*} = \delta \bar{\omega}_{J_*} & & \Delta \bar{\omega}_J = \Delta B'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})\delta \bar{\omega}_{J_*}
 \end{array}$$

$J \equiv I$

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta A'(\Delta \bar{\omega}_{J_*}) & & \\
 I \rightarrow & J_* & \\
 \Delta \bar{\omega}_{J_*} = \delta \bar{\omega}_{J_*} & &
 \end{array}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta A'(\Delta \bar{\omega}'_J) & & \\
 I \rightarrow & J_* &
 \end{array}$$

$$\Delta \bar{\omega}'_J = \Delta B'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})\delta \bar{\omega}_{J_*}$$

$$\Delta \bar{\omega}_J = \Delta B'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})\delta \bar{\omega}_{J_*} \rightarrow \Delta \bar{\omega}'_J = \Delta B'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})\delta \bar{\omega}_{J_*}$$

УДК 531.1

**НЕКОММУТАТИВНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ ВРАЩЕНИЯ  
ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ТОЧКИ И ИХ ПРОЯВЛЕНИЯ В ОСОБЕННОСТЯХ  
ПОСТРОЕНИЯ БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ СИСТЕМ ОРИЕНТАЦИИ  
НА ЛАЗЕРНЫХ И ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИХ ГИРОСКОПАХ**

© 2011 г.

*Н.И. Кробка*

НИИ прикладной механики им. В.И. Кузнецова – филиал Центра эксплуатации объектов  
космической инфраструктуры, Москва

KrobkaNick@msn.com

*Поступила в редакцию 16.05.2011*

Представлены некоммутативные кинематические эффекты вращения твердого тела вокруг точки, замеченные автором (за период 1980–2010 годов) в процессе исследований и разработок бесплатформенных инерциальных систем ориентации и бесплатформенных инерциальных навигационных систем на лазерных гироскопах и волоконно-оптических гироскопах, а также при выяснении физического эффекта, препятствующего интегрируемости в квадратурах кинематических уравнений.

*Ключевые слова:* твердое тело, вращение, некоммутативность, кинематические уравнения, интегрируемость, бесплатформенная инерциальная система, лазерный гироскоп, волоконно-оптический гироскоп.

Модель твердого тела (ТТ), вращающегося вокруг точки, – одна из центральных в теории бесплатформенных инерциальных систем ориентации (БИСО) и бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС). В кинематике вращений ТТ вокруг точки [1, 2] некоммутативность проявляется во многих наблюдаемых эффектах. Известна некоммутативность конечных поворотов [3], ТТ может поворачиваться вокруг оси в случае, если проекция вектора угловой скорости (ВУС) на эту ось строго равна нулю (теорема А.Ю. Ишлинского «О телесном угле» [4, 5] и ее обобщения [6]). В процессе исследований и разработок БИСО и БИНС на лазерных гироскопах (ЛГ) и волоконно-оптических гироскопах (ВОГ) автором были замечены (за период 1980–2010 годов) некоммутативные кинематические эффекты (НКЭ), не сводящиеся к ранее известным эффектам [7–19]. Множество этих НКЭ представлено в систематизированном виде.

### Классификация некоммутативных кинематических эффектов

Решения кинематических уравнений (КУ) представляются сходящимися рядами последовательных приближений (РПП). НКЭ называется НКЭ  $N$ -го порядка, если для его обнаружения необходимо  $N$  приближений РПП, т.е. учет членов РПП  $n \in [1, N - 1]$  не обнаруживает НКЭ  $N$ -го порядка [14, 18]. НКЭ  $N$ -го порядка не сводятся к НКЭ более низких порядков. Неголономные ошибки [4, 5] (топологические фазы [20]) – это НКЭ второго порядка ( $N = 2$ ). Пример НКЭ произвольного  $N$ -го порядка: проекции ВУС – производные  $(N - 1)$ -го порядка от белых шумов (и иных стационарных процессов), при этом угол эйлера поворота (УЭП) возрастает во времени, но учесть рост УЭП можно только в  $N$ -м приближении РПП решений КУ [18].

### Проблема интегрируемости кинематических уравнений в квадратурах

На основании симметрии КУ Эйлера – Пуассона [16]: «неподвижный/вращающийся наблюдатель – вращение вправо/влево» угловая ориентация ТТ в общем случае произвольно изменяющегося во времени и в пространстве ВУС выражена в конечном виде в терминах проекций ВУС и вектора углового ускорения на оси связанной и неподвижной систем координат (СК) [15, 16]. Если заданы проекции ВУС только в связанной или в неподвижной СК, решения КУ в общем случае в квадратурах не известны. Препятствием интегрируемости КУ является НКЭ 3-го порядка – асимметрия вращения вправо и влево. Вращения, отличающиеся знаком («+» и «-») проекций ВУС, асимметричны (в случае и только в случае некомпланарного ВУС в связанной либо в неподвижной СК) – УЭП вращений вправо и влево ( $s_+$  и  $s_-$ ) не совпадают при вращениях вокруг точки ( $s_+ \neq s_-$ ) в отличие от вращения вокруг оси. Этот НКЭ препятствует интегрируемости КУ в прямом смысле: если бы не было асимметрии вращений вправо и влево, то КУ интегрировались бы в квадратурах. Асимметрия вращений ТТ вправо и влево демонстрируется парами последовательностей конечных поворотов, моделирующих вращения с некомпланарным ВУС [18]:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1(\pm\pi/2) \rightarrow \mathbf{e}_2(\pm\pi/2) \rightarrow \mathbf{e}_3(\pm\pi/2) \rightarrow \\ \rightarrow \mathbf{e}_2(\pm\pi/2) \rightarrow \mathbf{e}_3(\pm\pi) \Rightarrow s_+ \neq s_-, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1(\pm\pi/2) \rightarrow \mathbf{i}_2(\pm\pi/2) \rightarrow \mathbf{i}_3(\pm\pi/2) \rightarrow \\ \rightarrow \mathbf{i}_2(\pm\pi/2) \rightarrow \mathbf{i}_3(\pm\pi) \Rightarrow s_+ \neq s_-. \end{aligned} \quad (2)$$

$\mathbf{e}_k(\varphi)$  – поворот на угол  $\varphi$  вокруг оси  $\mathbf{e}_k$  связанной СК,  $\mathbf{i}_n(\varphi)$  – вокруг оси  $\mathbf{i}_n$  ( $k, n = 1, 2, 3$ ) неподвижной СК.

## Закономерности влияния погрешностей и шумов гироскопов на точность инерциальных систем ориентации

$$\begin{aligned} 1) \Delta s_0(t) \equiv \delta\theta_0(t) &= [\delta\bar{\theta}_E^T(t) \cdot \delta\bar{\theta}_E(t)]^{1/2}; & 2) \Delta s_0(t) \equiv \Delta\theta_0(t) &= [\Delta\bar{\theta}^T(t) \cdot \Delta\bar{\theta}(t)]^{1/2}; \\ 3) \Delta s_0(t) \equiv \Delta N_0(t) &= [\Delta\bar{N}^T(t) \cdot \Delta\bar{N}(t)]^{1/2}. \end{aligned}$$

[52] **Кробка, Н. И.** Accurate error equations of the strapdown inertial navigation systems / N. I. Krobka // The Second Soviet-Chinese Symposium of Inertial Technology (Saint Petersburg, 1991, October 9-15) / Chief editor – corresponding member of the Russia’s Academy of sciences V. G. Peshekhonov. – Saint Petersburg: The Scientific Council on Problems of Motion Control and Navigation of the Academy of Sciences (Section of Autonomous Navigation and Sensors). Chinese Society of Inertial Technology. CSRI “Electropribor”, 1992. – Pp. 43-50.

[58] **Кробка, Н. И.** Особенности применения трехосных лазерных гироскопов в бесплатформенных инерциальных навигационных системах / Н. И. Кробка // IV Российско-китайский симпозиум по инерциальной технике (Санкт-Петербург, 27 октября – 1 октября 1993г.). Российская часть. – СПб.: Санкт-Петербургская секция Научного совета РАН по проблемам управления движением и навигации. Китайское общество по инерциальной технике, 1993. – С. 60-71.

[60] **Кробка, Н. И.** Работы по лазерной гироскопии в научно-исследовательском институте прикладной механики имени академика В. И. Кузнецова / Н. И. Кробка, И. Н. Сапожников // I Санкт-Петербургская международная конференция по гироскопической технике. – СПб.: Отделение проблем машиностроения, механики и процессов управления РАН. ЦНИИ «Электроприбор», 1994. – С. 3-13.



Кинематические уравнения ошибок БИНС имеют вид:

$$\Delta \dot{B} = \mu \cdot \Omega(\Delta \bar{\omega}_I) \cdot \Delta B; \quad \Delta \bar{\omega}_I = -B \cdot \delta \bar{\omega}_E; \quad \Delta B|_{t=0} = \delta B_0, \quad (2.13)$$

где  $\mu$  - безразмерный "малый" параметр ( $\mu=1$ ).

Решение уравнения (2.13) можно представить в виде равномерно и абсолютно сходящегося ряда последовательных приближений

$$\Delta B = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \Delta B_n = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\pi}^n \delta B_0; \quad \hat{\pi} \cdot m(\tau) = \mu \int_0^t \Omega(\tau) m(\tau) d\tau; \quad \Omega(\tau) = \Omega(\Delta \bar{\omega}_I(\tau)). \quad (2.14)$$

Вектор  $\Delta \bar{s}$  погрешности ориентации удобно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\Delta \bar{s}(t) = \Delta \bar{\theta}(t) + \Delta \bar{N}(t); \quad \Delta \bar{\theta}(t) = - \int_0^t B(\tau) \cdot \delta \bar{\omega}_E(\tau) \cdot d\tau, \quad (2.15)$$

отделяя вклад первого ( по параметру  $\mu$  ) приближения  $\Delta \bar{\theta}(t)$  и всех последующих приближений  $\Delta \bar{N}(t)$ , учитываемых при интегрировании точных уравнений ошибок (2.13).

При анализе решений (2.14), как правило, достаточно ограничиться вторым приближением ( по параметру  $\mu$  ). При этом

$$\Delta \bar{s}(t) \cong \mu \int_0^t \Delta \bar{\omega}_I(\tau) d\tau + \mu^2 \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} d\tau' \Delta \bar{\omega}_I(\tau') \times \Delta \bar{\omega}_I(\tau), \quad (2.16)$$

(исключение составляет случай случайных процессов  $\Delta \bar{\omega}_I(\tau)$  со спектральной плотностью  $G(\nu) \approx \nu^{2n}$ , для которых возрастание во времени погрешности определения ориентации можно учесть только с учетом (n+1)-приближения (2.14)).

Анализ решений кинематических уравнений ошибок для различных типов пространственных вращений  $B(t)$  и различных составляющих модели ошибок  $\delta \bar{\omega}_E(t)$  устанавливает, что парциальные вклады различных погрешностей ТЛГ в результирующую ошибку определения пространственной ориентации возрастают во времени в соответствии с одним из трех типов закономерностей накопления ( для произвольного вращения объекта):

$$\begin{aligned} 1) \Delta s_0(t) \cong \delta \theta_0(t) &= [\delta \bar{\theta}_E^T(t) \cdot \delta \bar{\theta}_E(t)]^{1/2}; & 2) \Delta s_0(t) \cong \Delta \theta_0(t) &= [\Delta \bar{\theta}^T(t) \cdot \Delta \bar{\theta}(t)]^{1/2}; \\ 3) \Delta s_0(t) \cong \Delta N_0(t) &= [\Delta \bar{N}^T(t) \cdot \Delta \bar{N}(t)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

▶ [Выпуски](#)

▶ [Авторам](#)

▶ [Конкурсы](#)

▶ [Конференции](#)

▶ [О журнале](#)

- ◆ [Общая информация](#)
- ◆ [Редакционный совет](#)
- ◆ [Список авторов](#)
- ◆ [Публикационная этика](#)
- ◆ [Контакты](#)

Рекомендуем

## Кробка Николай Иванович



**Город:** Москва

**Степень:** кандидат физико-математических наук

**Место работы:** НИИ прикладной механики имени академика В. И. Кузнецова (филиал ФГУП «Центр эксплуатации объектов наземной космической инфраструктуры»)

**Должность:** главный научный сотрудник

[Список трудов](#)

**99**

Публикаций в РИНЦ

**10**

Индекс Хирша

**0**

Индекс SCOPUS

**2**

Публикаций в журнале

## Статьи автора

🌐 [Международная публикация](#)

[О новом не замеченном за всю историю инерциальной навигации различии закономерностей накопления шумов гироскопов в платформенных и бесплатформенных инерциальных системах \(35 лет спустя\)](#)

🌐 [Международная публикация](#)

[Стратегия решения открытых задач и асимметрия вращения вокруг точки вправо и влево](#)

**Кробка Николай Иванович,**

кандидат физико-математических наук, главный научный сотрудник НИИ прикладной механики имени академика В. И. Кузнецова (филиал ФГУП «Центр эксплуатации объектов наземной космической инфраструктуры»), г. Москва  
[KrobkaNick@msn.com](mailto:KrobkaNick@msn.com)

## Стратегия решения открытых задач и асимметрия вращения вокруг точки вправо и влево

**Аннотация.** В статье впервые представлена стратегия решения открытых задач, т. е. проблем, ни метод, ни алгоритм решения которых не известны. В основе этой стратегии - формализованная в процессе целевого эксперимента диалектика мышления человека. Приведен конкретный пример практического применения стратегии решения открытых задач из области научных интересов автора (гироскопия и навигация), иллюстрирующий ее эффективность.

**Ключевые слова:** проблема, стратегия, логика, диалектика, мышление человека.



100-летним юбилеям академиков АН СССР  
Виктора Ивановича Кузнецова  
и Александра Юльевича Ишлинского  
посвящается

«Держись, "борода"!

Мои "чудаки" не понимают. Но лазерный гироскоп нужно сделать!  
К своим теоретическим работам позже обязательно вернись».  
(Академик В.И. Кузнецов, 1986 год [1])

«Николай Иванович!

Вы обязаны объяснить всем:  
в результате каких именно рассуждений  
Вы заметили асимметрию вращения твердого тела  
вокруг точки вправо и влево – асимметрию механики!»  
(Академик А.Ю. Ишлинский, 1993 год [2])

**Введение.** Человек мыслит логично и диалектично. Это общеизвестно.

Кробка Н. И.

Особенности бесплатформенных инерциальных систем ориентации на основе трехосных волоконно-оптических гироскопов с одним общим источником излучения



Юбилейная XV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам (26-28 мая 2008 г., Санкт-Петербург, Россия)

### The Features of the Strapdown Inertial Orientation Systems Based on Three-Axis Fiber-Optic Gyroscopes with one Common Light Source

N.I. Krobka  
Branch of the Center for Ground-Based Space Instruments Facilities Operation Scientific & Research Institute for Applied Mechanics named after Academician V.I. Kuznetsov

#### WHY FIBER OPTIC GYRO?

Design	Integration	Output	Common

**THE FEATURES OF FOGs:**  
(0.0001-0.001) deg/hr (USA)  
**DRAPER** **Honeywell**  
NORTHROP GRUMMAN  
(0.0001-0.001) deg/hr (European Union)  
**IXSPACE** **IXSEA**  
(0.0001-0.001) deg/hr (China)  
**CHINA** **CHINA** **CHINA**  
(0.001-0.1) deg/hr (Russia)

**Honeywell Performance Characteristics:**  
• Bias Stability:  $\pm 0.001$  deg/hr  
• RRM: 0.01% (0.0001) deg/hr  
• WVR:  $\pm 0.0001$  arc-sec/Hz  
• FS: 1% peak continuous,  $\pm 10$  sec  
• Overrange: 100% peak/20 sec  
• SF Stability:  $\pm 0.001$  deg/hr

**RESEARCH CONCLUSIONS:**  
The FOG is designed for applications requiring improved operational accuracy of the strapdown INS. The FOG 2000 offers an improved design incorporating 2000 Hz.

**IMU 200** **IMU 600**  
NORTHROP GRUMMAN  
US Patent 5,811,025  
US Patent 6,115,855

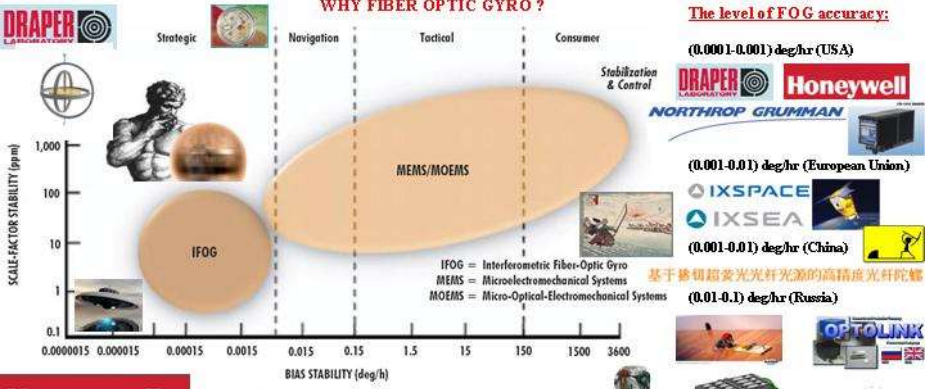
**THEORETICAL CONCEPTS:**  
A single...  
Traditional...  
FOG error model:  
$$\delta \theta = \delta \omega \cdot t + \delta \ddot{\omega} \cdot \frac{t^2}{2} + \delta \dddot{\omega} \cdot \frac{t^3}{6}$$
  
The methodical conception:  
$$\delta \theta = \delta \omega \cdot t + \delta \ddot{\omega} \cdot \frac{t^2}{2} + \delta \ddot{\omega} \cdot \frac{t^3}{6}$$
  
An accurate SINS error kinematic equations:  
$$\dot{\delta \theta} = \delta \omega + \delta \ddot{\omega} \cdot t + \delta \ddot{\omega} \cdot \frac{t^2}{2}$$
  
Practical approximation:  
$$\delta \theta = \delta \omega \cdot t + \delta \ddot{\omega} \cdot \frac{t^2}{2}$$
  
The ratio of dispersions of errors:  
$$\frac{\sigma_{\delta \theta}}{\sigma_{\delta \omega}} = \sqrt{\frac{t^2}{3}}$$
  
Practical effect:  
$$\Delta \theta = 0 \text{ or } \Delta \theta = \dots$$
  
Fig. 1. Advantage of strapdown

THE FEATURES OF THE STRAPDOWN INERTIAL ORIENTATION SYSTEMS  
BASED ON THREE-AXIS FIBER-OPTIC GYRO  
WITH ONE COMMON LIGHT SOURCE

N. I. Krobka

Branch of the Center for Ground-Based Space Infrastructure Facilities Operation  
Scientific & Research Institute for Applied Mechanics named after academician V.I. Kuznetsov

WHY FIBER OPTIC GYRO ?



