

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт автоматики и электрометрии  
Сибирского отделения Российской академии наук  
ИАиЭ СО РАН

На правах рукописи

Томилин Владимир Александрович

**ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ ФАЗЫ  
В СИСТЕМАХ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ  
И КОНДЕНСИРОВАННЫХ АТОМОВ**

01.04.05 "Оптика"

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., проф.

в.н.с. ИАиЭ СО РАН

Ильичёв Леонид Вениаминович

Новосибирск–2018

## Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
История классической теории управления . . . . .	4
Теория управления в квантовых системах. Актуальность темы работы .	7
Обратная связь, основанная на измерениях . . . . .	8
Когерентная обратная связь . . . . .	10
Приложения и актуальность . . . . .	11
Цели и задачи работы . . . . .	16
Научная новизна . . . . .	17
Практическая значимость . . . . .	17
Положения, выдвигаемые на защиту . . . . .	18
Апробация работы и публикации . . . . .	19
Структура и объем диссертационной работы . . . . .	19
<b>1 Спектроскопия двухуровневых атомов с использованием обратной связи</b>	<b>20</b>
1.1 Динамика открытых квантовых систем . . . . .	20
1.2 Спектр резонансной флуоресценции одиночного атома в присутствии обратной связи . . . . .	27
1.3 Статистика резонансной флуоресценции одиночного атома в присутствии обратной связи . . . . .	34
1.4 Резонансная флуоресценция пары атомов в цепи обратной связи .	43
1.5 Спектроскопия $\Lambda$ -системы с использованием обратной связи . . . .	49
<b>2 Интерферометрическая обратная связь в атомарном бозе-конденсате в двухъямном потенциале</b>	<b>61</b>

<b>3</b>	<b>Спектроскопия атомных ансамблей в поле типа ‘кошки Шредингера’</b>	<b>72</b>
3.1	Квантованная мода в цепи обратной связи с переключением фазы .	72
3.2	Резонансная флуоресценция одиночного атома в поле ‘кошки Шредингера’ . . . . .	82
3.3	Статистика фотоиспусканий атомного ансамбля в поле ‘кошки Шредингера’ . . . . .	89
	<b>Заключение</b>	<b>95</b>
	<b>Список цитируемой литературы</b>	<b>98</b>
	<b>Публикации автора по теме диссертации</b>	<b>108</b>

# Введение

## История классической теории управления

Теория управления исследует возможности и методы управления эволюцией динамических систем. Она находит обширные применения как в фундаментальных, так и в инженерных науках. Наиболее эффективными методами управления являются методы, основанные на использовании обратной связи. Идея управления природными явлениями и системами при помощи инженерных устройств, использующих принцип обратной связи, известна человечеству с древнейших времен. Примером могут служить остроумные методы, использовавшиеся древними цивилизациями для контроля за орошением полей. За 2000 лет до н.э., в Месопотамии, реки Тигр и Евфрат были основными источниками воды. Для ее эффективного распределения была построена сложная система разделительных дамб и шлюзов (см. Рис. 1). В этой системе Евфрат служил источником, а Тигр - стоком, благодаря тому, что уровень русла Евфрата находился выше. Во время паводков вода из Евфрата через систему дамб и каналов доставлялась к требующим орошения полям. Система регуляторов, открывающихся под напором воды, автоматически поддерживала необходимый уровень воды в ирригационных каналах. Подобным образом древние египтяне использовали воды Нила, что позволило древнеегипетской цивилизации процветать.

Первое документированное устройство, использующее обратную связь - водяные часы Ктесибия (середина III века до н.э.). Старейшее описание этого устройства приведено в "Архитектуре" Витрувия [1]. Схема его реконструкции представлена на Рис. 2. Вода течет сквозь отверстие А, расположенное вблизи дна сосуда Е, в измерительный сосуд В, и уровень воды в нем медленно поднимается. Вместе с ней поднимается и поплавок С, который приводит в действие стрелку D, отмечающую прошедший период времени на шкале. Однако, для то-

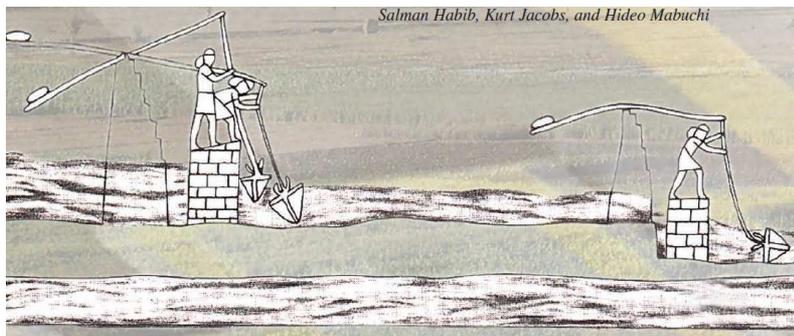


Рис. 1: Шумерская система шлюзов (взято из [2]).

го, чтобы устройство действительно могло выполнять роль часов, необходимо, чтобы скорость истечения воды была постоянной, т.е. постоянным должен быть уровень воды в сосуде E. Для этого используется конический поплавок F, который перекрывает отверстие G (а с ним и приток воды в систему через отверстие H), когда вода в сосуде E поднимается выше определенного уровня. Когда же уровень воды опускается, отверстие G открывается, что позволяет скорректировать уровень воды в сосуде.

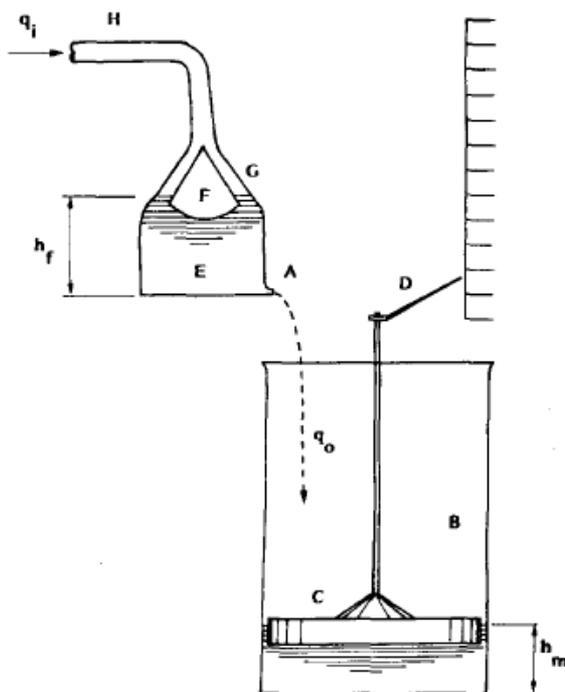


Рис. 2: Схема водяных часов Ктесибия (реконструкция) [3].

В эпоху индустриализации наиболее показательным примером механизма, использующего принцип обратной связи, является центробежный регулятор (начало 1780-х), который стабилизирует скорость вращения парового двигателя под

флуктуирующей нагрузкой. Он являлся ключевым устройством в паровом двигателе. Математический анализ этого управляющего механизма был выполнен Максвеллом, который использовал для этого аппарат дифференциальных уравнений [4]. Его работа ознаменовала собой рождение новой области математики, а позднее и физики, известной как *теория управления*. Чуть позже, в 1877-м году, независимо от Максвелла свои результаты на сходную тему опубликовал российский математик И. А. Вышнеградский [5].

Однако, динамика любой реальной системы не является полностью детерминированной и, следовательно, не может быть до конца описана в рамках стандартной теории дифференциальных уравнений. Как будет показано позднее, это обстоятельство становится особенно важным при рассмотрении динамики квантовых систем. Важным шагом в направлении описания реальных процессов, имеющих вероятностную природу, стала разработка математического аппарата стохастического анализа А.М. Колмогоровым в середине XX века [6]. Данная теория позволила изучать недетерминированные системы принципиально вероятностной природы и описывать их необратимую, в отличие от динамических систем, эволюцию. В 1947-м Винер в своей знаменитой книге [7] использовал эти методы для анализа систем обработки информации, создав новую область науки - *кибернетику*, от греческого “*κυβερνητική*”, что означает “искусство управления”.

История становления теории управления как самостоятельной области знания была бы неполной без упоминания теории оптимального управления. С момента своего создания теория управления наиболее часто сталкивалась с задачами, направленными на достижение вполне определенных конечных целей - к примеру, приведению системы в заданное конечное состояние. Эти цели, как правило, могут быть достигнуты различными путями с применением различных стратегий управления. В связи с этим уже на раннем этапе своего развития теория управления неизбежно столкнулась с необходимостью сравнения различных алгоритмов между собой. В связи с этим возникло понятие *оптимальности*. Впервые эти вопросы обсуждал еще Иоганн Бернулли в конце XVII века в связи с известной задачей о брахистохроне, т.е. плоской кривой, соединяющей две точки пространства, движение тела по которой в поле тяжести занимает наименьшее время [8]. Братья Бернулли совместно Ньютоном решили эту задачу и

поняли, что оптимальность есть фундаментальное свойство движения систем, встречающихся в природе. Сформулированные ими принципы, как и известный в оптике принцип наименьшего оптического пути, открытый Ферма, по природе своей являлись *принципами минимума*. В приложении к теории управления, данные принципы дали толчок к поиску среди различных стратегий управления оптимальных. Так возникло понятие *оптимального управления*. В 1958 году Л. С. Понтрягин сформулировал *принцип максимума* [9], который дает ответ на вопрос об оптимальной стратегии управления, используя вариационное исчисление.

В 1960-м году Р. Калман опубликовал три работы [10, 11, 12], объединяющие теорию устойчивости Ляпунова [13] с развитыми к тому времени понятиями оптимального управления. Основным результатом этих работ стал т.н. *фильтр Калмана* - метод, позволяющий находить алгоритм, удовлетворяющий некоторым заранее заданным ограничениям и обеспечивающий в их рамках оптимальное управление. Ключевым ограничением этого метода было требование линейности измеряемых величин как функций динамических переменных. Решение для более общего случая было позднее получено Р. Л. Стратоновичем [14].

Работы Колмогорова, Калмана и Винера ознаменовали создание строгой математической теории управления в динамических линейных и нелинейных системах, названную позже *классической теорией управления*.

## **Теория управления в квантовых системах. Актуальность темы работы**

Прежде чем рассматривать обратную связь непосредственно в квантовых системах, стоит кратко перечислить необходимые элементы для организации классической обратной связи (Рис. 3). Помимо самой системы, данный алгоритм требует наличия устройства, извлекающего информацию из системы путем измерения определенных ее параметров. Второй необходимой составляющей является контроллер, который на основании данных, полученных на шаге измерения, непосредственно осуществляет управление системой путем изменения ее параметров в соответствии с выбранной стратегией управления. Отсюда ясно, что для системы, проявляющей существенно квантовые свойства, прямое воспроизведе-

ние классического алгоритма обратной связи невозможно, поскольку проведение измерения над квантовой системой неконтролируемым образом изменяет ее состояние. Соответственно, для создания полноценной квантовой теории управления требовалось построить математический аппарат, позволявший бы учитывать эффект изменения состояния системы при ее непрерывном измерении, а также сформулировать понятия, являвшиеся основными в классической теории управления - устойчивость и оптимальность. Типы обратной связи, в явном виде содержащие в себе шаг извлечения классической информации из квантовой системы путем измерения ее наблюдаемых, объединены под названием *обратной связи, основанной на измерениях* (англ. measurement-based feedback). Принципиальная схема обратной связи, основанной на измерениях, представлена на Рис. 4(А).

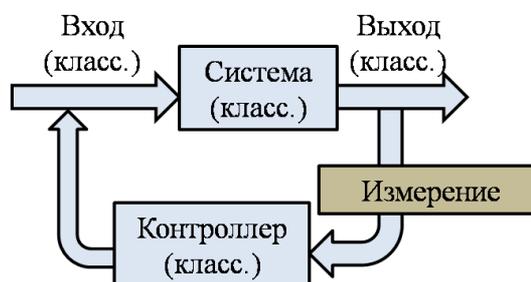


Рис. 3: Принципиальная схема управления на основе обратной связи.

## Обратная связь, основанная на измерениях

Первые работы по исследованию цепей обратной связи в квантовых системах относятся к началу 1980-х [16, 17, 18] (см. также ссылки в [19, 20, 21, 22, 23]), однако систематическое изучение началось лишь в 1990-х. Математический аппарат теории обратной связи в квантовых системах был развит в работах Белавкина [24, 25], который получил квантовый аналог уравнения Стратоновича - классического уравнения, описывающего непрерывное измерение системы. Работы Белавкина были сильно математизированы и потому не получили большой известности в физическом сообществе. Квантовая версия уравнения Стратоновича, названная позднее стохастическим основным уравнением, была независимо получена Вайсманом и Милбурном [26, 27], которые, в свою очередь, отталкивались от работ Кармайкла [28, 29]. В [30] было показано, что непрерыв-

ная обратная связь, задающаяся достаточно простой функцией результатов измерений (т.н. *обратная связь марковского типа*), может быть описана основным кинетическим уравнением типа Линдблада. Этот тип управляющих уравнений повсеместно возникает в теории открытых квантово-механических систем (и, в частности, квантовой оптике) при введении некоторых достаточно общих предположений относительно окружения этих систем. Поскольку эти уравнения уже были хорошо изучены, результат работы [30] был значительным шагом вперед в развитии квантовой теории управления. Другими авторами также были получены отдельные виды стохастических уравнений для измеряемых систем специального вида [31, 32, 33]. Особенно стоит отметить работу [33]. В ней автор ввел понятие т.н. гибридных квантово-классических систем, состояние которых описывается, наряду с квантовыми степенями свободы, еще и некоторыми классическими параметрами, характеризующими классические измерительные приборы. Непосредственная связь квантовой теории управления с известными из анализа классических систем результатами была показана в работах [34, 35]. В них был разработан принцип организации обратной связи на основе оценок, получаемых из стохастического основного уравнения. Ключевым результатом этих работ стало доказательство возможности переноса классической теории оптимального управления в квантовую область без существенных изменений, если исследуемая квантовая система является линейной.

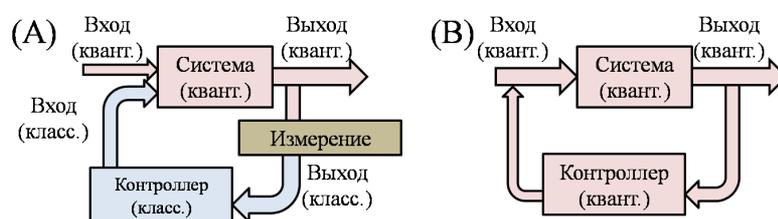


Рис. 4: Принципы организации обратной связи, основанной на измерениях (А) и когерентной обратной связи (В). В случае (А) квантовое состояние на выходе системы измеряется, и полученная классическая информация используется для изменения параметров исходной системы. В случае (В) состояние системы изменяется за счет взаимодействия с контроллером - другой квантовой системой [15].

## Когерентная обратная связь

Наличие в схеме обратной связи стадии извлечения из квантовой системы классической информации путем проведения измерений является, как было показано выше, дополнительным препятствием на пути практической реализации протоколов управления, как по причине неполноты получаемой информации, так и потому, что состояние системы изменяется при измерении. Идея организации управления квантовой системой без проведения над ней измерений была предложена в [36] для частного случая пары оптических резонаторов, взаимодействие полей в которых осуществляется при помощи нелинейного кристалла, однако более общее теоретическое рассмотрение было дано в [37, 38]. Этот новый подход предполагает организацию гамильтонова взаимодействия между двумя квантовыми системами для реализации управления. При подходящем выборе этого взаимодействия состояния управляемой системы и контроллера оказываются скоррелированы, что и позволяет последнему осуществлять управление. Поскольку при этом классическая информация из системы не извлекается, то при таком процессе не возникает проблемы ‘порчи’ состояния при измерении, т.е. снижается уровень шума (т.н. back-action noise). Кроме того, увеличивается быстродействие, поскольку время действия такой ‘обратной связи’ определяется характерным временем эволюции самих квантовых систем, а не классических электронных устройств, как в случае обратной связи, основанной на измерениях. Такой принцип организации управления эквивалентен унитарному действию обратной связи, зависящей от проведенного ранее измерения [39, 40]. Помимо указанного метода, использующего взаимодействие между системами напрямую, управление может также осуществляться опосредовано, при помощи однонаправленных электромагнитных полей. Примером может служить пара простых оптических резонаторов Фабри-Перо, расположенных так, что выходное излучение первого подается на вход второго, выходное же излучение второго подается обратно на вход первого. Управление первым резонатором при помощи второго (в нем могут быть расположены различные нелинейные оптические элементы, модифицирующие свойства излучения) может быть достигнуто, если излучение будет распространяться лишь в одном направлении - от первого резонатора во второй. Для описания такого специфического взаимодействия был

введен термин ‘каскадная связь’ (cascade connection) [41]. В эксперименте однонаправленность достигается использованием ячеек Фарадея и поляризационных делителей пучка. Оба описанных типа обратной связи - на основе ‘каскадных связей’ и на основе прямого взаимодействия - объединены под названием *когерентной обратной связи* (англ. coherent feedback). Ее принципиальное отличие от основанной на измерениях показано на Рис. 4(В). При когерентной обратной связи измерения над системой не производится, а значит, ее состояние не модифицируется. Кроме того, с физической точки зрения когерентная обратная связь проще в реализации, т.к. необходимо лишь создать возможность взаимодействия между двумя системами.

В начале 2000-х идея ‘каскадных связей’ получила дальнейшее развитие - в виде изучения т.н. ‘сетей обратной связи’, состоящих из линейных квантовых систем, соединенных однонаправленными полями [42]. На основе формализма ‘input-output’ [43, 44] (в нем анализ системы производится в терминах уравнений Ланжевена, описывающих временную эволюцию системных операторов - данные уравнения имеют существенно более простой вид, чем реальные сопряженные кинетические уравнения, описывающие эволюцию операторов открытой системы в представлении Гейзенберга) был построен лаконичный и удобный формализм описания таких сетей произвольной сложности [45]. Построенная теория немедленно была применена для решения различных задач в теории управления [46, 47, 48, 49]. В 2009-м было показано, что линейные сети когерентной обратной связи превосходят обратную связь, основанную на измерениях, поскольку возможности последней ограничены необходимостью представления результатов измерений в виде набора классических переменных [50]. Также, когерентная обратная связь позволила достичь лучших результатов в атомном охлаждении, чем обратная связь с измерениями [51]. Тем не менее, вопрос о превосходстве того или иного типа обратной связи над другим на данный момент остается открытым [39, 40].