The level of FOG accuracy:

- (0.0001-0.001) deg/hr (USA)
- (0.001-0.01) deg/hr (European Union)
- (0.001-0.01) deg/hr (China)
- (0.01-0.1) deg/hr (Russia)

**Performance Characteristics:**

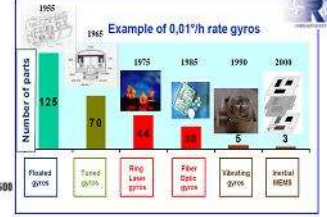
- Bias Stability: <0.0003 deg/hr
- ARW (EOL): <0.0001 deg/hr
- AWN: <0.0004 arc-sec/rt-HZ
- Ps (10 years continuous): >0.996
- Quantization: 1.0004 arc-sec/LSB
- SF Stability: <1ppm (short term)

基于掺铒超变光纤光源的高精度光纤陀螺

High precision fiber optic gyroscope based on Er-doped superfluorescent fiber source

针对高精度光纤陀螺的需求,采用一种在1550nm波段长波反射镜截止型薄膜微腔谐振腔制造高性能掺铒超变光纤光源,通过仿真确定了微腔腔体的特征参数。在-40℃~+60℃的温度范围内,光源中心波长稳定性为±50×10<sup>-6</sup>nm,输出功率稳定性优于1%。研究了该光源的强度噪声,并采用一种噪声抑制技术对光源噪声进行抑制,光源的强度噪声系数减小到0.2%。在此基础上,研制出高精度掺铒超变光纤陀螺器件,器件方量分析显示,研制的器件精度为0.0045°/h,随机游走系数为0.0035°/√h,解调因素系数小于11×10<sup>-6</sup>,已能满足高精度惯性系统的要求。

This FOG is designed for applications requiring exceptional accuracy or low noise. The FOG 2500's optics are designed for radiation dosage approaching 100 k rad.



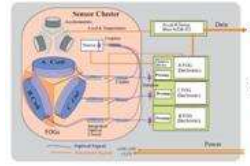
IMU 200



NORTHROP GRUMMAN IMU 600



US Patent 5184195  
US Patent 4815853



A single-source & single-source and single-detector configuration (SSC)

$$K_{SSC}(t_1, t_2)_{SSC} = \langle \delta\bar{\omega}(t_1) \delta\bar{\omega}^T(t_2) \rangle - \langle \delta\bar{\omega}(t_1) \rangle \langle \delta\bar{\omega}^T(t_2) \rangle = \begin{pmatrix} k_{11}(t_1, t_2) & k_{12}(t_1, t_2) & k_{13}(t_1, t_2) \\ k_{21}(t_1, t_2) & k_{22}(t_1, t_2) & k_{23}(t_1, t_2) \\ k_{31}(t_1, t_2) & k_{32}(t_1, t_2) & k_{33}(t_1, t_2) \end{pmatrix}$$

Traditional configuration (TC), i.e. three autonomous single-axes FOG

$$K_{SSC}(t_1, t_2)_{TC} = \langle \delta\bar{\omega}(t_1) \delta\bar{\omega}^T(t_2) \rangle - \langle \delta\bar{\omega}(t_1) \rangle \langle \delta\bar{\omega}^T(t_2) \rangle = \begin{pmatrix} k_{11}(t_1, t_2) & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}(t_1, t_2) & 0 \\ 0 & 0 & k_{33}(t_1, t_2) \end{pmatrix}$$

TFOG errors model

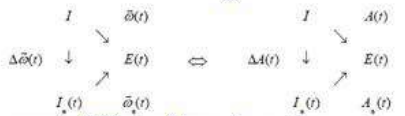
$$\delta\bar{\omega}_P(t) = \alpha(t) + M(t)\bar{\omega}(t) + \eta(t); \quad \alpha(t) \equiv \sum_{a=1}^{N_a} \alpha_a(t, \zeta_a); \quad M(t)\bar{\omega}(t) \equiv \sum_{m=1}^{N_m} M_m(t, \zeta_m) \bar{\omega}_m(t); \quad \eta(t) \equiv \sum_{g=1}^{N_g} \eta_g(t, \bar{\omega}_g(t), \zeta_g);$$

$$K_{TFOG}(t_1, t_2)_{SSC} = k(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + k_{am} \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \omega_1 \omega_2 & \omega_1 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_2 & \omega_2^2 & \omega_2 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_3 & \omega_2 \omega_3 & \omega_3^2 \end{pmatrix} + k_{am} \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \omega_1 \omega_2 & \omega_1 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_2 & \omega_2^2 & \omega_2 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_3 & \omega_2 \omega_3 & \omega_3^2 \end{pmatrix} + k_{am} \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \omega_1 \omega_2 & \omega_1 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_2 & \omega_2^2 & \omega_2 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_3 & \omega_2 \omega_3 & \omega_3^2 \end{pmatrix}$$

TFOG type SSC the correlation matrix of noise model

$$\eta(t) = \bar{0}; \quad M(t) = m(t)I; \quad \langle \alpha(t_1) \alpha(t_2) \rangle = k_{\alpha} k(t); \quad \langle m(t_1) m(t_2) \rangle = k_m k(t); \quad \langle \alpha(t_1) m(t_2) \rangle = k_{\alpha m} k(t) = \langle m(t_1) \alpha(t_2) \rangle; \quad k(t) = \exp(-t/\tau_0)$$

The methodical conception



Theorem: (The error of definition of spatial orientation by means of SIOS)

The error of definition of spatial orientation by means of SIOS at presence of an error of measurement of B-representation of AAVV represents rotation of an image of inertial basis I\_0(t).

B-representation of AAVV of basis I\_0(t) is following:

$$\Delta \bar{\omega}_B(t) = -E(t) \bar{\omega}_B(t) \quad (1)$$

Here:  $\bar{\omega}_B(t)$  - are errors of gyros (B-representation of AAVV);

$$\Delta \bar{\omega}_B(t) = [\Delta \bar{\omega}_B(t)]^T; \quad \Delta \bar{\omega}_B(t) = [\Delta \bar{\omega}_B(t)]^T; \quad \Delta \bar{\omega}_B(t) = [\Delta \bar{\omega}_B(t)]^T$$

An accurate SIOS error kinematic equations

$$\Delta \dot{\Delta} = -\Delta A \Delta \dot{\Delta} \Delta; \quad \Delta \dot{\Delta} \Delta^{-1} = -\dot{\Delta} \Delta^{-1} \Delta \Delta; \quad \Delta \dot{\Delta} \Delta^{-1} = -\dot{\Delta} \Delta^{-1} \Delta \Delta; \quad \Delta \dot{\Delta} \Delta^{-1} = -\dot{\Delta} \Delta^{-1} \Delta \Delta; \quad \Delta \dot{\Delta} \Delta^{-1} = -\dot{\Delta} \Delta^{-1} \Delta \Delta; \quad \Delta \dot{\Delta} \Delta^{-1} = -\dot{\Delta} \Delta^{-1} \Delta \Delta$$

Perturbation theory

$$\Delta \dot{\Delta} \approx \sum_{i=1}^n \Delta \dot{\Delta}_i; \quad \Delta \dot{\Delta}_1 = \dot{\Delta}_1; \quad \Delta \dot{\Delta}_{i+1} = -\int_0^t \Delta A_i(\tau) \Delta \dot{\Delta}_i(\tau) d\tau; \quad \Delta \dot{\Delta}(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^t \Delta A_i(\tau) \Delta \dot{\Delta}_i(\tau) d\tau; \quad \Delta \dot{\Delta}(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^t \Delta A_i(\tau) \Delta \dot{\Delta}_i(\tau) d\tau$$

Orientation error vector

$$\Delta A(\Delta \dot{\Delta}) = \Delta B^{-1}(\Delta \dot{\Delta}) - I_0; \quad \Delta A(\Delta \dot{\Delta}) = \Delta B^{-1}(\Delta \dot{\Delta}) - I_0; \quad \Delta A(\Delta \dot{\Delta}) = \Delta B^{-1}(\Delta \dot{\Delta}) - I_0; \quad \Delta A(\Delta \dot{\Delta}) = \Delta B^{-1}(\Delta \dot{\Delta}) - I_0$$

Practical approximation

$$\Delta \dot{\Delta}(t) \approx \Delta \dot{\Delta}_0(t) + \Delta \dot{\Delta}_1(t); \quad \Delta \dot{\Delta}_0(t) = \dot{\Delta}_0; \quad \Delta \dot{\Delta}_1(t) = \int_0^t \Delta A_1(\tau) \Delta \dot{\Delta}_0(\tau) d\tau; \quad \Delta \dot{\Delta}(t) \approx \Delta \dot{\Delta}_0(t) + \Delta \dot{\Delta}_1(t)$$

The ratio of dispersions of errors of SIOS based on TFOG type SSC and TFOG type TC

$$\frac{\langle \{[\Delta s(t)]^2\}_{SSC} \rangle}{\langle \{[\Delta s(t)]^2\}_{TC} \rangle} \equiv R = 1 + \Delta$$

1<sup>st</sup> order effect

$$\Delta \dot{\Delta}_1(t) \approx \langle \Delta \dot{\Delta}_1^T(t) \Delta \dot{\Delta}_1(t) \rangle = \int_0^t \int_0^t \langle \dot{\Delta}_1^T(\tau_1) \dot{\Delta}_1(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^t \int_0^t \langle \dot{\Delta}_1^T(\tau_1) \dot{\Delta}_1(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2$$

Quantum limit ("white" noise)  $\Delta = 0 \Leftrightarrow R = 1$

$$\Delta \dot{\Delta}_1(t) = 3k_{am} \dot{\Delta}_1 + k_{am} \langle \dot{\Delta}_1^T \dot{\Delta}_1 \rangle + k_{am} \langle \dot{\Delta}_1^T \dot{\Delta}_1 \rangle + k_{am} \langle \dot{\Delta}_1^T \dot{\Delta}_1 \rangle + k_{am} \langle \dot{\Delta}_1^T \dot{\Delta}_1 \rangle$$

$$\Delta \dot{\Delta} \approx \Delta \dot{\Delta}_0 + \Delta \dot{\Delta}_1 = 2 \frac{(e_1^2 e_2^2 + e_1^2 e_3^2 + e_2^2 e_3^2)(\omega \tau_0)^2}{1 + (e_1^4 + e_2^4 + e_3^4)(\omega \tau_0)^2}$$

One example

$$\Delta \dot{\Delta} \approx \Delta \dot{\Delta}_0 + \Delta \dot{\Delta}_1 = 2(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3) \frac{(\omega \tau_0)^2}{3 + (\omega \tau_0)^2}$$

$$\Delta \dot{\Delta} \approx \Delta \dot{\Delta}_0 \Leftrightarrow R \in [1.3]$$

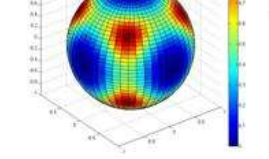


Fig. 1. Anisotropy of function  $\Delta_1/2$

$$\bar{\omega}_B = \omega \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}^T; \quad e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1; \quad \dot{\omega} = \dot{e}_1 = \dot{e}_2 = \dot{e}_3 = 0$$

The difference of two versions of TFOG, caused by the correlated hindrance in three information channels of TFOG because of fluctuations of common light source's parameters does not lead to change the accuracy of each of three information channels of TFOG with other equal conditions (at triple increase in power of a light source) but leads to the difference of accuracy of SIOS.

$$\Delta \dot{\Delta} \approx \Delta \dot{\Delta}_0 \Leftrightarrow R \in [0.3]$$

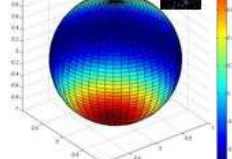


Fig. 2. Anisotropy of function  $\Delta_0/2$

A NEW NON-COMMUTATIVE ANISOTROPIC KINEMATIC EFFECT

THANK YOU!



В первом приближении теории возмущений дисперсия ошибки БИСО описывается квадратурой:

$$\sigma_{\Delta \bar{S}}^2(t) = \langle \Delta \bar{S}^T(t) \Delta \bar{S}(t) \rangle - \langle \Delta \bar{S}^T(t) \rangle \langle \Delta \bar{S}(t) \rangle \cong \left\langle \int_0^t \Delta \bar{\omega}_F^T(t_1) dt_1 \int_0^t \Delta \bar{\omega}_F(t_2) dt_2 \right\rangle = \int_0^t \int_0^t dt_1 dt_2 \langle \delta \bar{\omega}_F^T(t_1) B^{-1}(t_1) B(t_2) \delta \bar{\omega}_F(t_2) \rangle. \quad (2.1)$$

Символ  $\langle \dots \rangle$  – статистическое усреднение. Модель ошибок (МО) ТВОГ можно представить в виде:

$$\delta \bar{\omega}_F(t) = \alpha(t) + M(t) \bar{\omega}(t) + \pi(t); \quad \alpha(t) \equiv \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \alpha_F(t, \zeta_\alpha); \quad M(t) \bar{\omega}(t) \equiv \sum_{m=1}^{N_m} M(t, \zeta_m) \bar{\omega}_F(t); \quad \pi(t) \equiv \sum_{n=1}^{N_\pi} \pi_F(t, \bar{\omega}_F(t), \zeta_n); \quad \langle \delta \bar{\omega}_F(t) \rangle = \bar{0}. \quad (2.2)$$

$$K(t_1, t_2)_{SSC} \equiv \langle \delta \bar{\omega}(t_1) \delta \bar{\omega}^T(t_2) \rangle = \begin{pmatrix} k_{11}(t_1, t_2) & k_{12}(t_1, t_2) & k_{13}(t_1, t_2) \\ k_{21}(t_1, t_2) & k_{22}(t_1, t_2) & k_{23}(t_1, t_2) \\ k_{31}(t_1, t_2) & k_{32}(t_1, t_2) & k_{33}(t_1, t_2) \end{pmatrix}; \quad K(t_1, t_2)_{TC} = \begin{pmatrix} k_{11}(t_1, t_2) & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}(t_1, t_2) & 0 \\ 0 & 0 & k_{33}(t_1, t_2) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

$$K_{1, 2}^{SSC}(t_1, t_2) = k(\tau) \left\{ k_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + k_m \begin{pmatrix} \omega'_1 \omega''_1 & \omega'_1 \omega''_2 & \omega'_1 \omega''_3 \\ \omega'_2 \omega''_1 & \omega'_2 \omega''_2 & \omega'_2 \omega''_3 \\ \omega'_3 \omega''_1 & \omega'_3 \omega''_2 & \omega'_3 \omega''_3 \end{pmatrix} + k_{\alpha m} \begin{pmatrix} (\omega'_1 + \omega''_1) & (\omega'_1 + \omega''_2) & (\omega'_1 + \omega''_3) \\ (\omega'_2 + \omega''_1) & (\omega'_2 + \omega''_2) & (\omega'_2 + \omega''_3) \\ (\omega'_3 + \omega''_1) & (\omega'_3 + \omega''_2) & (\omega'_3 + \omega''_3) \end{pmatrix} \right\}; \quad \omega'_i \equiv \omega'_i(t_1); \quad \omega''_i \equiv \omega'_i(t_2); \quad i=1, 2, 3; \quad \tau \equiv |t_1 - t_2|; \quad (2.4)$$

$$\pi(t) = \bar{0}; \quad M(t) = m(t)I_0; \quad \langle \alpha(t_1) \alpha(t_2) \rangle = k_\alpha k(\tau); \quad \langle m(t_1) m(t_2) \rangle = k_m k(\tau); \quad \langle \alpha(t_1) m(t_2) \rangle = k_{\alpha m} k(\tau) = \langle m(t_1) \alpha(t_2) \rangle; \quad k(\tau) = \exp(-\tau / \tau_0).$$

В этом случае отношение дисперсий ошибок БИСО на основе ТВОГ типа SSC и ТС принимает вид:

$$\left(\langle[\Delta s(t)]^2\rangle\right)_{SSC} / \left(\langle[\Delta s(t)]^2\rangle\right)_{ТС} \equiv R = 1 + \Delta \geq 0, \quad \Delta = [c_3(J_1 - J_2)] / [c_1 J_1 + c_2(J_1 - J_2)]; \quad J_1 \equiv \int_0^t dt \int_0^t dt_2 e^{-\tau/\tau_0} = 2\tau_0 [t + \tau_0 (e^{-t/\tau_0} - 1)]; \quad (2.5)$$

$$J_2 \equiv \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 e^{-\tau/\tau_0} \cos \omega \tau = 2\tau_0 [1 + (\omega \tau_0)^2]^{-2} \{ [1 + (\omega \tau_0)^2] \tau - \tau_0 [1 - (\omega \tau_0)^2] + \tau_0 e^{-t/\tau_0} [1 - (\omega \tau_0)^2] \cos \omega t - \tau_0 e^{-t/\tau_0} (\omega \tau_0) \sin \omega t \};$$

$$c_1 \equiv 3k_a + 2k_{ам} \omega (e_1 + e_2 + e_3) + k_m \omega^2; \quad \omega_g = \omega (e_1 e_2 e_3)^T; \quad e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1; \quad \dot{\omega} = \dot{e}_1 = \dot{e}_2 = \dot{e}_3 = 0;$$

$$c_2 \equiv (e_1^2 - 1)(k_a + 2k_{ам} \omega e_1 + k_m \omega^2 e_1^2) + (e_2^2 - 1)(k_a + 2k_{ам} \omega e_2 + k_m \omega^2 e_2^2) + (e_3^2 - 1)(k_a + 2k_{ам} \omega e_3 + k_m \omega^2 e_3^2);$$

$$c_3 \equiv 2(e_1 e_2 [k_a + k_{ам} \omega (e_1 + e_2) + k_m \omega^2 e_1 e_2] + e_1 e_3 [k_a + k_{ам} \omega (e_1 + e_3) + k_m \omega^2 e_1 e_3] + e_2 e_3 [k_a + k_{ам} \omega (e_2 + e_3) + k_m \omega^2 e_2 e_3]).$$

Возможны три ситуации: 1)  $\Delta = 0$ ; 2)  $\Delta > 0$ ; 3)  $\Delta < 0$ . Рассмотрим парциальные вклады (при  $t/\tau_0 \gg 1$ ):

$$\Delta_m \equiv \Delta|_{k_a - k_{ам} - 0} = 2 \frac{(e_1^2 e_2^2 + e_1^2 e_3^2 + e_2^2 e_3^2)(\omega \tau_0)^2}{1 + (e_1^4 + e_2^4 + e_3^4)(\omega \tau_0)^2}; \quad \Delta_a \equiv \Delta|_{k_m - k_{ам} - 0} = 2(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3) \frac{(\omega \tau_0)^2}{3 + (\omega \tau_0)^2}. \quad (2.6)$$

При вращениях объекта с “большими” угловыми скоростями:  $k_m \omega^2 (e_1^4 + e_2^4 + e_3^4) \gg k_a - 2k_{ам} \omega (e_1^3 + e_2^3 + e_3^3)$  точность БИСО на основе ТВОГ типа ТС превосходит точность БИСО на основе ТВОГ типа SSC ( $\Delta \approx \Delta_m \in [0, 2] \Rightarrow R \in [1, 3]$ ,  $R^{1/2} \rightarrow 3^{1/2}$  при  $\omega \tau_0 \gg 1$ ). При вращениях с “малыми” угловыми скоростями:  $k_m \omega^2 (e_1^4 + e_2^4 + e_3^4) + 2k_{ам} \omega (e_1^3 + e_2^3 + e_3^3) \ll k_a$  точность БИСО на ТВОГ типа SSC может существенно превосходить точность БИСО на ТВОГ типа ТС ( $\Delta \approx \Delta_a \in [-1, 2] \Rightarrow R \in [0, 3]$ ;  $\Delta_a = -1 \Rightarrow R = 0$ ;  $R \rightarrow 0$  при  $\omega \tau_0 \gg 1$ ).