## **Приложения и актуальность**

Приложения квантовой обратной связи, как и ее классического аналога, весьма обширны. Экспериментальная реализация цепей обратной связи впервые была

осуществлена в квантовой оптике, поскольку именно в этой области впервые стало возможным измерение отдельных микроскопических степеней свободы. Одной из первых работ, посвященных теме обратной связи в квантовых системах, была работа [17]. В ней была рассмотрена система фотодетектирования, состоящая системы излучателей во внешнем поле. Сигнал с фотодетектора подавался на источник этого поля, таким образом модифицируя свойства статистики фотоиспусканий (Рис. 5). Был предложен способ получения субпуассоновской статистики при помощи такого рода обратной связи, а также исследована общая зависимость статистики фотоотчетов от свойств входного ('input' на Рис. 5) излучения.

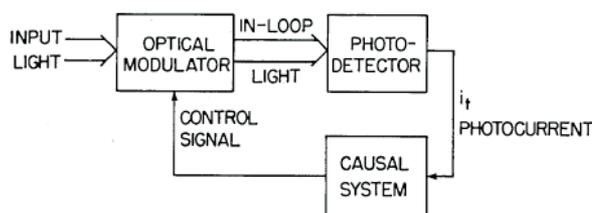


Рис. 5: Принципиальная схема фотодетектирования с замкнутым контуром [17].

В это же время когерентная обратная связь, основанная на механическом воздействии света на колебательные системы, получила применение в задачах оптомеханики. Первые работы были посвящены охлаждению оптомеханических систем [18, 52], однако охлаждение было недостаточным для достижения истинно квантового режима осцилляций, поэтому такая обратная связь все же не может считаться чисто квантовой. С развитием техники атомного охлаждения стала возможной реализация действительно квантовых протоколов обратной связи, основанной на измерениях, для управления атомами и ионами в магнито-оптических ловушках. В [53] построена теоретическая модель охлаждения иона в ловушке, помещенного перед зеркалом. Анализируя отраженный от него свет, можно найти положение иона, а затем воздействовать на него подходящим образом для охлаждения. В [54] экспериментально показано, что использование обратной связи, осуществляемой электрооптическими методами по схеме гомодинного детектирования, увеличивает степень охлаждения на 30 процентов по сравнению с обычным доплеровским охлаждением. В [55] положение нейтрального атома в ловушке оценивалось путем анализа рассеяния одиночных фотонов, а обратная связь осуществлялась при помощи коротких импульсов, корректирую-

щих движение атома в направлении, перпендикулярном оси ловушки. При этом охлаждение достигалось за время порядка четверти периода осцилляций атома внутри ловушки. Сравнение различных протоколов обратной связи между собой и с детерминированными стратегиями для управления движением одиночного атома в оптическом резонаторе было проведено в [56], при этом было показано, что при использовании обратной связи время жизни атома в ловушке может быть увеличено на 30 процентов даже при сравнительно низкой квантовой эффективности детекторов, осуществляющих регистрацию фотонов, зондирующих ловушку. Также, в [57] была доказана возможность управления движением атомов в оптической решетке путем неразрушающего измерения пространственного положения волнового пакета атомов с последующим сдвигом потенциала решетки, что приводит либо к подавлению, либо к усилению атомных осцилляций.

Другой обширной областью, в которой эффективно применяется квантовая обратная связь, является инженерия состояний квантовых систем. Для этого обычно применяется обратная связь, основанная на измерениях. Примером могут служить работы [58, 59, 60, 61], в которых исследовался процесс приготовления суперпозиций макроскопически различимых состояний излучения (т.н. ‘кошек Шредингера’). Как показано в [62], управление квантовой системой с помощью цепи обратной связи позволяет ‘стабилизировать’ возможные исходы квантового измерения на единственном значении. Когерентная связь также может эффективно применяться для приготовления экзотических состояний, таких как сжатые состояния [63, 64]. Смежной областью, являющейся весьма востребованной в контексте развития технологий квантовых вычислений, являются задачи коррекции квантовых состояний. В квантовой информатике часто приходится решать задачи, связанные с передачей квантового состояния по шумному либо незащищенному каналу, так что состояние на стороне приемника отличается от изначально посланного. В этой связи получают актуальность вопросы восстановления квантового состояния при частичном либо полном знании о природе помех, вносимых каналом связи. Решение таких задач, как правило, проводится также с применением обратной связи, основанной на измерениях. Например, в работах [65, 66] на основе оценок, полученных в ходе проведения неразрушающих измерений над одиночным кубитом, продемонстрирована высокая точность

восстановления состояния, подвергнувшегося операции диффузии фазы.

Отдельного упоминания заслуживают способы предотвращения разрушения квантовых состояний вследствие декогеренции [67, 68, 69]. В [70] был предложен протокол обратной связи, основанной на т.н. квантовых скачках (подробнее см. в [71, 72]), позволяющий генерировать зацепленные состояния в системе двух двухуровневых атомов во внешнем поле. Достоинствами предложенного метода является устойчивость к возможным ошибкам фотодетектирования (фактически, от уровня ошибок зависит лишь время достижения зацепленного состояния). Спонтанное испускание несколько уменьшает степень зацепленности конечного состояния.

Квантово-оптические системы, как правило, содержат в себе элементарные излучатели - атомы или молекулы. Наиболее естественными наблюдаемыми для них являются характеристики испускаемого ими спонтанного излучения. Таким образом, надлежащее описание систем квантовой оптики должно строиться на основе теории открытых квантовых систем. Введение обратной связи лишь усугубляет эту необходимость, так как в этом случае окружение должно включать в себя также и устройства, обеспечивающие реализацию обратной связи. Чтобы обратная связь была эффективной, необходимо обеспечить ее достаточное быстродействие. В классических системах задержки в цепи обратной связи могут приводить к неустойчивой динамике. Применительно к открытым системам, условие быстроты обратной связи (по отношению к собственной динамике системы) позволяет анализировать задачу в рамках марковских основных уравнений типа Линдблада. В данной работе будет рассмотрен особый тип обратной связи, инициируемой зарегистрированными спонтанными фотодетектированиями, т.е. действующий импульсно, скачкообразно. При этом действие цепи обратной связи может быть селективным, т.е. различаться в зависимости от типа зарегистрированного события. Отсюда следует, что устройство, задающее алгоритм обратной связи, может быть эффективно описано при помощи некоторого дискретного классического параметра. Таким образом, мы естественным путем приходим к понятию т.н. *гибридных систем*, т.е. систем, состоящих из квантовой и классической частей. Для их описания существует весьма удобный формализм, введенный в [33] и опирающийся на понятие гибридной плотности. Именно этот подход и является основным в данной работе. Если классическая система опи-

сывается одномерной переменной  $x$ , характеризующейся плотностью вероятности  $\rho(x)$ , а квантовая система находится в состоянии  $\hat{\rho}_x$ , то вводится гибридная плотность вероятности

$$\hat{\rho}(x) = \rho(x)\hat{\rho}_x,$$

которая должна быть положительно определенной

$$\hat{\rho}(x) > 0, \forall x$$

и нормированной

$$Tr \sum_x \hat{\rho}(x) = 1. \quad (*)$$

Введение классической составляющей расширяет исходную квантовую систему. Значит, возможно существование квантовых наблюдаемых, которые зависят также и от значения классической переменной. Среднее от такой новой ‘гибридной’ наблюдаемой  $\hat{O}(x)$  по состоянию  $\hat{\rho}(x)$  записывается как

$$\langle \hat{O}(.) \rangle_{\hat{\rho}(.)} = Tr \sum_x \hat{O}(x)\hat{\rho}(x).$$

Стоит прокомментировать смысл выражения (\*). Входящий в него оператор  $\sum_x \hat{\rho}(x)$  является усредненным (по классической переменной) статистическим оператором квантовой системы. В ставшем уже традиционным подходе Вайсмана-Милбурна [19] к описанию квантовой обратной связи исследуется эволюция именно этого оператора. Т.о., аппарат гибридной плотности представляет собой альтернативный – и в определенном смысле более общий, т.к. учитывает эволюцию самой системы обратной связи – взгляд на исследуемый процесс.

Уравнения, описывающие эволюцию открытых квантовых систем, уже сами по себе достаточно сложны. Поскольку подход с использованием аппарата гибридных систем более универсален, то он приводит к еще более сложным уравнениям на операторы гибридной плотности. Задачей данной работы является нахождение способов решения таких обобщенных уравнений.