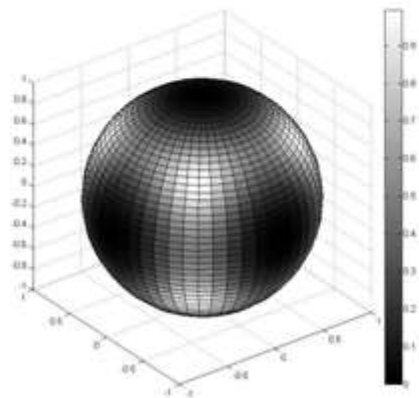


Рис. 1. Анизотропия функции  $\Delta_m/2$ .

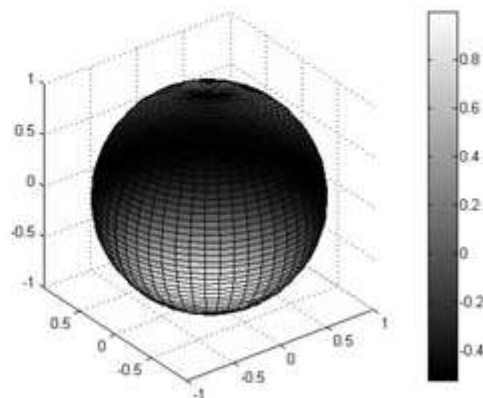


Рис. 2. Анизотропия функции  $\Delta_a/2$ .



**ПАТЕНТ**  
НА ИЗОБРЕТЕНИЕ  
№ 2502048

**СПОСОБ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ  
БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ  
ОРИЕНТАЦИИ НА ОСНОВЕ ТРЕХОСНЫХ ВОЛОКОННО-  
ОПТИЧЕСКИХ ГИРОСКОПОВ С ОДНИМ ОБЩИМ  
ИСТОЧНИКОМ ИЗЛУЧЕНИЯ**

Патентообладатель(ы): *Общество с ограниченной  
ответственностью "Научно-производственная фирма  
"Эпсилон" (RU)*

Автор(ы): *Кробка Николай Иванович (RU)*

Заявка № 2011147991

Приоритет изобретения 25 ноября 2011 г.

Зарегистрировано в Государственном реестре  
изобретений Российской Федерации 20 декабря 2013 г.

Срок действия патента истекает 25 ноября 2031 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов



ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА  
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

**(12) ОПИСАНИЕ ИЗОБРЕТЕНИЯ К ПАТЕНТУ**

(21)(22) Заявка: 2011147991/28, 25.11.2011

(24) Дата начала отсчета срока действия патента:  
25.11.2011

Приоритет(ы):  
(22) Дата подачи заявки: 25.11.2011

(43) Дата публикации заявки: 27.05.2013 Бюл. № 15

(45) Опубликовано: 20.12.2013 Бюл. № 35

(56) Список документов, цитированных в отчете о  
поиске: Гирогоризонткомпас на волоконно-  
оптических гироскопах с вращением блока  
чувствительных элементов / ПЕШЕХОНОВ  
В.Г., НЕСЕНЮК Л.П., СТАРОСЕЛЫДЬЕВ  
Л.П. и др. / Гироскопия и навигация. 2002.  
№1. с.57-63. СТЕПАНОВ О.А. Основы теории  
оценивания с приложениями к задачам  
обработки навигационной информации. Ч.1.  
Введение в теорию оценивания. - СПб.: ГНЦ  
(см. прод.)

Адрес для переписки:  
117574, Москва, Новоосеневский пр-т, д.12,  
корп.3, кв.431, Генеральному директору  
ООО "НПФ "Эпсилон", Н.И.Кробке

(72) Автор(ы):  
Кробка Николай Иванович (RU)

(73) Патентообладатель(и):  
Общество с ограниченной  
ответственностью "Научно-  
производственная фирма "Эпсилон" (RU)

**(54) СПОСОБ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ НА ОСНОВЕ ТРЕХОСНЫХ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИХ ГИРОСКОПОВ С ОДНИМ ОБЩИМ ИСТОЧНИКОМ ИЗЛУЧЕНИЯ**

(57) Реферат:

Изобретение относится к области навигационного приборостроения и может найти применение в бесплатформенных инерциальных навигационных системах (БИНС) и бесплатформенных инерциальных системах ориентации (БИСО) на трехосных волоконно-оптических гироскопах (ТВОГ) с одним общим источником излучения (ОИИ). Технический результат - повышение точности. Для этого измеряют корреляционную матрицу шумов (КМШ) ТВОГ с ОИИ в условиях, максимально приближенных к условиям использования БИСО на управляемом объекте (УО); вычисляют

оптимальную ориентацию (оптимальные ориентации) связанного базиса относительно корпуса УО, при которой (которых) проекции вектора измеряемой абсолютной угловой скорости (ВАУС) УО на оси связанного базиса таковы, что по определенному критерию обеспечивается минимум дисперсии ошибки БИСО; устанавливают БИСО на основе ТВОГ с ОИИ на УО и ориентируют оси чувствительности ТВОГ относительно измеряемого ВАУС УО по определенному критерию так, чтобы обеспечить минимум дисперсии ошибки БИСО. 1 з.п. ф-лы, 3 ил.

RU 2 5 0 2 0 4 8 C 2

RU 2 5 0 2 0 4 8 C 2



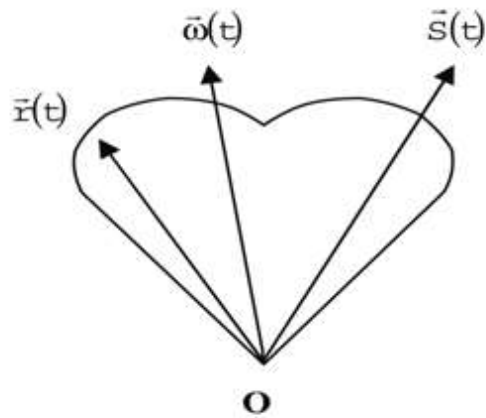


Рис. 1

«Кинематический» закон сохранения

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t); \quad \vec{r}(t)|_{t=0} = \vec{r}_0$$

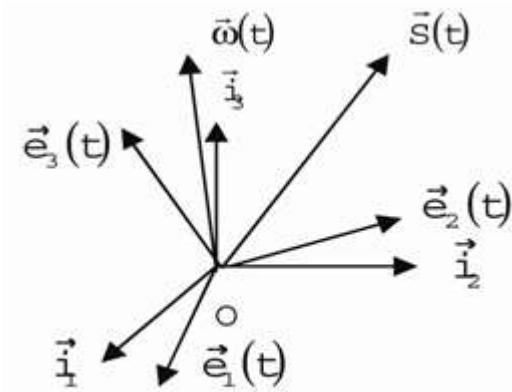


Рис. 2

$$\vec{S} = \left( \omega_0^2 + \vec{\omega}_E^T \vec{\omega}_I \right)^{-1} \left\{ \left( \vec{\omega}_E \times \vec{\omega}_I \right) + \frac{\left[ \vec{\omega}_I \left( \vec{\omega}_E \times \vec{\omega}_I \right) - \vec{\omega}_E \left( \vec{\omega}_E \times \vec{\omega}_I \right) \right]}{\left( \vec{\omega}_E \vec{\omega}_I - \vec{\omega}_I \vec{\omega}_E \right)} \left( \vec{\omega}_E + \vec{\omega}_I \right) \right\} \frac{s_0 \sin s_0}{\left( 1 - \cos s_0 \right)},$$

Кробка, Н. И. Об условиях интегрируемости кинематических уравнений Эйлера-Пуассона в квадратурах / Н. И. Кробка // V Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам (25-27 мая 1998 г.) / Гл. ред. В.Г. Пешехонов. – СПб.: Научный совет РАН по проблемам управления движением и навигации. ГИЦ РФ - ЦНИИ «Электроприбор», 1998. – С. 43-50.

$$\vec{K}(t) = \frac{\left\{ \left[ \vec{\omega}_E(t) \times \vec{\omega}_I(t) \right] - \frac{\left[ \dot{\vec{\omega}}_E(t) - \dot{\vec{\omega}}_I(t) \right]^T \left[ \vec{\omega}_E(t) \times \vec{\omega}_I(t) \right]}{\left[ \dot{\vec{\omega}}_E(t) - \dot{\vec{\omega}}_I(t) \right]^T \left[ \vec{\omega}_E(t) + \vec{\omega}_I(t) \right]} \left[ \vec{\omega}_E(t) + \vec{\omega}_I(t) \right] \right\}}{\left[ \vec{\omega}_E(t) + \vec{\omega}_I(t) \right]^T \left[ \vec{\omega}_E(t) + \vec{\omega}_I(t) \right]}$$

$$\vec{K} \equiv \vec{\Theta} / 4 = \text{tg}(s_0 / 2) \vec{S} / 2s_0$$

Кробка, Н. И. Решение кинематической задачи Эйлера / Н. И. Кробка // Гироскопия и навигация. – 2005. – № 3 (50). – С. 105-122.



МФТИ

«... Ребята! Не бойтесь браться за сложные нерешенные задачи.  
Для этого вас готовили, в этом – ваше призвание.»  
(Ректор Физтеха, академик О.М.Белоцерковский, 1979г.)



## ТЕОРЕМА

**Теорема.** В общем случае произвольного вращения вокруг неподвижной точки вектор конечного поворота  $\vec{\Theta}(t)$  выражается в конечном виде явно как функция времени  $t$  без единой операции интегрирования в терминах проекций вектора угловой скорости  $\vec{\omega}(t)$  и его первой производной – вектора углового ускорения  $\dot{\vec{\omega}}(t)$  – на оси вращающейся  $E(t)$  и неподвижной  $I$  прямоугольных правых декартовых систем координат:

$$\vec{\Theta}(t) = 4 \frac{\left\{ [\bar{\omega}_E(t) \times \bar{\omega}_I(t)] - \frac{[\dot{\bar{\omega}}_E(t) - \dot{\bar{\omega}}_I(t)]^T [\bar{\omega}_E(t) \times \bar{\omega}_I(t)]}{[\dot{\bar{\omega}}_E(t) - \dot{\bar{\omega}}_I(t)]^T [\bar{\omega}_E(t) + \bar{\omega}_I(t)]} [\bar{\omega}_E(t) + \bar{\omega}_I(t)] \right\}}{[\bar{\omega}_E(t) + \bar{\omega}_I(t)]^T [\bar{\omega}_E(t) + \bar{\omega}_I(t)]}. \quad (1)$$

Обозначения:

$$\vec{\Theta}(t) = \sum_{m=1}^3 \Theta_m(t) \vec{i}_m = \sum_{n=1}^3 \Theta'_n(t) \vec{e}_n(t); \quad \Theta_m(t) \equiv \Theta'_m(t); \quad m=1,2,3;$$

$$\vec{\omega}(t) = \sum_{m=1}^3 \omega_m(t) \vec{i}_m = \sum_{n=1}^3 \omega'_n(t) \vec{e}_n(t); \quad \dot{\vec{\omega}}(t) = \frac{d}{dt} \vec{\omega}(t) = \sum_{m=1}^3 \dot{\omega}_m(t) \vec{i}_m + \vec{0} = \sum_{n=1}^3 \dot{\omega}'_n(t) \vec{e}_n(t) + \vec{0};$$

$$\vec{\Theta}(t) \equiv \begin{pmatrix} \Theta_1(t) \\ \Theta_2(t) \\ \Theta_3(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{\omega}_I(t) \equiv \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{\omega}_E(t) \equiv \begin{pmatrix} \omega'_1(t) \\ \omega'_2(t) \\ \omega'_3(t) \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{\omega}}_I(t) = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1(t) \\ \dot{\omega}_2(t) \\ \dot{\omega}_3(t) \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{\omega}}_E(t) = \begin{pmatrix} \dot{\omega}'_1(t) \\ \dot{\omega}'_2(t) \\ \dot{\omega}'_3(t) \end{pmatrix}.$$

**Доказательство:**

$$\bar{\omega}_E = p_0 [\dot{\vec{\Theta}} + \frac{1}{2} (\dot{\vec{\Theta}} \times \vec{\Theta})]; \quad \bar{\omega}_I = p_0 [\dot{\vec{\Theta}} - \frac{1}{2} (\dot{\vec{\Theta}} \times \vec{\Theta})]; \quad p_0 \equiv (1 + \frac{1}{4} \Theta_0^2)^{-1}; \quad \Theta_0^2 \equiv \vec{\Theta}^T \vec{\Theta};$$

$$\dot{\bar{\omega}}_E = \dot{p}_0 [\dot{\vec{\Theta}} + \frac{1}{2} (\dot{\vec{\Theta}} \times \vec{\Theta})] + p_0 [\ddot{\vec{\Theta}} + \frac{1}{2} (\ddot{\vec{\Theta}} \times \vec{\Theta})]; \quad \dot{\bar{\omega}}_I = \dot{p}_0 [\dot{\vec{\Theta}} - \frac{1}{2} (\dot{\vec{\Theta}} \times \vec{\Theta})] + p_0 [\ddot{\vec{\Theta}} - \frac{1}{2} (\ddot{\vec{\Theta}} \times \vec{\Theta})].$$

$$\vec{\Theta}(\bar{\omega}_E(t), \bar{\omega}_I(t), \dot{\bar{\omega}}_E(t), \dot{\bar{\omega}}_I(t)) = \vec{\Theta}(t).$$

**Что и требовалось доказать.**

250 лет.

(2)

«Четвертый» интеграл механического движения.



## SYMMETRIES AND CONSERVATION LAWS

	Name		Universality	Symmetry's type
1	Energy	<b>E</b>	At all interactions: - strong; - electromagnetic; - weak; - gravity	"Geometrical"
2	Impulse	<b>P</b>		
3	Angular momentum	<b>J</b>		
...	...	...		"Dynamical"
4	Electrical charge	<b>Q</b>		
5	Baryon charge (number)	<b>B</b>		
6	Lepton charge (numbers)	$L_e, L_\mu, L_\tau$		
7	Iso-spin, projection of iso-spin	$I, I_3$	At strong interaction	
8	Parity	$P$	At strong and electromagnetic interactions	
9	Strangeness	$S$		
10	Charm	$C$		
11	Bottom (Beauty)	$B$		
12	Top (Truth)	$T$		
N	And so on	...	...	?
?	"Simply Kinematics"	<b>K</b>	At all interactions?	"Kinematical"!!!

### THE "KINEMATIC" CONSERVATION LAW OF THE NEWTON-EULER CLASSICAL MECHANICS [5-7]

$$\vec{K}(t) - \frac{\left\{ [\vec{\omega}_E(t) \times \vec{\omega}_I(t)] - \frac{[\vec{\omega}_E(t) - \vec{\omega}_I(t)]^T [\vec{\omega}_E(t) \times \vec{\omega}_I(t)]}{[\vec{\omega}_E(t) + \vec{\omega}_I(t)]} [\vec{\omega}_E(t) + \vec{\omega}_I(t)] \right\}}{[\vec{\omega}_E(t) + \vec{\omega}_I(t)]^T [\vec{\omega}_E(t) + \vec{\omega}_I(t)]} = \vec{0}$$

**Lorenz invariance × "Kinematical invariance" = ???**

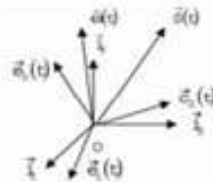
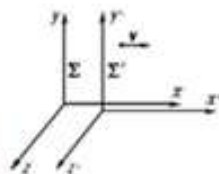
Is it independent addition to CPT-invariance?



"Natural" physical symmetry of space rotations

The Euler problem solution

New conservation law



Eugene Wigner





# SYMMETRIES AND ASYMMETRIES OF PHYSICS



## 1. No conservation of parity at weak interactions:



"The Nobel Prize in Physics to Professor Tsung Dao Lee and Professor Chen Ning Yang for 1957 year is concerned with some of the fundamental physical principles, the so-called parity laws – in the first place the symmetry of Nature with respect to right and left – in their application to elementary particles and their reactions".

## 2. No conservation of combinatory parity (CP-invariance). 3. CPT-invariance?!

### ANYSOTROPY OF SPACE ROTATIONS "TO THE RIGHT" AND "TO THE LEFT" – IS "ASYMMETRY OF MECHANICS"

(The consequence of non-commutability of space rotations around a fixed point)

**Theorem 1.** The Euler turn angle  $s_0(\vec{\omega}_N(t))$ , depending on N-representation ( $N \in \{1, E\}$ )  $\vec{\omega}_N(t)$  of angular velocity vector  $\vec{\omega}(t)$ , does not possess determined parity relative change of the sign "plus" and "minus" of the N-representation  $\vec{\omega}_N(t)$ , i.e. relative changing the sign "plus"  $\leftrightarrow$  "minus" ( $+\vec{\omega}_N(t) \leftrightarrow -\vec{\omega}_N(t)$ ) of  $\vec{\omega}_N(t)$ .

**Theorem 2.** The Euler turn angle  $s_0(\vec{\omega}_N(t))$ , depending on N-representation ( $N \in \{1, E\}$ )  $\vec{\omega}_N(t)$  of angular velocity vector  $\vec{\omega}(t)$ , is invariant relative change of the sign "plus"  $\leftrightarrow$  "minus" of the N-representation ( $N \in \{1, E\}$ ):  $\vec{\omega}_N \leftrightarrow -\vec{\omega}_N$  in the case and only in the case of co-planarity of the N-representation  $\vec{\omega}_N$ :

$$s_{0+} = +(\vec{S}_{-N}^T \vec{S}_{-N})^{1/2} = +(\vec{S}_{+N}^T \vec{S}_{+N})^{1/2} = s_{0+} \Leftrightarrow (\vec{\omega}_N)^T (\dot{\vec{\omega}}_N \times \vec{\omega}_N) = 0; \quad \vec{S}_{\pm N} = \vec{S}(\pm \vec{\omega}_N); \quad \vec{\omega}_N = \vec{\omega}_N(t); \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

**Theorem 3.** The Euler turn angle  $s_0(\vec{\omega}_N(t))$ , depending on N-representation ( $N \in \{1, E\}$ )  $\vec{\omega}_N(t)$  of angular velocity vector  $\vec{\omega}(t)$ , is non-invariant relative change of the sign "plus"  $\leftrightarrow$  "minus" of the N-representation ( $N \in \{1, E\}$ ):  $\vec{\omega}_N(t) : \vec{\omega}_N(t) \leftrightarrow -\vec{\omega}_N(t)$  in the case and only in the case of non-co-planarity of the N-representation  $\vec{\omega}_N(t)$ :

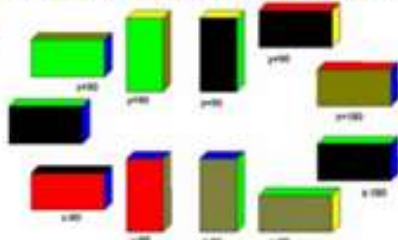
$$s_{0+} = +(\vec{S}_{-N}^T \vec{S}_{-N})^{1/2} \neq +(\vec{S}_{+N}^T \vec{S}_{+N})^{1/2} = s_{0-} \Leftrightarrow (\vec{\omega}_N)^T (\dot{\vec{\omega}}_N \times \vec{\omega}_N) \neq 0; \quad \vec{S}_{\pm N} = \vec{S}(\pm \vec{\omega}_N); \quad \vec{\omega}_N = \vec{\omega}_N(t); \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

**Proof. (Theorem 1-3).** Differential equation for the Euler turn angle, depending on N-representation  $\vec{\omega}_N(t)$ , in the general case of "arbitrary"  $\vec{\omega}_N(t)$  contains odd and even (relative change:  $\vec{\omega}_N(t) \leftrightarrow -\vec{\omega}_N(t)$ ) coefficients both. (Slide No. 10, formula (8)). If  $\vec{\omega}_N^T (\dot{\vec{\omega}}_N \times \vec{\omega}_N) = 0$  than all coefficients of the equation for the Euler turn angle  $s_0(\vec{\omega}_N(t))$  are even. As for Theorem 3, see also a demonstration.

**Corollary.** The non-isotropy of space rotations "to the right" and "to the left" is appearing in direct physical sense:

The Euler turn angle for the rotations "to the right" and "to the left" is different in general case of non-co-planarity of the angular velocity vector's N-representation  $\vec{\omega}_N(t)$

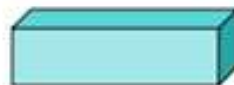
Demonstration of the anisotropy of space rotations "to the right" and "to the left" with the help of ... ordinary match box (E-representation)



"I don't know, I didn't deal with it at practice. Ask academician A.Yu. Ishlinskii." (Academician V.I. Kuznetsov, 1986)

**The 3-nd-order effect** (the order of the perturbation theory's approximation): The Euler turn angle for the rotations "to the right" and "to the left" is different (in the case of non-co-planarity of angular velocity vector N-representation).

"+" and "-" – are rotations in opposite directions ("to the right" and "to the left");  $\vec{e}_i(\pm\varphi)$  – is a turn around axis  $\vec{e}_i$  ( $i=1,2,3$ ) in the angle equal to  $\pm\varphi$ :



"What does it mean

$$s_{0+} \neq s_{0-} \text{ ? } [8]$$

$$\vec{e}_1(\pm\pi/2) \rightarrow \vec{e}_2(\pm\pi/2) \rightarrow \vec{e}_3(\pm\pi/2) \rightarrow \vec{e}_2(\pm\pi/2) \rightarrow \vec{e}_1(\pm\pi) [13, 15]$$



"Oh, Nikolay Ivanovich, You have found the Asymmetry of Mechanics!" (Academician A.Yu. Ishlinskii, 1993)

Demonstration of the anisotropy of space rotations "to the right" and "to the left" with the help of ... ordinary match box (E-representation)



## Григорий Борисович Малыкин

Электронный адрес: [malykin@mail.nnov.ru](mailto:malykin@mail.nnov.ru)

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Российская Федерация  
Адрес: 603000, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46, Российская Федерация  
Вебсайт: [www.appl.sci-nnov.ru](http://www.appl.sci-nnov.ru)

### Статьи

1. Г.Б. Малыкин «[Винтовые эллиптические поляризационные моды В.Л. Гинзбурга и их применение](#)» **186** 1355–1358 (2016)
2. Г.Б. Малыкин, В.И. Позднякова «[Возражения к комментарию П. Маранера \(Ответ на комментарий П. Маранера \[УФН 186 793 \(2016\)\] к статье "Квадратичный эффект Саньяка: влияние гравитационного потенциала силы Кориолиса на разность фаз в плечах вращающегося интерферометра Майкельсона \(объяснение результатов экспериментов Д.К. Миллера 1921—1926 гг.\)" \[УФН 185 431 \(2015\)\]](#)» **186** 796–798 (2016)
3. Г.Б. Малыкин, В.И. Позднякова «[Дополнение к статье "Квадратичный эффект Саньяка: влияние гравитационного потенциала силы Кориолиса на разность фаз в плечах вращающегося интерферометра Майкельсона \(объяснение результатов экспериментов Д.К. Миллера 1921—1926 гг.\)" \[УФН 185 431 \(2015\)\]](#)» **185** 895–896 (2015)
4. Г.Б. Малыкин, В.И. Позднякова «[Квадратичный эффект Саньяка: влияние гравитационного потенциала силы Кориолиса на разность фаз в плечах вращающегося интерферометра Майкельсона \(объяснение результатов экспериментов Д.К. Миллера 1921—1926 гг.\)](#)» **185** 431–440 (2015)
5. Г.Б. Малыкин «[Эффект Саньяка в кольцевых лазерах и кольцевых резонаторах. Влияние показателя преломления оптической среды на чувствительность к вращению](#)» **184** 775–781 (2014)
6. Г.Б. Малыкин, В.С. Савчук, Е.А. Романиц «[Лев Яковлевич Штрум и гипотеза существования тахионов](#)» **182** 1217–1222 (2012)
7. Г.Б. Малыкин «[Некоммутативность сложения неколлинеарных скоростей в специальной теории относительности и метод геометрической фазы \(к столетию со дня публикации работы А. Зоммерфельда\)](#)» **180** 965–969 (2010)
8. Г.Б. Малыкин «[Исправление опечаток, поправки и дополнения к статье Г.Б. Малыкина «Паралоренцевские преобразования» \(УФН, март 2009 г., т. 179, № 3, с. 285 — 288\)](#)» **179** 442 (2009)
9. Г.Б. Малыкин «[Паралоренцевские преобразования](#)» **179** 285–288 (2009)
10. Г.Б. Малыкин «[Прецессия Томаса: корректные и некорректные решения](#)» **176** 865–882 (2006)
11. Г.Б. Малыкин «[О возможности экспериментальной проверки второго постулата специальной теории относительности](#)» **174** 801–804 (2004)
12. Г.Б. Малыкин, В.И. Позднякова «[Геометрические фазы в одномодовых волоконных световодах и волоконных кольцевых интерферометрах](#)» **174** 303–322 (2004)
13. Г.Б. Малыкин, С.А. Харламов «[Топологическая фаза в классической механике](#)» **173** 985–994 (2003)
14. И.А. Андропова, Г.Б. Малыкин «[Физические проблемы волоконной гироскопии на эффекте Саньяка](#)» **172** 849–873 (2002)
15. Г.Б. Малыкин «[Эффект Саньяка во вращающейся системе отсчета. Релятивистский парадокс Зенона.](#)» **172** 969–970 (2002)
16. Г.Б. Малыкин «[Эффект Саньяка. Корректные и некорректные объяснения](#)» **170** 1325–1349 (2000)
17. Г.Б. Малыкин «[Связь томасовской прецессии и теоремы Ишлинского, примененной к наблюдаемому вращению изображения релятивистски движущегося тела.](#)» **169** 585–590 (1999)
18. Г.Б. Малыкин «[Ранние исследования эффекта Саньяка](#)» **167** 337–342 (1997)

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

## Ранние исследования эффекта Саньяка

Г.Б. Малькин

*Проведен обзор работ конца XIX — первой половины XX веков, посвященных исследованию эффекта Саньяка. Рассмотрен вопрос о приоритетах. В частности, показано, что О. Лодж первым пришел к выводу о возможности наблюдения данного эффекта. Показано также, что кроме обнаружения вращения, основной целью большинства исследований было уточнение вида коэффициента увлечения эфира Френеля–Физо во вращающейся системе отсчета. Рассмотрены пути развития саньяковской интерферометрии: расширение рабочего диапазона электромагнитных волн и использование интерференции волн де Бройля материальных частиц, а также интерференции поверхностных акустических и магнитных волн.*

PACS numbers: 01.65. + g, 04.20.–q

---

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

**Эффект Саньяка в кольцевых лазерах и кольцевых резонаторах.  
Влияние показателя преломления оптической среды  
на чувствительность к вращению**

Г.Б. Малыкин

*Эффект Саньяка в кольцевых лазерах (КЛ) приводит к возникновению пропорциональной угловой скорости вращения КЛ разности частот генерации встречных волн в КЛ. Рассмотрен вопрос о влиянии оптической среды, заполняющей весь резонатор КЛ или некоторую его часть, на разность частот встречных волн. В литературе имеется большое число различных выражений для разности частот встречных волн во вращающемся КЛ, причём согласно одним из этих выражений оптическая среда уменьшает разность частот, согласно другим — увеличивает, а согласно третьим — вообще не влияет на разность частот. Результаты известных экспериментов также не дают однозначного ответа на данный вопрос, так как противоречат друг другу. Поскольку эффект Саньяка является эффектом специальной теории относительности, проведён расчёт разности частот встречных волн в КЛ на основе релятивистского закона сложения скоростей. Показано, что, когда весь периметр резонатора вращающегося КЛ заполнен однородной оптической средой, разность частот встречных волн в КЛ обратно пропорциональна величине показателя преломления среды. Полученные результаты позволяют также вычислять разность резонансных частот встречных волн во вращающихся кольцевых резонаторах при наличии оптической среды.*

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## **Физические проблемы волоконной гироскопии на эффекте Саньяка**

И.А. Андропова, Г.Б. Малыкин

*Обзор посвящен рассмотрению физических проблем кольцевой волоконной интерферометрии, которая лежит в основе оптической волоконной гироскопии на эффекте Саньяка. Рассмотрены локально взаимные и локально невзаимные физические эффекты, в том числе поляризационные, нестационарные, магнитные, нелинейные и релятивистские, приводящие к появлению на выходе волоконного оптического гироскопа дополнительных сигналов, идентичных сигналу вращения. Проведен анализ причин нестабильности эффектов, приводящих к дрейфу выходного сигнала. Рассмотрены источники флуктуаций, ограничивающие предельную чувствительность волоконных гироскопов. Обсуждаются различные области применения волоконных кольцевых интерферометров и волоконных гироскопов на их основе для практических целей и для фундаментальных исследований. Рассмотрены перспективы дальнейшего развития волоконной гироскопии.*

PACS numbers: 03.30.+p, 07.60.Vg, 42.81.Pa



## 2. Эффект Саньяка

Начнем обзор с краткого экскурса в историю эффекта Саньяка (см. [26–31]). Сущность эффекта Саньяка, положенного в основу работы оптических гироскопов, состоит в том, что разность фазовых набегов двух световых волн  $\varphi^+ - \varphi^- = \Phi_S$ , распространяющихся по замкнутому контуру в противоположных направлениях (рис. 1а) при вращении контура вокруг оси, нормальной к его плоскости, пропорциональна угловой скорости вращения  $\Omega$  и площади контура  $S$ , который обходят встречные волны. Идея возможности существования эффекта впервые была высказана О. Лоджем в 1893 г. [32]; им также впервые было получено выражение для разности фаз встречных волн

$$\Phi_S = \frac{8\pi S}{\lambda c} \Omega, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — длина волны света,  $c$  — скорость света.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

**Эффект Саньяка.  
Корректные и некорректные объяснения**

Г.Б. Малыкин

*Рассмотрены различные объяснения причин возникновения эффекта Саньяка. Показано, что эффект Саньяка является следствием релятивистского закона сложения скоростей. Данный эффект также находит адекватное объяснение в рамках общей теории относительности. При выполнении некоторых ограничений на скорость вращения эффект Саньяка может рассматриваться как следствие различия замедления времени либо различия изменения фаз волновых функций материальных частиц в скалярном или соответственно векторном гравитационном потенциале сил инерции во вращающейся системе отсчета для встречных волн. Показано также, что все нерелятивистские объяснения эффекта Саньяка, которые, к сожалению, встречаются в ряде научных статей, монографий и учебных курсов, являются принципиально неверными, хотя в ряде частных случаев и приводят к правильному с точностью до релятивистских поправок результату.*

PACS numbers: **01.65.** + **g**, **03.30.** + **p**, 07.60.Ly, 42.87.Bg

# Содержание

1. Введение (1325).
2. Корректные объяснения эффекта Саньяка (1326).
  - 2.1. Эффект Саньяка в специальной теории относительности.
  - 2.2. Эффект Саньяка в общей теории относительности.
  - 2.3. Методы вычисления эффекта Саньяка для электромагнитных волн в анизотропных средах.
  - 2.4. Основные результаты анализа эффекта Саньяка в рамках теории относительности.
3. Условно корректные объяснения эффекта Саньяка (1334).
  - 3.1. Эффект Саньяка как следствие различия нерелятивистских гравитационных скалярных потенциалов центробежных сил в системах отсчета, сопровождающих встречные волны.
  - 3.2. Эффект Саньяка как следствие различия знаков нерелятивистских гравитационных скалярных потенциалов сил Кориолиса для встречных волн в сопровождающей вращение системе отсчета.
  - 3.3. Эффект Саньяка в квантовой механике как следствие воздействия векторного потенциала силы Кориолиса на фазы волновых функций встречных волн в сопровождающей вращение системе отсчета.
4. Попытки объяснения эффекта Саньяка посредством проведения аналогии с другими эффектами (1336).
  - 4.1. Аналогия между эффектом Саньяка и эффектом Ааронова – Бома.
  - 4.2. Эффект Саньяка как проявление фазы Берри.
5. Некорректные объяснения эффекта Саньяка (1338).
  - 5.1. Эффект Саньяка в теории неподвижного (неувлекаемого)

светоносного эфира. 5.2. Эффект Саньяка с точки зрения классической кинематики. 5.3. Эффект Саньяка как проявление классического эффекта Доплера от движущегося делительного зеркала. 5.4. Эффект Саньяка как проявление эффекта увлечения Френеля – Физо. 5.5. Эффект Саньяка и силы Кориолиса. 5.6. Эффект Саньяка как следствие разности орбитальных моментов фотонов во встречных волнах. 5.7. Эффект Саньяка как проявление инерциальных свойств электромагнитного поля. 5.8. Эффект Саньяка в некорректных теориях гравитации. 5.9. Другие некорректные объяснения эффекта Саньяка.

## 6. Заключение (1346).

## Список литературы (1346).

## 1. Введение

Эффект Саньяка [1–3] (см. также обзоры [4–8] и обзорную часть работы [9]) заключается в том, что во вращающемся кольцевом интерферометре одна встречная волна приобретает фазовый сдвиг относительно другой встречной волны, который прямо пропорционален угловой скорости вращения, площади, охватываемой интерферометром, и частоте волны. Это кинематический эффект специальной теории относительности (СТО) [10], и, как показано в [11], он является следствием релятивистского закона сложения скоростей. Эффект Саньяка наряду с экспериментами Майкельсона – Морли [12, 13] является одним из основополагающих опытов теории относительности. В настоящее время эффект Саньяка зарегистрирован (помимо оптического диапазона) для радиоволн [14], рентгеновских лучей [15], а также для волн не электромагнитной природы — волн де Бройля материальных частиц (электронов [9, 16], нейтронов [17, 18], атомов кальция [19], натрия [20] и цезия [21]).