В классической теории управления известны примеры, когда искусственная модификация системы приводит к неожиданному поведению, которое сложно

было предвидеть заранее. Квантовые системы обладают существенно более богатой физикой, поэтому предсказать, к чему приведет введение в них того или иного типа обратной связи, еще труднее. В этой связи возникает мотивация исследования модифицированных рукотворной обратной связью квантовых систем с целью поиска новых явлений и эффектов. Это направление исследований по сути является обратным для традиционных задач теории управления, связанных с конструированием протокола управления для достижения конкретных, заранее заданных целей. К сожалению, вышеуказанная сложность эволюции квантовых систем в целом, к тому же усиленная введением искусственной обратной связи, затрудняет получение физически прозрачных картин возникающих явлений. Фактически, анализ систем с квантовой обратной связью сводится к решению весьма сложных с математической точки зрения уравнений и систем уравнений. Зачастую их решение дает лишь количественную характеристику явлений. Дать же им понятную физическую интерпретацию не всегда представляется возможным. Этим отчасти объясняется малое количество подобных качественных соображений в тексте работы. Однако, и здесь используемый подход имеет преимущества, поскольку позволяет дальше продвинуться по пути аналитического решения, в то время как подход Вайсмана-Милбурна предполагает достаточно ранний переход к численным методам решения, основанных на интерпретации квантового кинетического уравнения в терминах квантовых траекторий и его решения при помощи квантового метода Монте-Карло.

## **Цели и задачи работы**

Целью настоящей диссертационной работы является теоретическое исследование эффектов обратной связи, основанной на скачкообразных переключениях параметров управляемой системы (в частности, фаз классических электромагнитных полей), возникающих в системах одиночных излучателей, атомных ансамблях и квантованных электромагнитных полях.

## **Научная новизна**

В работе впервые использована теория гибридных квантово-классических систем для описания методов управления на основе обратной связи. Рассмотрены ее применения к разнообразным квантово-оптическим системам - от одиночных двухуровневых атомов до конденсатов Бозе-Эйнштейна и квантованных мод электромагнитного излучения. Показано, что обратная связь импульсного типа в таких системах приводит к необычным, ранее не наблюдавшимся модификациям их спектральных и статистических свойств. В большинстве случаев использованный подход позволил далеко продвинуться по пути получения точных решений. В частности, получены точные аналитические выражения для спектра резонансной флуоресценции и корреляционных функций фотоиспусканий двухуровневого атома и пары таких атомов в резонансном поле для случаев спектрально-неселективной обратной связи и в присутствии 'мягкой' спектральной селекции. При рассмотрении спектроскопии  $\Lambda$ -подобной системы с использованием обратной связи показано возникновение различных типов 'темных' состояний и аналитически показана их роль в изменении формы резонанса когерентного пленения населенностей. В задаче об управлении двухъямным конденсатом Бозе-Эйнштейна найдены стационарные заселенности ям и продемонстрирована возможность управлять ими, варьируя параметры цепи обратной связи. Найдено стационарное состояние и спектр резонансной флуоресценции системы из двухуровневого атома, взаимодействующего с квантованной оптической модой, находящейся в специального вида суперпозиции глауберовских состояний большой амплитуды, когерентность которого непрерывно восстанавливается внешним источником, в приближении быстроты действия последнего. Также исследовано влияние взаимодействия поля в таком состоянии с ансамблем двухуровневых атомов на его статистические характеристики.

## **Практическая значимость**

В диссертационной работе исследованы возможности использования обратной связи на основе переключений фазы для получения различных нетривиальных состояний исследуемых систем и модификаций известных квантово-оптических

явлений. Развита подход к описанию систем с импульсной обратной связью, основанный на аппарате гибридных кинетических уравнений, и продемонстрирована его эффективность. В частности, показана возможность получения устойчивых к варьированию амплитуды внешнего поля пиков триплета резонансной флуоресценции, которые могут быть использованы в качестве реперов частоты. Кроме того, узкие структуры, возникающие в зависимости работ полей от частот Раби в  $\Lambda$ -подобной системе имеют потенциал использования для разработки новых методов стабилизации частот.

## **Положения, выдвигаемые на защиту**

По результатам выполненной работы на защиту выдвигаются следующие положения:

1. Спектр резонансной флуоресценции двухуровневого атома, находящегося во внешнем классическом поле, чья фаза переключается на  $\pi$  при каждой регистрации спонтанного атомного фотоиспускания, состоит из трех асимметричных пиков, устойчивых к изменению интенсивности внешнего поля.

2. Обратная связь на основе переключений фазы одного из внешних полей способна управлять шириной и формой резонанса когерентного пленения населенностей (КПН) в  $\Lambda$ -схеме спектроскопии пробного поля. Варьирование ширины может производиться при помощи модификации распутывания квантовой операции фотодетектирования.

3. При помощи обратной связи возможно эффективно управлять состоянием атомарного конденсата Бозе-Эйнштейна, локализованного в двухъямном оптическом потенциале и подвергаемого интерферометрическому зондированию.

4. Взаимодействие ансамбля двухуровневых атомов с внешним полем, находящемся в специального типа суперпозиции когерентных состояний Глаубера (состоянии Юрке-Столера) в присутствии механизма непрерывного восстановления его когерентности, приводит к возникновению между атомами и полем когерентной обратной связи, инициируемой вынужденными фотопоглощениями. Возникающие корреляции между атомом и полем приводят к подавлению боковых пиков спектра резонансной флуоресценции и диссипативному характеру поведения корреляционных функций спонтанных атомных фотоиспусканий.

## **Апробация работы и публикации**

Результаты работы были представлены на следующих конференциях: XLIX Международная студенческая конференция “Студент и научно-технический прогресс” (Новосибирск, 16-20 апреля 2011); Международная конференция по когерентной и нелинейной фотонике “ICONO/LAT 2013” (Москва, 18-22 июня 2013); Всероссийская конференция “Физика ультрахолодных атомов - 2015” (Новосибирск, 21-22 декабря 2015); Всероссийская конференция “Физика ультрахолодных атомов - 2016” (Новосибирск, 19-21 декабря 2016); VII Международный симпозиум “MPLP-2016” (Новосибирск, 22-28 августа 2016); XV международная конференция по квантовой оптике и квантовой информатике “ICQOQI’2017” (Минск, 20-23 ноября 2017); Всероссийская конференция “Физика ультрахолодных атомов - 2017” (Новосибирск, 18-20 декабря 2017).

Всего по теме диссертации соискателем опубликовано 14 печатных работ, в том числе 10 статей, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, определенных Высшей аттестационной комиссией.

## **Структура и объем диссертационной работы**

Работа состоит из Введения, трех Глав, Заключения и Списка цитируемой литературы из 124 наименований. Общий объем диссертации составляет 110 страниц, в том числе 29 рисунков. Глава 1 посвящена исследованию взаимодействию одного и двух двухуровневых атомов с классическим внешним полем в присутствии обратной связи. Рассмотрены задачи о спектре и статистике фотоиспусканий таких систем. Также в ней рассмотрена задача о спектроскопии  $\Lambda$ -атома и исследована возможность управления явлением когерентного пленения населенностей. В Главе 2 в качестве системы, подверженной действию обратной связи, выступает атомарный конденсат Бозе-Эйнштейна, локализованный в двухъямном оптическом потенциале, как пример многоатомной системы. Случай естественного возникновения обратной связи на основе переключений фазы рассмотрен в Главе 3. В ней рассмотрена задача о взаимодействии атомных ансамблей с внешним полем, находящимся в суперпозиции когерентных состояний Глаубера особого вида. Результаты работы просуммированы в Заключении.

## Глава 1

# Спектроскопия двухуровневых атомов с использованием обратной связи

### 1.1 Динамика открытых квантовых систем

Прежде чем переходить к рассмотрению взаимодействия атома с полем в присутствии обратной связи, стоит кратко воспроизвести известные классические результаты. Рассмотрение реальной системы атомных уровней должно учитывать их конечное время жизни, т.е. опираться на общую теорию эволюции открытых квантовых систем. Будем рассматривать квантовую систему  $S$ , взаимодействующую с другой системой  $B$ , которую мы будем называть *окружением*. Предположим также, что объединенная система  $B + S$  является замкнутой, что означает, что ее эволюция унитарна и задается уравнением фон Неймана:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]. \quad (1.1)$$

Здесь  $\hat{H}(t) = \hat{H}_S + \hat{H}_B + \hat{H}_I$  ( $\hat{H}_S$  и  $\hat{H}_B$  - собственные гамильтонианы системы и окружения,  $\hat{H}_I$  описывает взаимодействие систем  $S$  и  $B$ ).