---

Г.Б. Малыкин. Институт прикладной физики РАН,  
603600 Нижний Новгород, ул. Ульянова 46, Российская Федерация  
Тел. (8312) 38-45-67  
E-mail: malykin@appl.sci-nnov.ru

*Статья поступила 19 июля 2000 г.*

---

## 2. Корректные объяснения эффекта Саньяка

Корректными будем считать такие объяснения эффекта Саньяка, которые позволяют получить точное выражение для разности фаз встречных волн во вращающемся кольцевом интерферометре без каких-либо ограничений на параметры системы — линейной скорости вращения кольца (платформы, на которой расположен интерферометр), скорости волн, в том числе и волн де Бройля или материального тела относительно сопровождающей вращение системы отсчета (разумеется, эти скорости не должны превышать скорость света), массы материальной частицы и др. Все корректные объяснения эффекта Саньяка базируются на применении теории относительности.

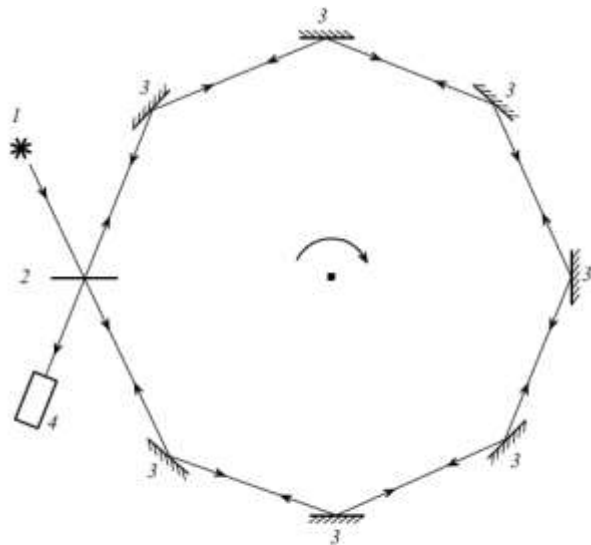


Рис. 1. Кольцевой интерферометр: 1 — источник излучения; 2 — светоделительная пластинка (полупрозрачное зеркало); 3 — зеркала; 4 — фотоприемник. Стрелка указывает направление вращения интерферометра.

Рассмотрим эффект Саньяка в самом общем виде — для произвольного типа волн, распространяющихся в произвольной среде с фазовой скоростью  $v_{\phi}^{\pm}$ . Запишем выражения для длины пути  $l^{\pm}$  в лабораторной (неподвижной) системе отсчета  $K$ , где специальная теория относительности заведомо справедлива (знак плюс соответствует волне, направление которой совпадает с направлением вращения, знак минус — волне, распространяющейся в противоположном направлении):

$$l^{\pm} = 2\pi R \pm R\Omega t^{\pm}, \quad (1)$$

$$v_{\phi}^{\pm} = \frac{v_{\phi} \pm R\Omega}{1 \pm v_{\phi}R\Omega/c^2}. \quad (2)$$

Здесь  $R$  — радиус кольца,  $\Omega$  — угловая скорость вращения,  $c$  — скорость света в вакууме,  $t^{\pm} = l^{\pm}/v_{\phi}^{\pm}$  — времена, затрачиваемые встречными волнами на обход кольца.

Определим величину фазовой скорости каждой из встречных волн как линейную скорость перемещения точки фиксированной фазы данной волны вдоль кольца.

Согласно (1), (2) времена  $t^\pm$  есть

$$t^\pm = \frac{2\pi R(1 \pm v_\phi R\Omega/c^2)}{v_\phi(1 - R^2\Omega^2/c^2)}. \quad (3)$$

Разность времен распространения встречных волн составит

$$\Delta t = t^+ - t^- = \frac{4\pi R^2\Omega}{c^2(1 - R^2\Omega^2/c^2)}. \quad (4)$$

Таким образом, разность времен, затрачиваемых встречными волнами на прохождение кольца, не зависит от фазовой скорости волн. Следовательно, разность времен, обусловленная эффектом Саньяка, не зависит от того, заполнен кольцевой интерферометр оптической средой или нет. Кроме того, отсюда следует, что для волн произвольного типа (например, акустических волн, скорость которых существенно меньше скорости света) при условии, что частота волны, размеры кольца и угловая скорость вращения одинаковы, рассматриваемая разность времен будет такой же, как и для электромагнитных волн.

В соответствии с преобразованиями Лоренца [40] разность времен распространения встречных волн в системе отсчета  $K'$  составит

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{\left(1 - \frac{R^2 \Omega^2}{c^2}\right)} = \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2 (1 - R^2 \Omega^2 / c^2)^{1/2}}. \quad (5)$$

Разность фаз встречных волн на выходе кольца, обусловленная эффектом Саньяка, составляет

$$\Phi_S = \omega \Delta t' = \frac{4S\Omega\omega}{c^2 (1 - R^2 \Omega^2 / c^2)^{1/2}} = \frac{8\pi S\Omega\nu}{c^2 (1 - R^2 \Omega^2 / c^2)^{1/2}}, \quad (6)$$

где  $\nu$  — частота источника излучения в системе отсчета  $K'$  в случае, если источник излучения расположен на расстоянии  $R$  от центра вращения, т.е. непосредственно на кольце;  $\omega = 2\pi\nu$  — круговая частота источника излучения;  $S = \pi R^2$  — площадь кольца.

Из выражения (6) следуют два важных вывода.

I. Величина разности фаз встречных волн, обусловленная эффектом Саньяка, не зависит от фазовой скорости волны, а зависит от частоты волны  $\nu$ . В частности, отсюда следует, что величина разности фаз встречных волн, обусловленная эффектом Саньяка в оптическом диапазоне, где  $v_{\phi} = c/n$ , не зависит ни от коэффициента преломления  $n$  оптической среды, заполняющей интерферометр, ни от дисперсии коэффициента преломления  $dn/d\lambda$ , причем вне зависимости от соотношения  $R\Omega/c$ .

II. В выражении (2) мы использовали релятивистский закон сложения фазовой скорости  $v_{\phi}$  и скорости вращения кольца  $R\Omega$ . Это соответствует тому, что эффект Саньяка является эффектом СТО [10, 11]. В разделе 5.2 будет показано, что использование галилеевского закона сложения скоростей при рассмотрении эффекта Саньяка для волн, распространяющихся в материальных средах, приводит к ошибочному результату, заключающемуся в отрицании существования данного эффекта.

### 3.3. Эффект Саньяка в квантовой механике как следствие воздействия векторного потенциала силы Кориолиса на фазы волновых функций встречных волн в сопровождающей вращение системе отсчета

Если скалярный потенциал силы Кориолиса вводится с большими допущениями и оговорками, то векторный потенциал этой силы может быть введен вполне корректно. В соответствии с законами квантовой механики векторный потенциал воздействует на фазу волновой функции. Как и в случае со скалярным потенциалом силы Кориолиса, векторный потенциал силы Кориолиса не оказывает влияния на координату и скорость частицы. Вычисление разности фаз для встречных волн де Бройля во вращающемся кольцевом интерферометре проводилось в работах [9, 17, 130, 131, 181–183]. Для этих вычислений применялись решения соответствующих уравнений Шрёдингера, Дирака или Клейна–Гордона [182]. Обычно вычисления проводятся в приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) [9, 17, 181]. Разность фаз встречных волн определяется следующим выражением [9]:

$$\Phi_S = \frac{8\pi ES\Omega}{hc^2}, \quad (19)$$

где  $E$  — полная энергия материальной частицы,  $h$  — постоянная Планка.



$$\Phi_S = \frac{8\pi ES\Omega}{hc^2}, \quad (19)$$

где  $E$  — полная энергия материальной частицы,  $h$  — постоянная Планка.

Подставляя в (19)  $E = hv$ , где  $v$  — частота волны де Бройля материальной частицы или частота светового кванта, получим выражение (6) с точностью до малых релятивистских поправок. Соответственно подставляя в (6)  $v = E/h$ , получим выражение (19). Таким образом, для вычисления фазового сдвига встречных волн де Бройля во вращающемся кольцевом интерферометре, который обусловлен эффектом Саньяка, вовсе не обязательно прибегать к квантовомеханическим расчетам мнимой части волновой функции: результат может быть получен с помощью простых кинематических расчетов в рамках СТО, поскольку, как было отмечено выше, они справедливы для волн произвольной природы. Подставляя в (19) выражение для полной энергии материальной частицы с ненулевой массой покоя  $E = mc^2$ , где

$$m = m_0 \sqrt{1 - \frac{v_m^2}{c^2}}$$

— релятивистская масса частицы,  $m_0$  — масса покоя частицы,  $v_m$  — скорость материальной частицы, получим хорошо известное выражение для эффекта Саньяка

на волнах де Бройля [24]

$$\Phi_S = \frac{8\pi S\Omega m}{h}. \quad (20)$$

$$\Phi_S = \frac{8\pi S\Omega m}{h}. \quad (20)$$

Из выражения (20), в частности, следует [24], что разность фаз, обусловленная эффектом Саньяка на волнах де Бройля, не зависит в нерелятивистском пределе от скорости частиц  $v_m$ , т.е. от длины волны де Бройля  $\lambda_m = h/(mv_m)$ . Таким образом, здесь (в отличие от электромагнитных волн) использование немонахроматического пучка материальных частиц не приведет к ухудшению видности интерференционной картины.

Отметим, что в силу ряда причин кольцевые интерферометры на волнах де Бройля не изготавливаются, они выполняются в виде равноплечных интерферометров Маха–Цандера, в которых частицы встречаются, когда каждая из них прошла половину от полного замкнутого пути. Вследствие этого эффективная площадь интерферометра Маха–Цандера становится в два раза меньше по сравнению с кольцевым интерферометром той же конфигурации (и соответственно в выражениях (19), (20) вместо цифры 8 будет стоять цифра 4).

УДК 535.5; 535.854

## К ВОПРОСУ О ВОЗМОЖНОСТИ РЕГИСТРАЦИИ ЭФФЕКТА САНЬЯКА С ПОМОЩЬЮ $\pi$ -МЕЗОНОВ

Г. Б. Малыгин

Предлагается измерение эффекта Саньяка для встречных волн де Бройля  $\pi^+$  или  $\pi^-$  мезонов, спина которых равен нулю. Последнее обстоятельство позволяет избежать взаимного сдвига фазы встречных волн, связанного как с томографической преобразованием (эффектом СТО), так и с обусловленной наличием магнитных полей ларморовской прецессией спина элементарных частиц. К преимуществам использования  $\pi$  мезонов относятся наличие у них парада, что позволяет использовать хорошо известные в электронной оптике устройства для фокусировки, разделения и соединения пучка частиц, а также сравнительно большое время их жизни. Применяется модуляционный метод обработки интерференционного сигнала. Проведена оценка ограниченной дробными шумами предельной чувствительности рассматриваемого метода.

Эффект Саньяка [1] заключается в том, что во вращающемся кольцевом интерферометре одна встречная волна приобретает фазовый сдвиг  $\Delta\varphi_0$  относительно другой, который пропорционален угловой скорости  $\Omega$  и площади  $S_0$ , охватываемой интерферометром:

$$\Delta\varphi_0 = \frac{8\pi S_0 \Omega}{\lambda c}, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — длина волны света,  $c$  — скорость света.

Эффект Саньяка может использоваться как для целей навигации [2], так и для исследования фундаментальных физических явлений [3].

В настоящее время этот эффект обнаружен не только для электромагнитных волн, но и для волн де Бройля материальных частиц: электронов [4], нейтронов [5], атомов халькима [6], нейтрино [7] и позитронов [8]. Основная причина, привлекающая внимание исследователей к де бройлевской интерферометрии, заключается в возможности существенно повысить чувствительность измерений по сравнению с оптическим дельта-методом, поскольку волны де Бройля материальных частиц на много порядков короче длины волны света.

Приведем выражение для сдвига фазы волн де Бройля материальных частиц, вызванного эффектом Саньяка в кольцевом интерферометре [4]:

$$\Delta\varphi_m = \frac{8\pi m S_m \Omega}{\hbar}, \quad (2)$$

Г. Б. Малыгин

767

где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$  — релятивистская масса частицы,  $m_0$  — масса покоя частицы,  $v$  — скорость частицы,  $S_m$  — площадь интерферометра ( $\lambda_m = \hbar / mv$ ) — длина волны де Бройля).

Здесь следует отметить одну интересную особенность — как следует из выражения (2), в нерелятивистском пределе величина эффекта Саньяка не зависит от скорости частицы. В случае использования монохроматического пучка материальных частиц, т. е. частиц с различными скоростями, величина эффекта Саньяка будет одинаковой для волн де Бройля, создаваемых всеми частицами, и на выходе интерферометра будет иметь место четкая интерференционная картина, независимо от угловой скорости вращения. Это является одним из преимуществ кольцевого интерферометра на волнах де Бройля материальных частиц перед оптическим кольцевым интерферометром — в последнем, при использовании монохроматического источника излучения, величина эффекта Саньяка будет различной для различных длин волны света (см. выражение (1)), и при увеличении угловой скорости вращения видимость интерференционной картины падает [9].

Отметим, что для случая, когда изменение разности фаз волн де Бройля вызвано изменением квантовомеханического состояния спина нейтронов под действием вектор-потенциала магнитного поля (скалярным эффектом Ааронова-Бома — эффектом Ааронова-Камера [10]), то величина фазового сдвига также не зависит от скорости нейтронов [11]. Отметим также, что в ряде работ (см., напр., [12]) рассматривается некоторая аналогия между эффектом Саньяка и эффектом Ааронова-Бома.

В случае, если разность оптических путей для встречных волн в интерферометре на волнах де Бройля материальных частиц обусловлена другими причинами, например, незначительной разностью длин плеч равноплечного интерферометра Маха-Цондера (применение такого интерферометра для измерения эффекта Саньяка связано с рядом технических сложностей создания кольцевого интерферометра для встречных пучков материальных частиц) или ларморовской прецессии спина материальной частицы в магнитном поле, то видимость интерференционной картины для монохроматического пучка материальных частиц будет уменьшаться с увеличением разности фаз встречных пучков [11].

Следует иметь в виду, что чем меньше скорость материальных частиц, тем больше длина волны де Бройля и, следовательно, тем больше будет размер интерференционной картины, что усложнит регистрацию эффекта Саньяка. В то же время, как было отмечено выше, величина разности фаз встречных волн де Бройля материальных частиц, обусловленная эффектом Саньяка, не зависит от скорости частиц, и, казалось бы, в данном случае выгодно использовать медленные материальные частицы. Однако в случае, если время жизни материальных частиц ограничено, то при уменьшении их скорости уменьшается и длина их пробега, вследствие

768

Г. Б. Малыгин

чего придется уменьшать размеры, а следовательно, и площадь интерферометра, что приведет, в соответствии с выражением (2), к снижению чувствительности. Поэтому в каждом конкретном случае следует найти оптимальную скорость материальных частиц.

Основное ограничение точности измерения эффекта Савьяка в оптическом диапазоне — в волоконных кольцевых интерферометрах (ВКИ), изготовленных на основе одноходовых волоконных световодов (ОВС), — связано с наличием полярризационной неясности, которая приводит к появлению сдвига фазы интерференционной картины на выходе ВКИ, не связанного с вращением, — к сдвигу нуля ВКИ [13, 14]. В работе [13] показано, что если излучение на входе ВКИ полностью деполаризовано, иными словами, в нем в равной мере присутствуют фотоны с различными состояниями поляризации, то сдвига нуля не будет.

Отметим, что само явление поляризации света связано с наличием спина у фотона, и различным состояниям поляризации соответствует различный вид матрицы плотности квантовомеханического состояния спина [16]. Волны де Бройля материальных частиц: электронов нейтронов, атомов, — также поляризуются, поскольку перечисленные частицы имеют спин и его квантовомеханическое состояние определяет состояние поляризации частицы [16].

При измерении эффекта Савьяка с помощью электронов [4], последние движутся в электрическом и магнитном полях сложной конфигурации, что приводит к ларморовской прецессии спина электрона и вызывает взаимный фазовый сдвиг встречных волн [17, 18], аналогичный полярризационной неясности ВКИ. Отметим здесь, что в работах [19, 20] решается задача об изменении квантовомеханического состояния спина электрона при одновременном наличии электрического и магнитного полей, в работе [21] рассматривается аналогия между ларморовской прецессией спина электрона и вращением состояния поляризации света в среде с двулучепреломлением.

Как показано в работах [17, 18], даже если полностью устранить влияние электрического и магнитного полей на квантовомеханическое состояние спина материальных частиц, то остается еще одна причина, принципиально ограничивающая точность измерения разности фаз во встречных волнах кольцевого интерферометра, — прецессия Томаса спина частицы, которая является эффектом СТО [22]. Следует однако отметить, что вследствие ряда технических причин, ограничивающих точность измерения, в настоящее время экспериментально не обнаружено влияния прецессии Томаса на сдвиг интерференции встречных волн де Бройля материальных частиц.

Целью настоящей работы является: предложить радикальный способ исключения влияния поляризации на интерферометрические измерения и, в частности, на измерение величины эффекта Савьяка — использование

материальных частиц со спином, равным нулю, и, следовательно, не имеющих поляризации, а также провести оценку ограниченной дробными шумами предельной чувствительности рассматриваемого метода. В качестве таких частиц могут быть использованы  $\pi^+$  и  $\pi^-$  мезоны, а также  $K^+$  и  $K^-$  мезоны. С практической точки зрения наиболее целесообразно использовать  $\pi$  мезоны (масса покоя — 140 МэВ, длина свободного пробега — 7,8 м, заряд  $\pi^-$  мезона равен заряду электрона,  $\pi^+$  мезон имеет заряд противоположного знака [23]), поскольку это одна из самых распространенных и хорошо изученных элементарных частиц.

Отметим, что уже более двадцать лет существуют так называемые "мезонные фабрики" — сравнительно небольшие и недорогие ускорители, в которых создается пучок  $\pi$  мезонов с током в сотни мА [24]. Наличие у мезонов электрического заряда позволяет использовать хорошо известные в электронной оптике устройства для фокусировки, раздвигания и сжатия пучка частиц.

Отметим, что, в принципе, можно также использовать интерференцию волн де Бройля атомов, суммарный спин которых равен нулю, например, атомов ортоводорода, однако такие атомы могут самопроизвольно менять свой суммарный спин, поглощая или излучая при этом квант света.

Рассмотрим возможную схему экспериментальной установки, аналогичную применявшейся в работе [4] (рис. 1). Пучок  $\pi$  мезонов раздвигается по фронту на два пучка электростатической бипризмой Френеля-Мюллера [25], которая является аналогом бипризмы Френеля в оптике, пучки расходятся. Затем каждый из пучков отражается от электростатического зеркала [26]. Далее пучки сближаются и в точке пересечения вновь соединяются в один пучок второй бипризмой, после чего имеет место интерференция волн де Бройля пучков, прошедших разные плечи интерферометра. В случае вращения установки, разность хода между пучками меняется. Регистрацию фазового сдвига, вызванного вращением, следует проводить по сдвигу интерференционных полос на выходе интерферометра. С помощью электронной оптики [26] следует сфокусировать интерференционную картину таким образом, чтобы ширина интерференционной полосы существенно превосходила размер счетчика. Увеличение интерференционной картины с помощью электронной оптики позволяет использовать достаточно быстрые (но не релятивистские, поскольку в этом случае, как было показано выше, величина эффекта Савьяка зависит от скорости частицы)  $\pi$  мезоны, со скоростью порядка 0,1 с, длина пробега которых составляет десятки сантиметров, что позволяет создать интерферометр соответствующих размеров.

Схему регистрации и обработки можно существенно упростить по сравнению с применявшейся в [4], если применить метод модуляции: следует с помощью отклоняющей системы, которая хорошо известна в электронной оптике, с некоторой частотой сканировать пучок  $\pi$  мезонов по-

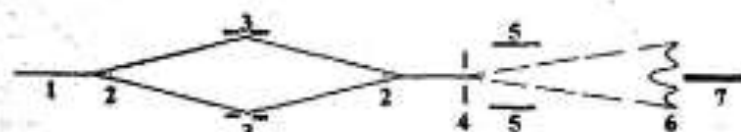


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 — пучок  $\pi$  мезонов на входе интерферометра, 2 — электростатические биатризм Френеля-Молештерта, 3 — электростатические зеркала, 4 — электростатическая линза, 5 — отклоняющая система, 6 — распределение интенсивности в пучке  $\pi$  мезонов на выходе фокусирующей и отклоняющей систем (интерференционная картина), 7 — счётчик  $\pi$  мезонов.

све второй электродной биатризм, перпендикулярно его оси, по сквозидальному окну, т.е. скалярно всю интерференционную картину в плоскости изображения (см. рис. 1). При этом можно использовать один счётчик, установленный в месте, где при отсутствии скалярноования расположен главный максимум интерференционной картины. При отсутствии вращения на выходе счётчика будет иметь место модуляция сигнала только на удвоенной частоте скалярноования. Но при наличии вращения вся интерференционная картина сдвинется и появится модуляция и на частоте скалярноования, причём её глубина будет пропорциональна угловой скорости, а фаза будет зависеть от направления вращения. Обработку сигнала можно проводить с помощью фазового детектора, причём в качестве опорного сигнала используется переменное напряжение, подаваемое на отклоняющую систему.

Отметим здесь, что в случае использования интерферометра Маха-Цендера эффективная площадь интерферометра, определяющая чувствительность установки, в два раза меньше, чем для кольцевого интерферометра тех же размеров, вследствие чего в выражении (2) будет стоять коэффициент 4, а не 8.

Проведём сравнение предельной чувствительности эффекта Салыка для  $\pi$  мезонов ( $\Omega_m^{\min}$ ) и в оптическом диапазоне для ВКИ ( $\Omega_o^{\min}$ ). Из выражений (1) и (2) следует

$$\Omega_m^{\min} / \Omega_o^{\min} = (\Delta\varphi_m^{\min} / \Delta\varphi_o^{\min}) \frac{(\hbar / 4\pi S_m m)}{(\lambda_o c / 8\pi S_o)}, \quad (3)$$

где  $\Delta\varphi_m^{\min}$  и  $\Delta\varphi_o^{\min}$  — ограниченная дробовыми шумами фазовая чувствительность соответственно для волн де Бройля материальных частиц и оптических волн,  $(\hbar / 4\pi S_m m)$  и  $(\lambda_o c / 8\pi S_o)$  — так называемые масштабные коэффициенты соответственно для волн де Бройля материальных частиц и оптических волн. Используя результаты [27–29], можно написать

$$\Delta\varphi_m^{\min} / \Delta\varphi_o^{\min} = \sqrt{N_o / N_m}, \quad (4)$$

где  $N_o$  и  $N_m$  — соответственно число фотонов, поступающих за единицу времени на фотоприёмник на выходе ВКИ, и число  $\pi$  мезонов, поступающих за единицу времени (в данном случае, за секунду) на счётчик мезонов (сейферовский, сцинтилляционный, вильсоновский или черенковский), установленный на выходе интерферометра на волнах де Бройля материальных частиц. Для простоты в выражении (4) предполагается, что фотоприёмник и счётчик мезонов имеют квантовую эффективность, равную единице, т.е. регистрируется каждая частица. Предполагаем, что видимость интерференционной картины также составляет единицу.

Для того, чтобы определить величину  $N_o$  в оптике, используем результаты работы [30], где были получены рекордные результаты по чувствительности ВКИ. Мощность излучения  $P$  на выходе ВКИ составляла 21 мкВт при длине волны света 0,8 мкм. Следовательно,  $N_o = P\lambda_o / \hbar c = 8,4 \cdot 10^{13}$ . Для оценки интенсивности пучка  $\pi$  мезонов учтём тот факт, что, как показано в работе [4], для получения хорошей видности интерференции встречных пучков электронов приходилось ограничивать токи пучков до значений 20–100 нА. Увеличение интенсивности пучка приведёт к увеличению его поперечного сечения, что, в свою очередь, может привести к ухудшению его когерентности в поперечном сечении и, как следствие, к снижению видности интерференции. Поскольку движение пучков  $\pi^+$  и  $\pi^-$  мезонов в электромагнитных полях качественно сходно с движением электронов (позитронов) с тем различием, что первые имеют существенно большую массу, то для оценок предельной чувствительности примем ток пучка мезонов  $I$  равным 100 нА. В этом случае  $N_m = I/e = 6,2 \cdot 10^{13}$ , где  $e$  — заряд электрона. Следовательно,  $\sqrt{N_o / N_m} = 11,5$ .

Для того, чтобы вычислить отношение масштабных коэффициентов, нам необходимо знать отношение площадей интерферометров на  $\pi$  мезонах и на световых волнах. Для оценок положим, что площадь интерферометра на мезонах составляет  $10 \text{ см}^2$ , при этом интерферометр Маха-Цендера имеет размеры  $20 \times 0,5 \text{ см}$ . Параметры исследуемого в [30] ВКИ были следующими: длина контура составляла 1 км, диаметр катушки — 32 см и, следовательно, площадь контура составляла  $79 \text{ м}^2$ . Тогда на выражениях (3) и (4) следует  $\Omega_m^{\min} / \Omega_o^{\min} = 2 \cdot 10^{-3}$ . Таким образом, несмотря на то, что площадь интерферометра на  $\pi$  мезонах почти в  $10^6$  раз меньше, а число частиц в единицу времени в  $10^3$  раз меньше, чем у ВКИ, чувствительность его в  $5 \cdot 10^3$  раз больше, чем у ВКИ, рассмотренного в [30].

Основной результат работы заключается в том, что предложен метод измерения эффекта Салыка с помощью  $\pi$  мезонов, который позволяет полностью исключить влияние поляризационной неопределенности. Следует отметить, что хотя в настоящее время, во-первых, ряда технических причин, чувствительности интерферометров на волнах де Бройля материальных частиц не превосходит чувствительности лучших ВКИ —

$1,5 \cdot 10^{-2}$  рад/с [30] — и составляет порядка  $6 \cdot 10^{-1}$  рад/с для электронов [4],  $6 \cdot 10^{-2}$  рад/с — для нейтронов [5], и  $3 \cdot 10^{-7}$  рад/с и  $2 \cdot 10^{-8}$  рад/с соответственно для атомов натрия [7] и цезия [8] (в волнах 1 Гц), и перспективе она может на много порядков повысить чувствительность соответствующих оптических интерферометров [31, 32]. Можно надеяться, что предложенный метод позволит реализовать достаточно высокую чувствительность.

В заключение автор выражает благодарность В.Л. Соловьеву (ИФВЭ) и А.А. Тихину (ОИЯИ) за ряд полезных консультаций, В.В. Кочаровскому и Ва.В. Кочаровскому за обсуждение результатов работы.

Работа частично поддержана грантом № 96-02-18568а РФФИ и № 96-15-96742.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sagnac M. G. //J. de Phys., 1914. N° 4. P. 177.
2. Курицин М. М., Голдштейн М. С. //ТМНЭФ, 1983. Т. 71. С. 47.
3. Scully M. O., Zubairy M. S., Hagan M. P. //Phys. Rev., 1981. V. A24. P. 2009.
4. Hasselbach F., Nicklaus M. //Phys. Rev., 1993. V. A48. P. 143.
5. Werner S. A., Staudmann J. L., Collela R. //Phys. Rev. Lett., 1979. V. 42. P. 1103.
6. Riehle F., Kisters T., Witte A. et all //Phys. Rev. Lett., 1991. V. 67. P. 177.
7. Lemel A. et all //Phys. Rev. Lett., 1997. V. 78. P. 760.
8. Gustavson T. L., Bouyer P., Kasevich M. A. //Phys. Rev. Lett., 1997. V. 78. P. 2046.
9. Burns W. K., Moeller R. P. //J. of Lightwave Techn., 1987. V. LT-5. P. 1024.
10. Aharonov Y., Casher A. //Phys. Rev. Lett., 1984. V. 53. P. 319.
11. Badurek G. et all //Phys. Rev. Lett., 1993. V. 71. P. 307.
12. Harris E. G. //Am. J. Phys., 1996. V. 64. P. 378.
13. Коопс С. М., Листани В. Н., Шаталина С. В. и др. //Оптика и спектроскопия, 1986. Т. 61. С. 1296.
14. Малыгин Г. Б. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1991. Т. 34. С. 817.
15. Биренхарт Л., Паук Д. Угловой момент в квантовой физике. — М.: Мир, 1984. (Biedenharn L. C., Louck J. D. Angular momentum in quantum physics. — Massach.: Addison-Wesley, 1981.)
16. McMaster W. H. //Rev. Mod. Phys., 1961. V. 33. P. 8.
17. Anandan J. //Phys. Rev., 1981. V. D24. P. 338.
18. Mashoon B. //Phys. Rev. Lett., 1988. V. 61. P. 2639.

19. Bargmann V., Michel L., Telegdi V. L. //Phys. Rev. Lett., 1959. V. 2. P. 435.
20. Aharonov Y., Susskind L. //Phys. Rev., 1967. V. 138. P. 158.
21. Запасский В. С., Коопс Г. Г. //Оптика и спектроскопия, 1995. Т. 78. С. 100.
22. Moeller C. The Theory of relativity. — Oxford Clarendon Press, 1962.
23. Particle Physics (booklet). — Am. Inst. of Physics, LBL and CERN, 1996.
24. Роумен Л. //УФН, 1972. Т. 106. С. 664.
25. Mollenstedt G., Duker H. //Zeitschrift fur Physik, 1956. V. 145. P. 337.
26. Вайриб Е. А., Малыгин В. И. Электронная оптика. — М.-Л.: Энергоиздат, 1951.
27. Берштейн И. Л. //УФН, 1953. Т. 49. С. 631.
28. Андромона Н. А., Берштейн И. Л., Зайцев Ю. И. //Изв. АН, сер Физ., 1982. Т. 46. С. 1590.
29. Чечня Н. О. //УФН, Т. 46. С. 74.
30. Moeller R. P., Burns W. K., Frigo N. G. //J. of Lightwave Techn., 1989. V. 7. P. 262.
31. Hasselbach F., Nicklaus M. //Physica, 1988. V. B151. P. 230.
32. Clauser J. P. //Physica, 1988. V. B151. P. 262.

Институт прикладной физики РАН, Н.Новгород, Россия  
Поступила в редакцию 2 июля 1997 г.

THE POSSIBILITY OF RECORDING THE SAGNAC EFFECT BY  $\pi$ -MESONS  
G. B. Malgukin

Recording of the Sagnac effect for counterrunning de Broglie waves by positive or negative  $\pi$ -mesons with spin equal to zero is suggested. The zero spin allows to avoid non-reciprocal phase shift of the counterrunning waves that is connected both with the Thomas precession, i.e. special relativity theory, as well as with the Larmor precession of the elementary particles spin. The Larmor precession is caused here by magnetic fields. Among the advantages of the  $\pi$ -mesons are their relatively long life time and the charge. The latter feature makes it possible to apply devices commonly used in electron optics for focusing as well as for separation and coupling the particle beam. A modulation method of interference signal processing is offered. The shot noise-limited maximum sensitivity of the discussed method is evaluated.

XV. *Aberration Problems.*—*A Discussion concerning the Motion of the Ether near the Earth, and concerning the Connexion between Ether and Gross Matter; with some new Experiments.*

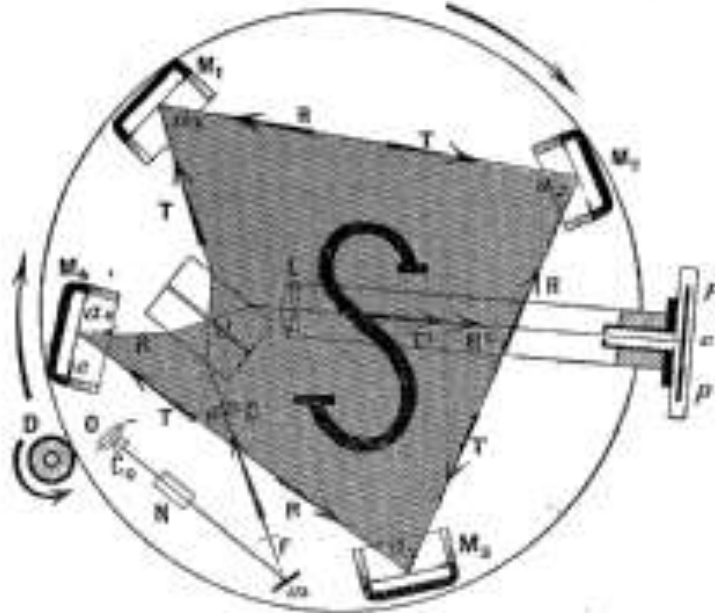
By OLIVER J. LODGE, *F.R.S.*

Received and Read March 31, 1892.—Revised July 17, 1893.

[PLATES 31, 32.]

TABLE OF CONTENTS.

Section		Page.
1.	Statement of problem . . . . .	729
2.	Meaning of free and modified	
3.	Meaning of travel of modified	
4.	FRESNEL'S hypothesis . . . . .	
5.	Expression in terms of elect	
6.	J. J. THOMSON'S hypothesis	
7.	Verification of one part of F	
8.	Attempted verification of th	
9.	Summary of phenomena res	
10.	Projectile analogies . . . . .	
11.	Effect of motion on waves, r	
12.	Frequent convenience of att	
13.	Fixed source in moving med	
14.	Moving source in fixed med	
15.	Medium moving past fixed s	
16.	Modes of observing interfer	
17.	Influence of dense bodies in	
18.	Modes of observing effect of	
19.	Criticism of the suggested e	
20.	Receiver only moving, effec	
21.	Summary of conclusions so	
22.	No method of detecting fir	
23.	Treatment by principle of least time . . . . .	730
24.	Irrotational motion of homogeneous medium causes no first-order effects . . . . .	748
25.	First discussion of Mr. MICHELSON'S experiments. Extraordinary result . . . . .	749
26.	Contradictory result supposed to be obtained by FIZEAU'S polarization experiment . . . . .	750
27.	Summary of statements concerning rays and wave-normals in an irrotationally moving medium. Line of vision depends only on motion of observer . . . . .	750
28.	In a non-homogeneous medium, motion such that $\mu^2 v \cos \theta$ is constant or is the derivative of a potential function, will cause no first-order effects . . . . .	751



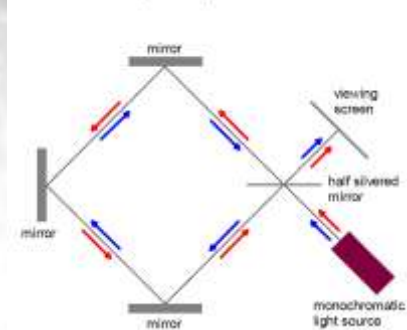
$$\Delta\Phi = 8\pi \frac{S}{\lambda c} \Omega$$

Sir Oliver Joseph Lodge



$$\Delta\Phi_{classic} = 8\pi \frac{S}{\lambda c} \Omega [1 - (\Omega R)^2 / c^2]^{-1}$$

$$\Delta\Phi_{relativistic} = 8\pi \frac{S}{\lambda c} \Omega [1 - (\Omega R)^2 / c^2]^{-1/2}$$



“Классический” вывод формулы Саньяка:  $\Delta t \equiv \Delta t_+ - \Delta t_- = \frac{4\pi R^2 N}{c^2 [1 - (\Omega R)^2 / c^2]} \Omega \cong \frac{4\pi R^2 N}{c^2} \Omega$

Вывод формулы Саньяка на основе СТО:  $\Delta t \equiv \Delta t_+ - \Delta t_- = \frac{4\pi R^2 N}{c^2 [1 - (\Omega R)^2 / c^2]^{1/2}} \Omega \cong \frac{4\pi R^2 N}{c^2} \Omega$