В отличие от замкнутой системы, эволюция открытой системы в общем случае не унитарна. Формально, состояние  $\hat{\rho}_S$  может быть получено взятием следа от статистического оператора  $\hat{\rho}$  объединенной системы. Перейдем в представление взаимодействия:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{int}(t) &= e^{i(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t/\hbar} \hat{H}_I e^{-i(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t/\hbar}; \quad \hat{\rho}_{int}(t) = e^{i(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t/\hbar} \hat{\rho}(t) e^{-i(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t/\hbar}, \\ \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{int}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{H}_{int}(t), \hat{\rho}_{int}(t) \right].\end{aligned}\tag{1.2}$$

Поскольку все дальнейшее рассмотрение (если не оговорено особо) будет также проходить в представлении взаимодействия, то для упрощения обозначений будем опускать нижние индексы  $int$  (т.е.  $\hat{\rho}$  обозначает  $\hat{\rho}_{int}$ ,  $\hat{H}$  обозначает  $\hat{H}_{int}$ ). Взаимодействие между системой и окружением будем полагать слабым. Тогда уравнение (1.2) можно формально проинтегрировать:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t ds \left[ \hat{H}(s), \hat{\rho}(s) \right].\tag{1.3}$$

После обратной подстановки в (1.2) и взятия следа по переменным окружения получаем

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t ds Tr_B \left[ \hat{H}(t), \left[ \hat{H}(s), \hat{\rho}(s) \right] \right],\tag{1.4}$$

при условии, что

$$Tr_B \left[ \hat{H}(t), \hat{\rho}(0) \right] = 0,\tag{1.5}$$

что в большинстве практически важных случаев (в частности, в предположении слабого взаимодействия) может быть достигнуто путем подходящего выбора начального состояния окружения. Более строгое рассмотрение подразумевает разбиение гамильтониана в представлении взаимодействия на две части:  $\hat{H}(t) = \hat{H}^{(S)} + \hat{H}^{(SB)}$  (это достигается подходящим разбиением исходного гамильтониана на свободную часть и взаимодействие), из которых  $\hat{H}^{(S)}$  действует только на гильбертовом пространстве состояний системы  $S$  и добавляет соответствующий динамический член в (1.4),  $Tr(\hat{H}^{(SB)} \hat{\rho}(0)) = 0$  и кинетическая часть содержит  $\hat{H}^{(SB)}$  вместо  $\hat{H}$ . Однако, как будет показано ниже, в случае взаимодействия атомных систем с резервуаром бозонных мод в дипольном приближении  $\hat{H}^{(S)} = 0$ , что и обеспечивает выполнение условия (1.5).

Уравнение (1.4) содержит  $\hat{\rho}(t)$  наряду с  $\hat{\rho}_S(t)$ . Чтобы исключить  $\hat{\rho}(t)$ , необходимо ввести *приближение Борна*: будем полагать, что взаимодействие между

системой и окружением слабо меняет состояние последнего. Т.о., состояние полной системы факторизуется

$$\hat{\rho}(t) \approx \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_B. \quad (1.6)$$

Следующее важное приближение, называемое *приближением Маркова*, заключается в том, что система  $S$  эволюционирует медленно по сравнению с окружением:

$$\tau_B \ll \tau_S, \quad (1.7)$$

где  $\tau_{B,S}$  - характерные времена эволюции системы и окружения. С учетом вышесказанного, уравнение (1.4) преобразуется к виду [73]

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty ds Tr_B \left[ \hat{H}(t), \left[ \hat{H}(t-s), \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_B \right] \right]. \quad (1.8)$$

Рассмотрим теперь конкретный случай, когда исследуемая система является двухуровневым атомом с частотой перехода  $\omega_0$  в оптическом диапазоне, с основным состоянием  $|g\rangle$  и возбужденным  $|e\rangle$ . Будем рассматривать его спонтанный распад в вакуум, т.е. окружение, задающееся как состояние поля с нулевым числом фотонов

$$\hat{\rho}_f = |vac\rangle\langle vac|. \quad (1.9)$$

Собственный гамильтониан атома имеет вид

$$\hat{H}_S = \hbar\omega_0\hat{s}_0, \quad (1.10)$$

где  $\hat{s}_0 = (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)/2$ , т.е. нижний уровень энергии имеет энергию  $-\hbar\omega_0/2$ , а верхний  $\hbar\omega_0/2$ . Далее будем описывать взаимодействие атома с внешним полем в дипольном приближении

$$\hat{H}_I = -\hat{D} \cdot \hat{E}, \quad (1.11)$$

где  $\hat{D}$  - оператор дипольного момента атома, а  $\hat{E}$  - оператор электрического поля в представлении Шредингера (полагаем, что атом находится в начале координат):

$$\begin{aligned}
\hat{D} &= d\hat{s}_- + d^*\hat{s}_+, \\
\hat{E} &= i \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger), \\
\hat{s}_- &= |g\rangle\langle e|, \hat{s}_+ = |e\rangle\langle g|.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}}$  - операторы рождения и уничтожения, соответствующие моде с частотой  $\omega_k$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Переходя в представление взаимодействия и избавляясь от быстро осциллирующих слагаемых, получаем

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{int}(t) &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\Omega_k}{2} \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{s}_+ e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} + h.c. = \hbar(\hat{F}(t)\hat{s}_+ + \hat{F}^\dagger(t)\hat{s}_-), \\
\Omega_k &= -\frac{2i}{\hbar} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} d.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Здесь и далее аббревиатура *h.c.* обозначает выражение, являющееся эрмитово сопряженным к находящемуся левее. Подставим полученное выражение в (1.8) (поскольку след берется по полевым переменным, то атомные операторы выносятся наружу):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) &= (-\hat{s}_- \hat{s}_+ \hat{\rho}(t) + \hat{s}_+ \hat{\rho}(t) \hat{s}_-) \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\omega_0\tau} \langle \hat{F}^\dagger(t-\tau) \hat{F}(t) \rangle \\
&+ (-\hat{s}_+ \hat{s}_- \hat{\rho}(t) + \hat{s}_- \hat{\rho}(t) \hat{s}_+) \int_0^{+\infty} d\tau e^{-i\omega_0\tau} \langle \hat{F}(t-\tau) \hat{F}^\dagger(t) \rangle + h.c.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Здесь  $\langle \dots \rangle \equiv Tr_f \dots$  - корреляционная функция поля. Поскольку состояние поля стационарно, то корреляционные функции не зависят от  $t$ :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{F}^\dagger(t-\tau) \hat{F}(t) \rangle &= \langle \hat{F}^\dagger(0) \hat{F}(\tau) \rangle, \\
\langle \hat{F}(t-\tau) \hat{F}^\dagger(t) \rangle &= \langle \hat{F}(0) \hat{F}^\dagger(\tau) \rangle.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

При увеличении  $\tau$  корреляционная функция стремится к нулю, т.к. корреляции существуют лишь конечное время. Время затухания корреляционных функций является характерным временным масштабом эволюции окружения.

Вычисление корреляционных функций сводится к вычислению средних по вакууму от квадратичных комбинаций операторов рождения и уничтожения. Ненулевой вклад дают лишь слагаемые вида

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \rangle = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (1.16)$$

Пользуясь этим соотношением, а также заменяя сумму по волновым векторам на интеграл по континууму, несложно вычислить Фурье-образы корреляционных функций, входящие в (1.14):

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\omega_0\tau} \langle \hat{F}^\dagger(0) \hat{F}(\tau) \rangle &= 0, \\ \int_0^{+\infty} d\tau e^{-i\omega_0\tau} \langle \hat{F}(0) \hat{F}^\dagger(\tau) \rangle &= \frac{\gamma}{2} + i\delta\omega_{vac}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где

$$\gamma = \frac{4\omega_0^3 |d|^2}{3\hbar c^3} \quad (1.18)$$

есть константа релаксации возбужденного уровня атома.  $\delta\omega_{vac}$  характеризует сдвиг основного состояния, обусловленный нулевыми флуктуациями вакуума (Лэмбовский сдвиг). Поскольку эта поправка много меньше разности энергий между атомными уровнями, в дальнейшем мы будем ею пренебрегать. Кинетическое уравнение принимает окончательный вид

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = \gamma(\hat{s}_- \hat{\rho} \hat{s}_+ - \frac{1}{2} \{\hat{s}_+ \hat{s}_-, \hat{\rho}\}). \quad (1.19)$$

В такой форме кинетическое уравнение впервые было получено Линдбладом [74].

Обсудим применимость приближения Маркова-Борна к нашему случаю. Время эволюции атома задается временем жизни возбужденного состояния  $\gamma^{-1}$ , составляющим  $\sim 10^{-6} - 10^{-9}c$ . Время затухания корреляционных функций в данном случае имеет порядок  $< 10^{-15}c$ , т.е. условие (1.7) выполняется. Приближение Борна (1.6) применительно к атому во внешнем поле означает, что испущенный атомом фотон не взаимодействует с атомом. Т. о., приближение

Маркова-Борна является в данном случае естественным и вытекает из постановки задачи.

Если атом вдобавок к полю, задаваемому (1.12), взаимодействует с классическим полем частоты  $\omega_1$ , то в этом случае добавляется слагаемое гамильтоновского типа [44]. Переход обратно в представление Шредингера с восстановлением атомного гамильтониана дает

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho} &= -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + \gamma(\hat{s}_-\hat{\rho}\hat{s}_+ - \frac{1}{2}\{\hat{s}_+\hat{s}_-, \hat{\rho}\}), \\ \hat{H} &= \hbar\Delta\hat{s}_0 + \hbar\Omega(\hat{s}_+ + \hat{s}_-). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Величину  $\Omega = -d \cdot E_0/\hbar$  называют *частотой Раби*, а  $\Delta = \omega_0 - \omega_1$  - *отстройкой* внешнего поля от резонанса с атомным переходом. При этом гамильтониан в (1.20) соответствует случаю, называемому приближением вращающейся волны [75], когда отстройка поля мала по сравнению с частотой внешнего поля, что позволяет избавиться от зависящих от времени быстро осциллирующих слагаемых.