# Is the Sagnac Effect relativistic effect?

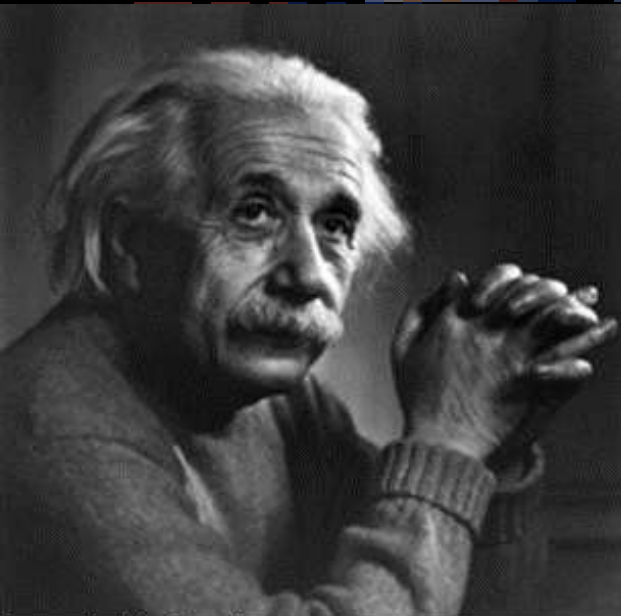
$$\Delta\Phi_{\text{classic}} = 8\pi \frac{S}{\lambda c} \Omega [1 - (\Omega R)^2 / c^2]^{-1}$$

$$\Delta\Phi_{\text{relativistic}} = 8\pi \frac{S}{\lambda c} \Omega [1 - (\Omega R)^2 / c^2]^{-1/2}$$

$$\Omega = 2\pi c^{-1}; \quad R = 0,05 \text{ м}; \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ мс}^{-1} \Rightarrow$$

$$(\Omega R)^2 / c^2 = (\pi / 3)^2 10^{-18} \cong 1 \times 10^{-18}$$

$$\Delta\Phi_{\text{I}} = 8\pi \frac{S}{\lambda c} \Omega$$



Sir Oliver Joseph Lodge





$$\Delta\Phi_l = 8\pi \frac{S}{\lambda c} \Omega \rightarrow \Delta\Phi_m = 8\pi \frac{S}{\lambda_B v} \Omega$$

Гипотеза Л. де Бройля:

Каждой частице с определенным импульсом соответствует волновой процесс с длиной волны:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

$$c \rightarrow v, \quad \lambda \rightarrow \lambda_{dB} = h / mv \quad \Rightarrow$$

$$\Delta\Phi_m = 8\pi \frac{S}{\lambda_{dB} v} \Omega = 8\pi \frac{m}{h} S \Omega = 4 \frac{m}{\hbar} S \Omega \rightarrow 4 \frac{m}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{\Omega} \rightarrow 2 \frac{m}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{\Omega}.$$



$$\frac{\Delta\Phi_m}{\Delta\Phi_l} = \frac{\partial\Delta\Phi_m / \partial\Omega}{\partial\Delta\Phi_l / \partial\Omega} = \frac{\lambda c}{v} \frac{1}{\lambda_B} = \frac{\lambda c}{v} \frac{mv}{h} = \frac{mc}{h} \lambda = \frac{mc}{h} \frac{c}{v} = \frac{mc^2}{hv}.$$

$$\lambda = 0.63 \mu\text{m}; \quad {}^4\text{He}, \text{Cs}, \text{C}_{60} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\Phi_m}{\Delta\Phi_l} = \frac{mc^2}{hv} : 2 \times 10^9, 6 \times 10^{10}, 3 \times 10^{11}.$$

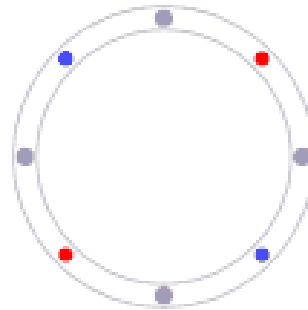


Квазиклассический (условно корректный) вывод выражения эффекта Саньяка  
 (Николай Кробка, студент III курса ФФКЭ МФТИ, 17.10.1975,  
 после экскурсии в отдел № 6 НИИ прикладной физики)

### Системы отсчета

$\{K, t\}$  и  $\{K', t'\}$

$$|\vec{V}_K^+| = |\vec{V}_K^-| = V$$



$$|\vec{V}_{K'}^+| = V - \Omega R$$

$$|\vec{V}_{K'}^-| = V + \Omega R$$

$$\dot{V} = \dot{\Omega} = \dot{R} = 0$$

$$\Delta t_{K'} = \frac{2\pi R}{V - \Omega R} - \frac{2\pi R}{V + \Omega R} = \frac{4\pi R^2 \Omega}{V^2 - (\Omega R)^2} = \frac{4S\Omega}{V^2} \left[ 1 - \left( \frac{\Omega R}{V} \right)^2 \right]^{-1}$$

$$\Delta t_{K'} = \lim_{V \rightarrow c} \frac{4S\Omega}{V^2} \left[ 1 - (\Omega R / V)^2 \right]^{-1} = \frac{4S\Omega}{c^2} \left[ 1 - (\Omega R / c)^2 \right]^{-1/2}$$

$$\pi \rightarrow \pi \left[ 1 - (\Omega R / c)^2 \right]^{-1/2}$$

40 лет спустя

## МАТЕМАТИКА

$$\Delta t_S = \frac{4\vec{S} \cdot \vec{\Omega}}{c^2} \left[1 - \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2\right]^{-1} \left[1 - \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{4\vec{S} \cdot \vec{\Omega}}{c^2} \left[1 - \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2\right]^{-1/2}$$

## ФИЗИКА

$$\Delta t_S = \frac{4\vec{S} \cdot \vec{\Omega}}{c^2} \left[1 - \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2\right]^{-1} \left[1 - \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\Delta t_N = \frac{4\vec{S} \cdot \vec{\Omega}}{V^2} \left[1 - \left(\frac{\Omega R}{V}\right)^2\right]^{-1} \left[1 - \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2\right]^{1/2}$$

## НОВЫЙ ГИРОСКОПИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

$$\Delta t_N \equiv \frac{4\vec{S} \cdot \vec{\Omega}}{V^2} \left[1 - \left(\frac{\Omega R}{V}\right)^2\right]^{-1}$$

# 5. Нерешенные задачи атомной интерферометрии



HOME

PROJECTS

QUESTIONS

JOBS



Nikolay Krobka · il 5.25

Research Institute for Applied Mechanics named after Academi...

**Who knows the exact expression for the Sagnac effect in the case of de Broglie waves?**

I mean the general case of arbitrary motion of the atomic interferometer, when the vectors of absolute angular velocity and apparent acceleration are arbitrary changing in time and space.

acceleration x

Atomic x

Interferometer x

0 / 0

All Answers (2)



Ivan Ivanovich Dolgov · il 1.04 · "IVAN DOLGOV LABORATORY" LLC ("IDL" LLC)

Я думаю что никто.



5 days ago



Nikolay Krobka · il 5.25 · Research Institute for Applied Mechanics named after Academician V. I. Kuznetsov (branch of FSUE "TsENKI")

Спасибо. Но подождем, - послушаем мнения.

5 days ago

# Модельные фазы атомного интерферометра

## Double interferometer

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_{\text{acceleration}} + \Delta\Phi_{\text{rotation}}$$

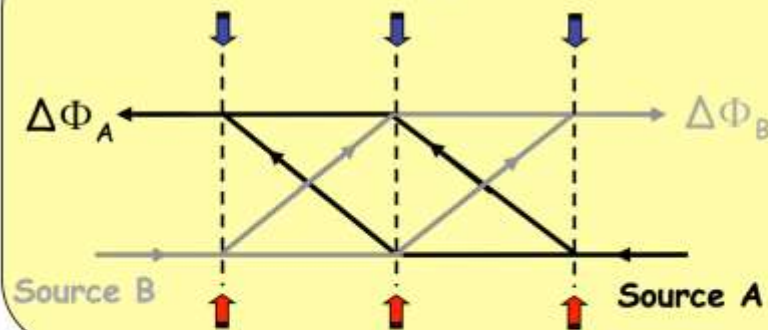
T L Gustavson et al., Class. Quantum Grav. 17 (2000) 1-14.

$$\vec{k}_{\text{eff}} \cdot \vec{a} T^2$$

$$-2\vec{k}_{\text{eff}} \cdot \vec{\Omega} \times \vec{V} T^2$$

Rotation phase shift:  
Direction of atoms

Two atomic sources of opposite directions



Sum: acceleration

$$\Delta\Phi_{\text{acc}} = \frac{\Delta\Phi_A + \Delta\Phi_B}{2}$$

Difference: rotation

$$\Delta\Phi_{\text{rot}} = \frac{\Delta\Phi_A - \Delta\Phi_B}{2}$$

# Interferometer signals

Measure number of atoms in one or both states (fluorescence)

- Probability of atom transition
- Phase ( $2\pi$  ambiguity)
- Inertial signal(s)
- Sum and difference opposite atom velocities to distinguish rotation, linear acceleration

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \underbrace{\frac{2m}{\hbar} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A} + \phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3}_{\Delta\Phi} \right) \right]$$

$$\Delta\Phi = -\mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{a}T^2 + \phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3$$

$$\mathbf{a}_{\text{Cor}} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$$

$$\text{ARW} = \sqrt{3600} \frac{180}{\pi} \frac{1}{\text{SNR} \cdot 2v\hbar T^2} \sqrt{T/2} \quad [\text{Degrees}/\sqrt{\text{h}}]$$

SNR  $\sim$  1/sqrt(N) "Quantum projection noise"



# Advances in Atomic Gyroscopes: A View from Inertial Navigation Applications

JianCheng Fang and Jie Qin\*

[Author information](#) ► [Article notes](#) ► [Copyright and License information](#) ►

This article has been [cited by](#) other articles in PMC.

## Abstract

Go to:

With the rapid development of modern physics, atomic gyroscopes have been demonstrated in recent years. There are two types of atomic gyroscope. The Atomic Interferometer Gyroscope (AIG), which utilizes the atomic interferometer to sense rotation, is an ultra-high precision gyroscope; and the Atomic Spin Gyroscope (ASG), which utilizes atomic spin to sense rotation, features high precision, compact size and the possibility to make a chip-scale one. Recent developments in the atomic gyroscope field have created new ways to obtain high precision gyroscopes which were previously unavailable with mechanical or optical gyroscopes, but there are still lots of problems that need to be overcome to meet the requirements of inertial navigation systems. This paper reviews the basic principles of AIG and ASG, introduces the recent progress in this area, focusing on discussing their technical difficulties for inertial navigation applications, and suggests methods for developing high performance atomic gyroscopes in the near future.

**Keywords:** atomic gyroscope, atomic interferometer, atomic spin, cold atom, guided atom, SERF, comagnetometer

$$\delta\Phi_{atom} = \frac{4\pi m}{h} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{g}T^2 - \mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{g})T^3$$



# Фаза атомного интерферометра

«Классическая»

Уточнения

$$\Delta\phi = \mathbf{k}_{eff} \cdot \mathbf{g} T^2 + \frac{2m}{\hbar} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{k}_{eff} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{g}) T^3 + \Delta\phi^0.$$

## Формула Борде

For each part of the previous phase shift we obtain consequently (let us recall that  $\alpha$  is defined such that  $\alpha \cdot \vec{q} := -\vec{\Omega} \times \vec{q}$  for any vector  $\vec{q}$ )

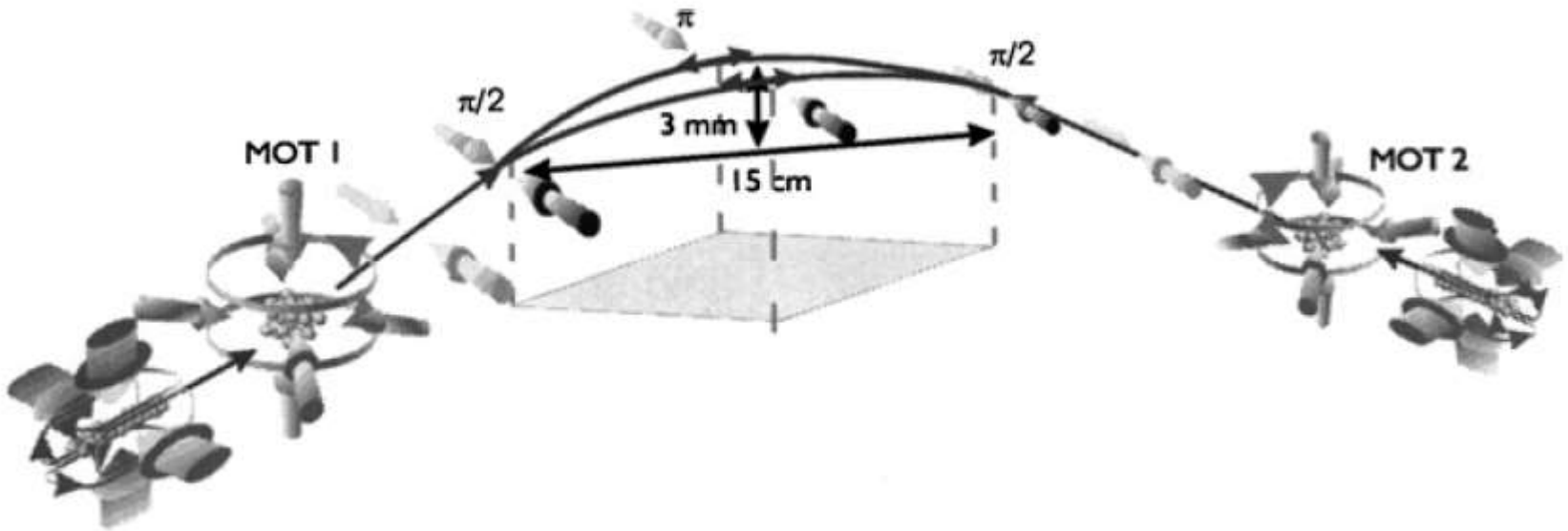
$$\begin{aligned} \Delta\phi_g = & \vec{k}_1 \cdot [T^2(\alpha^2 + \gamma) + T^3(\alpha^3 + 2\alpha\gamma + \gamma\alpha) \\ & + \frac{7}{12}T^4(\alpha^4 + 3\alpha^2\gamma + 2\alpha\gamma\alpha + \gamma\alpha^2 + \gamma^2) \\ & + \frac{1}{4}T^5(\alpha^5 + 4\alpha^3\gamma + 3\alpha^2\gamma\alpha + 2\alpha\gamma\alpha^2 + \gamma\alpha^3 \\ & + 2\alpha\gamma^2 + 2\gamma\alpha\gamma + 2\gamma^2\alpha) + \dots] \cdot \vec{q}_1 \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \Delta\phi_v = & \vec{k}_1 \cdot [2T^2\alpha + T^3(3\alpha^2 + \gamma) \\ & + \frac{7}{12}T^4(4\alpha^3 + 2\alpha\gamma + 2\gamma\alpha) \\ & + \frac{1}{4}T^5(5\alpha^4 + 3\alpha^2\gamma + 4\alpha\gamma\alpha + 3\gamma\alpha^2 + \gamma^2) \\ & + \frac{31}{360}T^6(6\alpha^5 + 4\alpha^3\gamma + 6\alpha^2\gamma\alpha + 6\alpha\gamma\alpha^2 + 4\gamma\alpha^3 \\ & + 2\alpha\gamma^2 + 2\gamma\alpha\gamma + 2\gamma^2\alpha) + \dots] \cdot \vec{v}_1 \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \Delta\phi_g = & \vec{k}_1 \cdot [T^2 + 2T^3\alpha + \frac{7}{12}T^4(3\alpha^2 + \gamma) \\ & + \frac{1}{4}T^5(4\alpha^3 + 2\alpha\gamma + 2\gamma\alpha) + \frac{31}{360}T^6(5\alpha^4 + 3\alpha^2\gamma \\ & + 4\alpha\gamma\alpha + 3\gamma\alpha^2 + \gamma^2) + \dots] \cdot \vec{g}. \end{aligned} \quad (58)$$

Term	Phase Shift	Size (rad)
1	$k_{eff}g T^2$	$2.1 \times 10^8$
2	$2\mathbf{k}_{eff} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) T^2$	5.1
3	$k_{eff}v_z \delta T$	3.5
4	$\frac{\hbar k_{eff}^2}{2m} T_{zz} T^3$	0.44
5	$k_{eff}T_{zi} (x_i + v_i T) T^2$	0.18
6	$\frac{1}{2}k_{eff}\alpha (v_x^2 + v_y^2) T^2$	0.04

**Table 4-1:** Velocity dependent phase shifts and their sizes assuming the following:  $k_{eff} = 2k = 2 \cdot 2\pi/780 \text{ nm}$ ,  $T = 1.15 \text{ s}$ , initial velocity spread  $\mathbf{v}_i = 2 \text{ mm/s}$  (50 nK), initial positions  $\mathbf{x}_i = 200 \mu\text{m}$ ,  $|\boldsymbol{\Omega}| = 60 \mu\text{rad/s}$ , gravity gradient tensor components  $T_{ij} = 3075 \text{ E}$ , interferometer pulse timing asymmetry  $\delta T = 100 \mu\text{s}$ , and wavefront curvature  $\alpha = (\lambda/10)/\text{cm}^2$ . Note that for  $T_{xx}T_{yy} = 50 \text{ E}$  the size of term 5 is significantly smaller. The acceleration (term 1) and gravity curvature (term 4) phase shifts are shown for reference.