Собственные значения и собственные состояния гамильтониана (т.н. ‘одетые’ состояния [76, 77]) имеют вид

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \cos(\theta)|e\rangle + \sin(\theta)|g\rangle, \\ |2\rangle &= \cos(\theta)|g\rangle - \sin(\theta)|e\rangle, \\ E_{1,2} &= \pm\hbar\frac{1}{2}\sqrt{4\Omega^2 + \Delta^2}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

где  $\tan(2\theta) = 2\Omega/\Delta$ .

Известно, что спектр резонансной флуоресценции двухуровневого атома во внешнем поле имеет вид триплета, центрированного на частоте атомного перехода, с боковыми компонентами, отстоящими от центра на  $\sim \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}/4$  и шириной  $\sim \gamma$  [78, 79]. Выразим оператор спонтанного распада  $\hat{s}_-$  через одетые состояния:

$$\begin{aligned}
\hat{s}_- &= \sum_{\alpha=0,\pm} \hat{L}_\alpha, \\
\hat{L}_0 &= \sin(\theta)\cos(\theta) \left( |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| \right), \\
\hat{L}_- &= -\sin^2(\theta)|1\rangle\langle 2|, \hat{L}_+ = \cos^2(\theta)|2\rangle\langle 1|.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

В терминах новых операторов  $\hat{L}_\alpha$ , испускание фотона с частотой, соответствующей спектральной компоненте  $\alpha$ , кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \gamma \sum_{\alpha,\alpha'} (\hat{L}_\alpha \hat{\rho}(t) \hat{L}_{\alpha'}^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_{\alpha'}^\dagger \hat{L}_\alpha, \hat{\rho}(t) \}). \tag{1.23}$$

Данное уравнение представляет собой наиболее общий вид эволюции состояния открытой квантовой системы в приближении Маркова-Борна, а не только двухуровневого атома [74]. Как будет показано далее, при решении реальных задач часто возникает необходимость находить временные зависимости операторов исследуемой системы в представлении Гейзенберга. По аналогии с замкнутыми системами, для каждого оператора  $\hat{A}$  в представлении Шредингера можно определить оператор в представлении Гейзенберга  $\hat{A}(t)$ . Эквивалентность этих представлений должна гарантироваться условием одинаковости всех системных средних:

$$Tr(\hat{A}\hat{\rho}(t)) = Tr(\hat{A}(t)\hat{\rho}(0)), \tag{1.24}$$

где  $\hat{\rho}(t)$  - решение уравнения (1.23) с начальными условиями  $\hat{\rho}(0)$ . Дифференцирование обеих частей выражения по времени и подстановка (1.23) в (1.24) дает [80]

$$\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}(t)] + \gamma \sum_{\alpha,\alpha'} (\hat{L}_{\alpha'} \hat{A}(t) \hat{L}_\alpha^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_{\alpha'}^\dagger \hat{L}_\alpha, \hat{A}(t) \}). \tag{1.25}$$

Слагаемые с  $\alpha \neq \alpha'$  отвечают возможной неопределенности в определении компоненты триплета, в которую произошло фотоиспускание. Если же компоненты отстоят далеко друг от друга, т.е. хорошо разрешены (т.н. *секулярное приближение*), то можно полагать

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \gamma \sum_{\alpha} (\hat{L}_\alpha \hat{\rho}(t) \hat{L}_\alpha^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_\alpha^\dagger \hat{L}_\alpha, \hat{\rho}(t) \}), \tag{1.26}$$

пренебрегая в (1.23) слагаемыми, содержащими различные типы операторов Линдблада  $\hat{L}_\alpha$ .

## 1.2 Спектр резонансной флуоресценции одиночного атома в присутствии обратной связи

Рассмотрим взаимодействие двухуровневого атома (основное состояние  $|g\rangle$  и возбужденное  $|e\rangle$ ) с внешним *классическим* монохроматическим световым полем. Будем полагать, что подавляющая часть спонтанных фотонов, испускаемых атомом, регистрируется системой детекторов, находящихся в режиме счета фотонов. Временное разрешение каждого детектора достаточно для того, чтобы воспринимать каждую регистрацию спонтанного фотона как хорошо локализованное во времени событие.

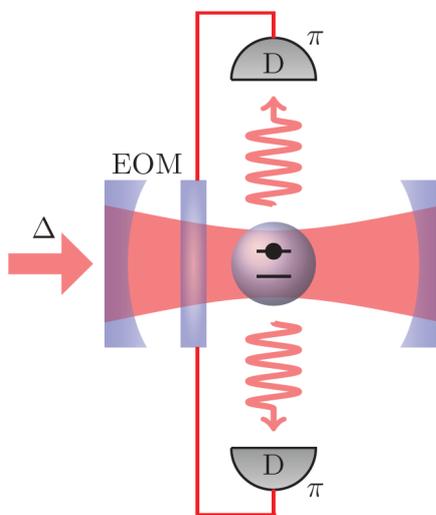


Рис. 6: Схема действия обратной связи. Детектирование фотона вызывает изменение фазы поля в резонаторе на  $\pi$ , что схематично показано через присутствие электрооптического модулятора (EOM).

Введем в систему обратную связь, устроенную следующим образом: каждая регистрация спонтанного фотона вызывает изменение фазы внешнего поля на  $\pi$  (Рис. 6). Таким образом, система обратной связи может быть охарактеризована некоторым классическим параметром  $\sigma$ , принимающим лишь два различных значения, которые в дальнейшем мы будем обозначать (0) либо (1). Иначе говоря, система фотодетекторов и обратной связи подвержена сильной декогеренции

при взаимодействии с окружением, что позволяет рассматривать ее классически. Полная система, состоящая из двухуровневого атома (в общем случае - произвольной квантовой системы, подверженной действию обратной связи обсуждаемого типа; дальнейшие рассуждения будем проводить именно для такого общего случая) и системы обратной связи может рассматриваться как гибридная квантово-классическая система аналогично тому, как это было сделано в [81]. Вместо единого статистического оператора полной системы  $\hat{\rho}$  вводится набор положительных операторов  $\hat{\rho}^{(\sigma)}$ , действующих на гильбертовом пространстве квантовой системы. При этом  $p^{(\sigma)} \doteq Tr \hat{\rho}^{(\sigma)}$  есть вероятность нахождения системы обратной связи в состоянии ' $\sigma$ ' и

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &\doteq \hat{\rho}^{(0)} + \hat{\rho}^{(1)}, \\ Tr(\hat{\rho}^{(0)} + \hat{\rho}^{(1)}) &= 1.\end{aligned}\tag{1.27}$$

Для нахождения состояния системы нужно, таким образом, определить управляющие уравнения для новых операторов  $\hat{\rho}^{(\sigma)}$ . Это можно сделать, если формально проквантовать классическую подсистему. Определяя ее гильбертово пространство состояний  $\mathcal{H}_{FB} = span\{|\sigma\rangle; \sigma = 0, 1\}$ , запишем полный гамильтониан системы:

$$\hat{H}_{tot} = \sum_{\sigma} \hat{H}^{(\sigma)} \otimes |\sigma\rangle\langle\sigma|.\tag{1.28}$$

Недиагональные по пространству  $\mathcal{H}_{FB}$  слагаемые отсутствуют ввиду упомянутой быстрой декогеренции системы обратной связи, которая изначально и позволила считать ее классической.

Эволюция полной системы в рамках рассматриваемых приближений должна подчиняться уравнению типа Линдблада (1.23) (здесь и далее будем полагать  $\hbar = 1$  для упрощения записи):

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{tot} = -\imath[\hat{H}, \hat{\rho}_{tot}] + \sum_{\alpha} (\hat{L}_{\alpha}\hat{\rho}_{tot}\hat{L}_{\alpha}^{\dagger} - \frac{1}{2}\{\hat{L}_{\alpha}^{\dagger}\hat{L}_{\alpha}, \hat{\rho}_{tot}\}).\tag{1.29}$$

Каждый из введенных операторов Линдблада  $\hat{L}_{\alpha}$  действует на полном пространстве состояний составной системы  $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_{FB}$  ( $\mathcal{H}_S$  - пространство состояний атома) и поэтому в общем случае имеет следующий вид:

$$\hat{L}_\alpha = \sum_{\sigma, \sigma'} \hat{L}_\alpha(\sigma, \sigma') \otimes |\sigma\rangle\langle\sigma'|. \quad (1.30)$$

По аналогии с (1.28) введем полную матрицу плотности системы (учитывая быструю декогеренцию классической подсистемы):

$$\hat{\rho}_{tot} = \sum_{\sigma} \hat{\rho}^{(\sigma)} \otimes |\sigma\rangle\langle\sigma|. \quad (1.31)$$

Уравнения на операторы  $\hat{\rho}^{(\sigma)}$  получаются путем взятия частичного следа по степеням свободы классической системы [81]:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}^{(\sigma)} = -i[\hat{H}^{(\sigma)}, \hat{\rho}^{(\sigma)}] + \sum_{\sigma', \alpha} \left( \hat{L}_\alpha(\sigma, \sigma') \hat{\rho}^{(\sigma')} \hat{L}_\alpha^\dagger(\sigma, \sigma') - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_\alpha^\dagger(\sigma', \sigma) \hat{L}_\alpha(\sigma', \sigma), \hat{\rho}^{(\sigma)} \} \right). \quad (1.32)$$

Уравнения (1.32) имеют достаточно прозрачный физический смысл. Эволюция условного состояния управляемой подсистемы (при конкретном значении классического индекса  $\sigma$ ) на временном промежутке между двумя последовательными актами необратимого взаимодействия с окружением подчиняется гамильтоновой динамике с неэрмитовым эффективным гамильтонианом

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff}^{(\sigma)} &= \hat{H}^{(\sigma)} - \frac{i}{2} \sum_{\sigma', \alpha} \hat{L}_\alpha^\dagger(\sigma', \sigma) \hat{L}_\alpha(\sigma', \sigma). \\ \left( \frac{d}{dt} \hat{\rho}^{(\sigma)} \right)_{cont} &= -i \left( \hat{H}_{eff}^{(\sigma)} \hat{\rho}^{(\sigma)} - \hat{\rho}^{(\sigma)} \hat{H}_{eff}^{(\sigma)\dagger} \right). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Поскольку изменение состояния классической подсистемы с  $\sigma'$  на  $\sigma$  инициируется актом необратимого взаимодействия системы с окружением, то соответствующее ему ‘сэндвичное’ слагаемое  $\hat{L}_\alpha(\sigma, \sigma') \hat{\rho}^{(\sigma')} \hat{L}_\alpha^\dagger(\sigma, \sigma')$  содержит другое условное состояние -  $\hat{\rho}^{(\sigma')}$ . Таким образом, возникает полная аналогия с балансными уравнениями, описывающими классические марковские процессы - уравнениями Паули [82]:

$$\frac{d}{dt} \rho(\sigma) = \sum_{\sigma'} (T(\sigma, \sigma') \cdot \rho(\sigma') - T(\sigma', \sigma) \cdot \rho(\sigma)), \quad (1.34)$$

в которых величины  $T(\sigma, \sigma')$  есть скорости перехода системы из состояния  $\sigma'$  в состояние  $\sigma$ .

Теперь вернемся к рассматриваемому случаю двухуровневого атома во внешнем поле, фаза которого управляется спонтанными атомными испусканиями. Уравнения, подобные (1.32), получаются из (1.20), если ввести следующие операторы Линдблада и гамильтонианы, определяющие динамику атома в промежутках между фоторегистрациями (поскольку теперь имеется лишь один тип регистрируемых спонтанных событий, то нижний индекс  $\alpha$  у соответствующего оператора Линдблада можно опустить):

$$\begin{aligned}\hat{L}(\sigma, \sigma') &= (1 - \delta_{\sigma\sigma'}) \cdot \hat{s}_-, \\ \hat{H}^{(\sigma)} &= \Delta \hat{s}_0 + (-1)^\sigma \Omega (\hat{s}_+ + \hat{s}_-).\end{aligned}\tag{1.35}$$

где  $\delta_{\sigma\sigma'}$  обозначает символ Кронекера. Тогда из (1.32) имеем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \hat{\rho}^{(0)}(t) &= -i[\hat{H}^{(0)}, \hat{\rho}^{(0)}(t)] + \gamma \hat{s}_- \hat{\rho}^{(1)}(t) \hat{s}_+ - \frac{\gamma}{2} \{ \hat{s}_+ \hat{s}_-, \hat{\rho}^{(0)}(t) \}, \\ \frac{d}{dt} \hat{\rho}^{(1)}(t) &= -i[\hat{H}^{(1)}, \hat{\rho}^{(1)}(t)] + \gamma \hat{s}_- \hat{\rho}^{(0)}(t) \hat{s}_+ - \frac{\gamma}{2} \{ \hat{s}_+ \hat{s}_-, \hat{\rho}^{(1)}(t) \}.\end{aligned}\tag{1.36}$$

Разумеется, анализ системы в рамках марковских уравнений возможен лишь в случае, когда переключения фазы происходят намного быстрее характерного времени эволюции атомной системы, т.е. обратных значений параметров  $\gamma$  и  $\Omega$ .

Естественными характеристиками атомного излучателя (или систем атомных излучателей, которые будут подробнее рассмотрены в последующих главах) являются, прежде всего, спектр и статистика спонтанных фотоиспусканий. Согласно смыслу уравнений (1.36) все спонтанно испущенные кванты задействованы в цепи обратной связи как инициаторы переключения фазы поля. Ввиду достаточно хорошей локализованности событий фотоиспусканий во времени некорректно ставить вопрос о частотах зарегистрированных фотонов. Тем не менее, можно предположить, что некоторая малая их доля не используется в цепи обратной связи и подвергается спектральным измерениям. Данное предположение позволяет развить идеи, предложенные в работе [68]. В ней эффективность обратной связи для увеличения времени жизни поля в состоянии ‘кошки Шредингера’ напрямую зависела от доли зарегистрированных спонтанных фотонов. Малость доли фотонов, используемых для измерения спектра, позволяет использовать

немодифицированные уравнения эволюции (1.36). Результат измерений данного малого сигнала будет в дальнейшем пониматься как спектр резонансной флуоресценции атома в цепи обратной связи, основанной на переключении фазы.

Классическое выражение для спектра резонансной флуоресценции (по сути, спектральной плотности мощности) имеет вид [83]

$$S(\omega) \propto Re \int_0^\infty e^{i\omega t} Tr[\hat{s}_+(t)\hat{s}_-\hat{\rho}_{st}]dt, \quad (1.37)$$

где  $\hat{s}_+(t)$  – атомный повышающий оператор в представлении Гейзенберга, а  $\hat{\rho}_{st}$  – стационарная матрица плотности атома. При наличии обратной связи гейзенберговские атомные операторы также получают зависимость от индекса состояния цепи обратной связи  $\sigma$  (ср. (1.25)):

$$\frac{d}{dt}\hat{s}_+^{(\sigma)}(t) = i[\hat{H}^{(\sigma)}, \hat{s}_+^{(\sigma)}(t)] + \gamma\hat{s}_+\hat{s}_+^{(\bar{\sigma})}(t)\hat{s}_- - \frac{\gamma}{2}\{\hat{s}_+\hat{s}_-, \hat{s}_+^{(\sigma)}(t)\}. \quad (1.38)$$

Здесь  $\bar{0} = 1$  и  $\bar{1} = 0$ . Можно убедиться, что основополагающий принцип эквивалентности представлений Шредингера и Гейзенберга – одинаковые значения наблюдаемых (1.24) – выполнен для (1.38).

В случае без обратной связи в качестве начальных условий для гейзенберговских операторов выбираются соответствующие операторы в представлении Шредингера. В случае гибридной системы уравнения (1.38) могут решаться при двух различных типах начальных условий:

$$\begin{aligned} (I) & : \hat{s}_+^{(0)}(t)|_{t=0} = \hat{s}_+, \quad \hat{s}_+^{(1)}(t)|_{t=0} = 0; \\ (II) & : \hat{s}_+^{(1)}(t)|_{t=0} = \hat{s}_+, \quad \hat{s}_+^{(0)}(t)|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Формула для спектра, обобщающая (1.37) содержит оба типа решений (ее смысл будет прокомментирован ниже):

$$\begin{aligned} S(\omega) \propto Re \int_0^\infty e^{i\omega t} Tr[\hat{s}_-(\hat{\rho}_{st}^{(0)}\hat{s}_+^{(0)}(t)|_I + \\ \hat{\rho}_{st}^{(1)}\hat{s}_+^{(1)}(t)|_{II} + \hat{\rho}_{st}^{(0)}\hat{s}_+^{(1)}(t)|_I + \hat{\rho}_{st}^{(1)}\hat{s}_+^{(0)}(t)|_{II})]dt. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Выпишем стационарное решение системы (1.38)

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{st}^{(\sigma)} &= \frac{\hat{\mathbb{1}}}{4} + \rho_{st+} \hat{s}_+ + \rho_{st-} \hat{s}_- + \rho_{st0} \hat{s}_0, \\
\rho_{st\pm}^{(0)} &= \frac{-2\Omega\Delta \mp i\gamma\Omega}{8\Omega^2 + 4\Delta^2 + \gamma^2}, \quad \rho_{st0}^{(0)} = -\frac{4\Delta^2 + \gamma^2}{2(8\Omega^2 + 4\Delta^2 + \gamma^2)}, \\
\rho_{st\pm}^{(1)} &= -\rho_{st\pm}^{(0)}; \quad \rho_{st0}^{(1)} = \rho_{st0}^{(0)}.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Следующие соображения могут служить некоторым качественным обоснованием правила использования того или иного типа начальных условий при вычислении операторов  $\hat{s}_+^{(0)}(t)$  и  $\hat{s}_+^{(1)}(t)$  в (1.40). Как нетрудно убедиться, след произведения операторов из (1.39) является частью корреляционной функции дипольного момента атома. Оператор  $\hat{s}_-$  отвечает факту измерения дипольного момента в нулевой момент времени. При этом не происходит переключения фазы поля, т.к. спонтанный фотон в этот момент не регистрировался детекторами, связанными с системой обратной связи. В момент времени  $t$  происходит второе измерение дипольного момента. За это время может произойти четное или нечетное число переключений. Если в нулевой момент времени мы имели состояние  $\hat{\rho}_{st}^{(0)}$  и четность на интервале  $[0, t]$  не изменилась, что может, в частности, произойти в отсутствие фотонов в системе обратной связи, мы используем оператор  $\hat{s}_+^{(0)}(t) |_I$ , представляющий второе измерение дипольного момента. Если четность изменилась, мы должны пользоваться оператором  $\hat{s}_+^{(1)}(t)$ . Ясно, что первое переключение фазы на интервале  $[0, t]$  произошло при некотором  $t' > 0$ . Поэтому следует считать, что  $\hat{s}_+^{(1)}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ , т.е. использовать решение типа  $(I)$ . Аналогичным образом можно пояснить происхождение остальных слагаемых в (1.40).