## НЕРЕШЕННАЯ ЗАДАЧА АТОМНОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

$$\Delta\Phi_{AI} = \Delta\Phi_{AI}(t, \vec{\Omega}(t), \ddot{\vec{R}}(t), \vec{\Gamma}(\vec{R}(t), t))$$



**6. Диалектика  
корпускулярно-волнового дуализма  
(«волна-частица» - «частица-волна»)**



**Альберт Эйнштейн (1905):  
Объяснение фотоэффекта: «волна → частица». ⇒ Кванты света – фотоны.**

**Луи де Бройль (1924):  
Гипотеза: «частица → волна».  
Подтверждение дифракцией электронов (1930).**

**Общеизвестно:  
Существуют разные физические явления, в которых микрообъект проявляет  
либо корпускулярные, либо волновые свойства.  
«Либо волна, либо частица».**

**Генезис**  
**корпускулярно-волнового дуализма**  
**(«волна-частица» - «частица-волна»)**

**Николай Кробка (2016):**

**Гипотеза: Холодные и ультрахолодные атомы – «и волна, и частица».**

**Гипотеза: Существуют физические явления, в которых микрообъект проявляет одновременно и корпускулярные, и волновые свойства.**

**Пример такого явления – вращение.**

**Рабочая гипотеза:**

**Если в атомном интерферометре измерять интерференционную картину (интерференция волн де Бройля),  
то будет проявляться обобщенный эффект Саньяка,  
а если измерять разность времен прохождения двух плеч интерферометра  
холодными или ультрахолодными атомами,  
то будет проявляться совершенно другой гироскопический эффект.**

**Физическое обоснование: существенное различие фазовой скорости волны де Бройля и групповой скорости холодных и ультрахолодных атомов:**

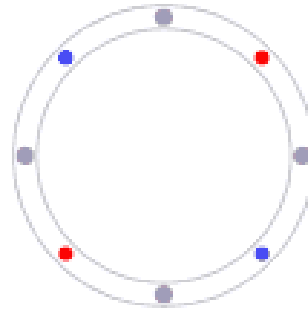
$$V_{\Phi} = c^2 / V \Rightarrow V_{\Phi} / V = c^2 / V^2 \gg \gg 1 !!!$$

**Гипотезы нужно проверять !**

Новый «кинематический» нелинейный гироскопический эффект  
 на холодных и ультрахолодных атомах  
 (Дискуссионная модель Николая Кробки)

Системы отсчета  
 $\{K, t\}$  и  $\{K', t'\}$

$$|\vec{V}_K^+| = |\vec{V}_K^-| = V$$



$$|\vec{V}_{K'}^+| = V - \Omega R$$

$$|\vec{V}_{K'}^-| = V + \Omega R$$

$$\dot{V} = \dot{\Omega} = \dot{R} = 0$$

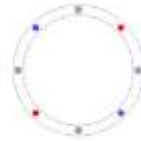
$$V \ll c, \quad \Omega R \ll c \Rightarrow (V/c)^2 \lll 1, \quad (\Omega R/c)^2 \lll 1 \Rightarrow t' \cong t$$

$$\Delta t_{K'} = \frac{2\pi R}{V - \Omega R} - \frac{2\pi R}{V + \Omega R} = \frac{4\pi R^2 \Omega}{V^2 - (\Omega R)^2} = \frac{4S\Omega}{V^2} \left[ 1 - \left( \frac{\Omega R}{V} \right)^2 \right]^{-1}$$

# Новый «кинематический» нелинейный гироскопический эффект

vs

## Эффект Саньяка

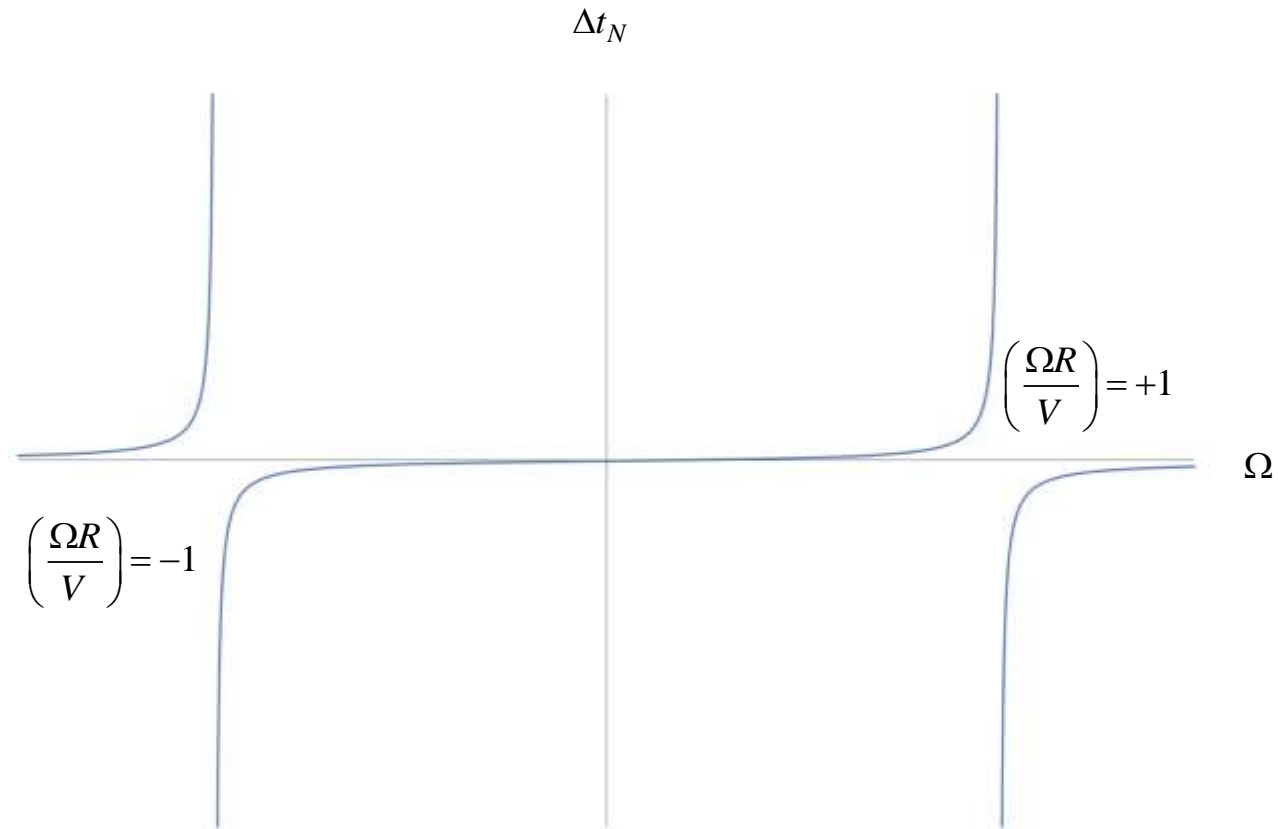


$$\Delta t_N = \frac{4S\Omega}{V^2} \left[ 1 - \left( \frac{\Omega R}{V} \right)^2 \right]^{-1}$$

$$\Delta t_S = \frac{4S\Omega}{c^2} \left[ 1 - \left( \frac{\Omega R}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} \cong \frac{4S\Omega}{c^2}$$

$$\frac{\Delta t_N}{\Delta t_S} = \frac{c^2}{V^2} \left[ 1 - \left( \frac{\Omega R}{V} \right)^2 \right]^{-1} \geq \frac{c^2}{V^2} \gg \gg 1.$$

$$\Delta t_N = \frac{4S\Omega}{V^2} \left[ 1 - \left( \frac{\Omega R}{V} \right)^2 \right]^{-1}$$



$$\left( \frac{\Omega R}{V} \right)^2 \leq (10^{-6} \dots 10^{-8})$$

$$\Omega_{\max} = 2\pi \text{rad} / c$$

$$\frac{R}{V} \leq \frac{(10^{-3} \dots 10^{-4})}{2\pi} \left[ \frac{c}{\text{rad}} \right]$$

**7. Феноменологические модели ошибок  
лазерных гироскопов и гироскопов на волнах де Бройля**

$$\delta\omega(t) = a(t) + m(t)\omega(t) + n(t, \omega(t));$$

$$a(t) \equiv \sum_{i=1}^{N_a} a_i(t, \zeta_i);$$

$$m(t)\omega(t) \equiv \sum_{j=1}^{N_m} m_j(t, \zeta_j)\omega(t);$$

$$n(t, \omega(t)) \equiv \sum_{k=1}^{N_n} n_k(t, \omega(t), \zeta_k).$$



М.Л. Еффа

## РАЗРАБОТЧИК - ТВОРЧЕСКИЙ ШАНС ИНЖЕНЕРА

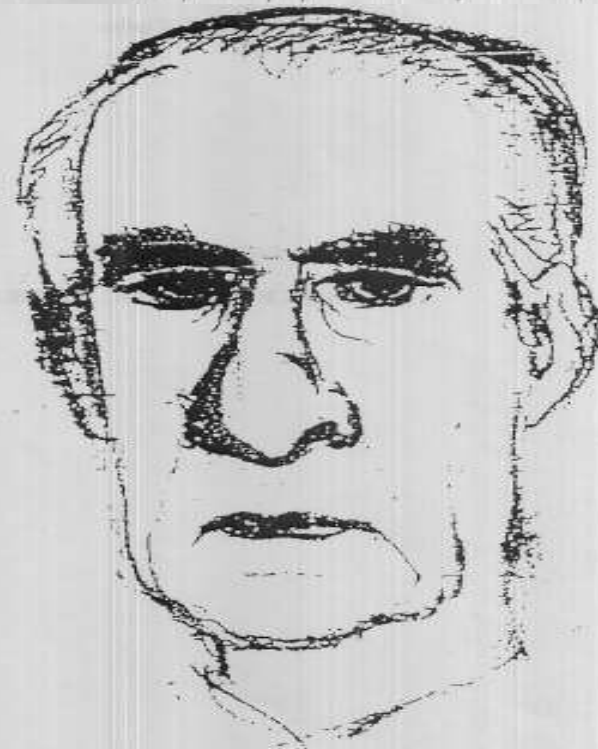
(популярное введение в профессию)

### *Аннотация*

На основе обобщения опыта разработок в области точного приборостроения автор в популярном изложении очерчивает круг задач и содержание работ инженера-разработчика в процессе создания наукоемкой продукции при реализации новых идей, показывает творческий характер этого амплуа инженерной профессии, подчеркивает его ведущую роль в достижении успеха. Брошюра рассчитана на молодых специалистов, слушателей факультетов повышения квалификации инженеров, начинающих инженеров-исследователей, конструкторов, технологов, работающих в исследовательских подразделениях НИИ, КБ, заводов. Может также представлять интерес для преподавателей высших технических учебных заведений и руководителей предприятий-разработчиков наукоемкой продукции.

РАЗРАБОТЧИК -

ТВОРЧЕСКИЙ ШАНС ИНЖЕНЕРА

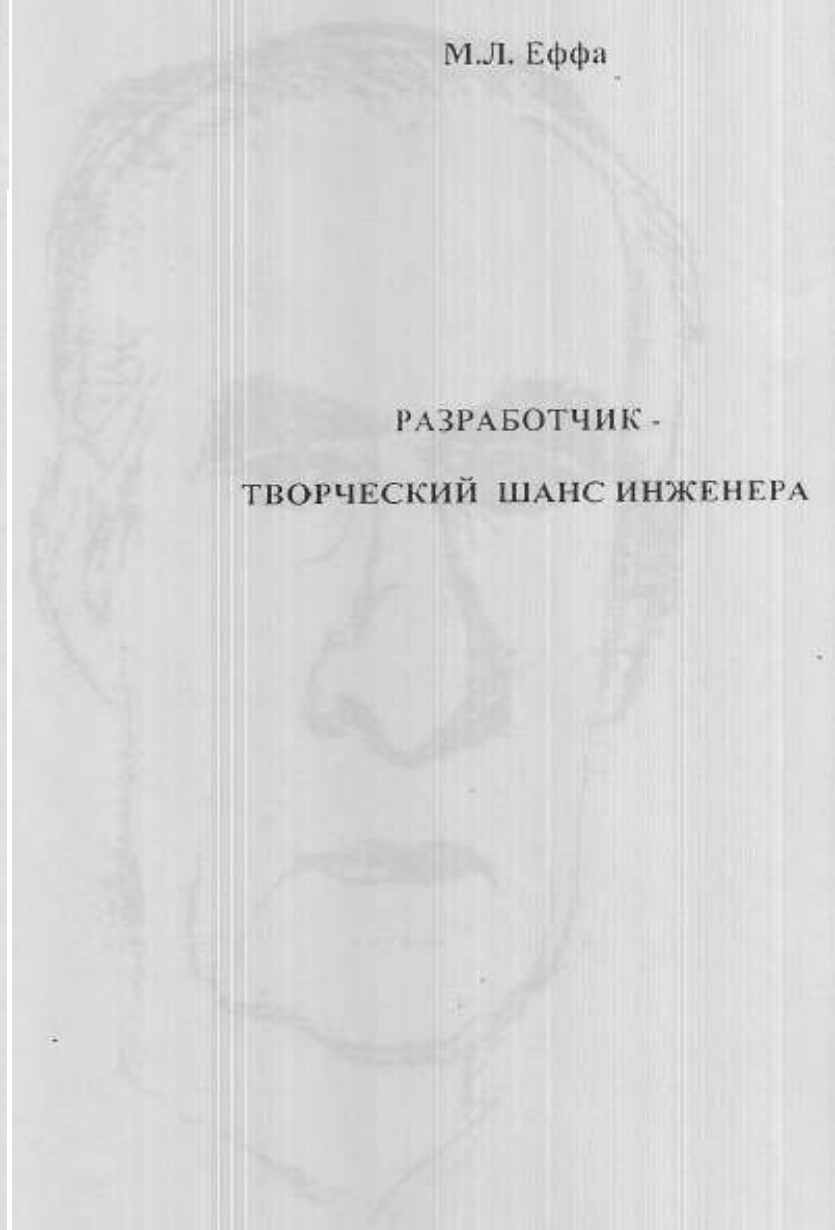


17. 11. 25 - 22. 8. 94

Перед тем как продолжить свою мысль, автор не может удержаться от соблазна рассказать читателю об интересном эпизоде из мировой практики, иллюстрирующий универсальный характер методов работы разработчиков "у нас и у них", в частности по первому описанному выше варианту "средственника". Речь идет о встрече в Институте механики МГУ с проф. Чарльзом С. Дрейпером, основателем и многолетним руководителем Приборной Лаборатории МИТ, возглавлявшем разработку приборов для баллистических ракет, которыми были вооружены атомные подводные лодки "Полярис". Профессор Дрейпер, занимавший тогда почетный пост президента Международного Союза Астронавтики, был приглашен в Москву академиком А.Ю.Ишлинским, который и организовал упомянутую выше встречу с учеными и специалистами промышленности. Тема встречи - проект полета Человека к Луне с высадкой на ее поверхности и возвращением на Землю - проект "Аполлон". Профессор был назначен руководителем разработки системы управления полетом (мы бы сказали - Главным конструктором). Присутствовавший на встрече автор воспроизводит диалог, представляющий непосредственный интерес для нашей темы:

- Проф. Дрейпер: "Меня пригласил президент Кеннеди и спросил, можно ли создать приборы для полета Человека на Луну и его возвращения на Землю?"
- Ответ: "Да, сэр".
- Вопрос: "А может ли Ваша Лаборатория взяться за создание таких приборов?"
- Ответ: "Да, сэр".
- В.: "А когда могли бы быть изготовлены эти приборы?"
- О.: "Прежде, чем они Вам понадобятся, сэр".
- В.: "А как мне узнать, говорите ли Вы мне правду?"
- О.: "Я готов полететь сам испытывать свои приборы".

"И так я получил эту работу" - заключил свой впечатляющий рассказ Ч. Дрейпер. Диалог состоялся летом 1969 г. году, президент Кеннеди поставил задачу осуществить полет к Луне до 1970г., первый полет состоялся в июле 1969 году.



РАЗРАБОТЧИК -

ТВОРЧЕСКИЙ ШАНС ИНЖЕНЕРА

# A very active domain of research



Separated oscillatory fields method  
N.F. Ramsey  
**Ion trap technique**  
H.G. Dehmelt, W. Paul  
Nobel Prize 1987

1987

→ Five Nobel prizes over 25 years



**Laser Cooling and Trapping**  
S. Chu, C. Cohen-Tannoudji, W. Phillips  
Nobel Prize 1997

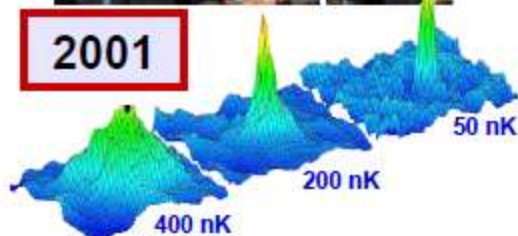
1997



**Bose-Einstein Condensation**  
E. Cornell, C. Wieman, W. Ketterle  
Nobel Prize 2001



2001



2005



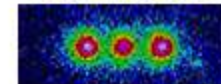
**Laser-based Precision Spectroscopy and Frequency Comb Technique**  
J. Hall and T. Hänsch  
Nobel Prize 2005



2012



**Measuring and manipulation of individual quantum systems**  
**Ion clocks**  
S. Haroche, D. Wineland  
Nobel Prize 2012



18<sup>30</sup> – 19<sup>00</sup>

Д.В.Бражников<sup>4,13</sup>, О.Н.Прудников<sup>4</sup>, А.Е.Афанасьев<sup>6</sup>, С.Н.Багаев<sup>4,13</sup>,  
В.И.Балыкин<sup>6</sup>, М.Ю.Басалаев<sup>4</sup>, А.Н.Гончаров<sup>4,12,13</sup>, В.Н.Задков<sup>6</sup>,  
В.Г.Пальчиков<sup>2</sup>, И.И.Рябцев<sup>4,13</sup>, А.В.Тайченачев<sup>4,13</sup>, В.И.Юдин<sup>4,12,13</sup>,  
Исследование возможностей создания нового поколения высокоточных  
компактных гироскопов на базе современных технологий лазерного  
охлаждения атомов и атомной интерферометрии



## **Программа Всероссийской конференции**

### **Физика ультрахолодных атомов**

**19-21 декабря 2016 года**

конференц-зал Института автоматизации и электрометрии СО РАН (3-й этаж),  
Академгородок, Проспект Академика Коптюга, 1, 630090 Новосибирск  
**Организаторы: ИАиЭ СО РАН, ИЛФ СО РАН, ИФП СО РАН, НГУ**

**THANK YOU!**



no slides  
available