Окончательное аналитическое выражение для спектра (1.40) с учетом (1.41) принимает вид

$$\begin{aligned}
S(\omega) &\propto \frac{\Omega^2}{\gamma^2/4 + \Delta^2 + 2\Omega^2} \times \\
&Re \left[ \frac{(\gamma/2 - i\Delta) \cdot (\omega + i\gamma)}{(\gamma/2 - i\omega - i\Delta) \cdot (\Lambda(\omega) + \gamma/2) \cdot (\omega + i0)} + \right. \\
&\left. \frac{1}{\gamma/2 - i\omega - i\Delta} \cdot \left( 1 - \frac{2\Omega^2}{(\gamma/2 - i\omega - i\Delta) \cdot (\Lambda(\omega) - \gamma/2)} \right) \right],
\end{aligned} \tag{1.42}$$

где

$$\Lambda(\omega) = (\gamma/2 - i\omega) \cdot \left[ 1 + \frac{4\Omega^2}{(\gamma/2 - i\omega)^2 + \Delta^2} \right].$$

Здесь явным образом выделен член, содержащий в знаменателе множитель  $\omega + i0$ , соответствующий наличию бесконечно узкого несмещенного пика. Знак мнимой части выбран в соответствии с (1.40), чтобы не нарушить сходимость интеграла.

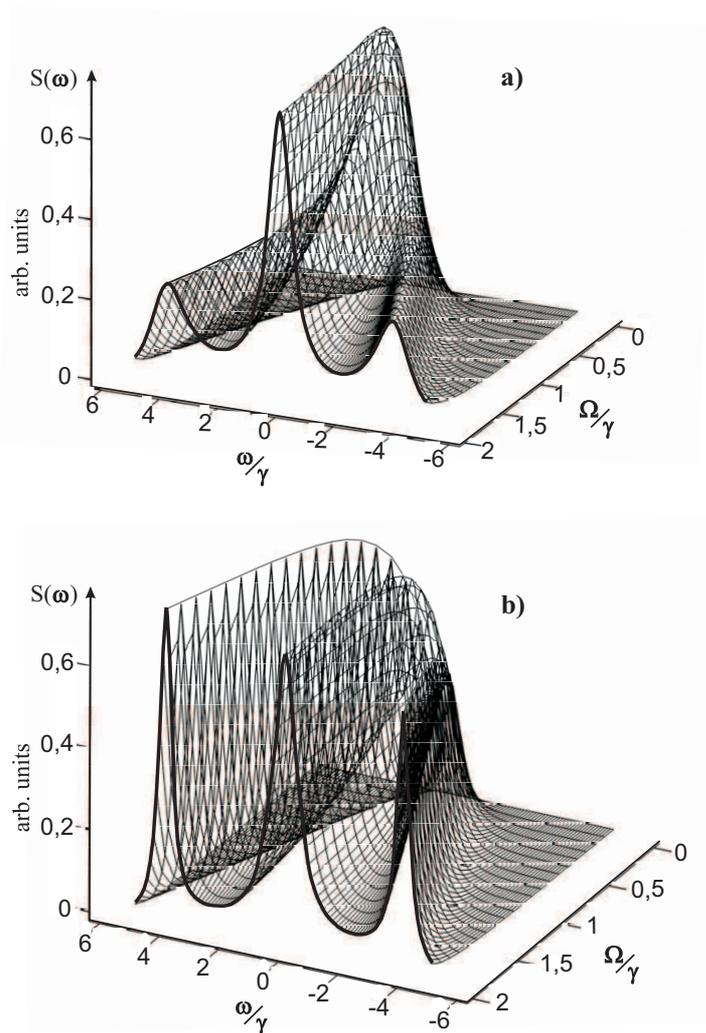


Рис. 7: Форма спектра резонансной флуоресценции: *a)* – без обратной связи и *b)* – с обратной связью как функция  $\omega$  и частоты Раби  $\Omega$ . В случае обратной связи триплетная структура выражена значительно более резко, как и асимметрия, связанная с ненулевой расстройкой  $\Delta = -2\gamma/7$ .

Результаты вычисления спектра резонансной флуоресценции при наличии обратной связи представлены на Рис 7. Для сравнения приведена форма хорошо известного триплета Раутиана-Моллоу [78, 79] в тех же условиях, но без

обратной связи, при этом сингулярные несмещенные структуры не показаны. Качественные различия спектров очевидны. В случае наличия обратной связи триплетная структура выражена значительно более резко даже при малых значениях частоты Раби  $\Omega$ , т.е. за пределами секулярного приближения, когда боковые компоненты триплета в обычных условиях практически исчезают. Наличие обратной связи делает также крайне чувствительной симметрию триплетной структуры к частотной расстройке  $\Delta$ . Для вычислений выбрано значение  $\Delta = -2\gamma/7$ . При этом асимметрия обычного триплета Раутиана-Моллоу при  $\Omega \sim 2\gamma$  практически незаметна.

Сохранение триплетной структуры спектра следует из того, что наличие обратной связи не меняет структуры уровней атома. Действительно, хотя выражения для собственных состояний атома в базисе  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$  приобретают зависимость от  $\sigma$

$$\begin{aligned} |1(\sigma)\rangle &= (-1)^\sigma \cos(\theta)|e\rangle + \sin(\theta)|g\rangle, \\ |2(\sigma)\rangle &= (-1)^\sigma \cos(\theta)|g\rangle - \sin(\theta)|e\rangle, \end{aligned} \tag{1.43}$$

соответствующие им собственные значения вырождены по параметру  $\sigma$ , т.к. содержат квадратичную зависимость от частоты Раби  $\Omega$  (см. (1.21)).

### 1.3 Статистика резонансной флуоресценции одиночного атома в присутствии обратной связи

После исследования спектра следующим логическим шагом при изучении свойств резонансной флуоресценции рассматриваемой системой является вычисление ее статистических характеристик, являющихся в определенном смысле дополнительными к спектральным. Нетрудно видеть, что обратная связь указанного типа не в состоянии изменить общую статистику фотоиспусканий в пределе, когда фотоиспускания рассматриваются как абсолютно точно локализованные во времени события. Действительно, после фоторегистрации (если, как и прежде, пренебрегать задержкой между фотоиспусканием и фоторегистрацией) атом оказывается в основном состоянии. Точная временная локализация гарантирует в этот момент отсутствие когерентности между основным и возбужденным уров-

нями, а следовательно, отсутствует и память о фазе поля до фоторегистрации. По этой причине переключение фазы поля не будет влиять на вероятность следующего фотоиспускания. Однако, изменение формы и соотношения интенсивностей спектральных компонент указывает на то, что обратная связь способна влиять на корреляции между фотоиспусканиями в одну и ту же или различные компоненты триплета. Такая постановка предполагает осуществление ‘мягкой’ спектральной селекции испущенных фотонов, т.е. определение, какому из трех пиков триплета соответствует зарегистрированный фотон. Эта селекция занимает хоть и небольшое (в случае хорошего спектрального разрешения компонент спектра), но конечное время. Эта задержка более не позволяет отождествлять момент фотоиспускания с моментом фоторегистрации. На временном интервале между этими моментами атом продолжает эволюционировать в поле с прежней фазой, приобретая когерентность между возбужденным и основным состояниями, и поэтому сохраняет память о фазе поля после ее переключения.

Для начала необходимо определить операторы, описывающие фотоиспускания в различные компоненты триплета по аналогии с (1.22). Теперь они будут нести зависимость от  $\sigma$ :

$$\begin{aligned}\hat{s}_- &= \sum_{\sigma=0,1} \sum_{\alpha=0,\pm} \hat{L}_\alpha(\sigma), \\ \hat{L}_0(\sigma) &= \sin(\theta)\cos(\theta) \left( |1(\sigma)\rangle\langle 1(\sigma)| - |2(\sigma)\rangle\langle 2(\sigma)| \right), \\ \hat{L}_-(\sigma) &= -\sin^2(\theta)|1(\sigma)\rangle\langle 2(\sigma)|, \quad \hat{L}_+(\sigma) = \cos^2(\theta)|2(\sigma)\rangle\langle 1(\sigma)|.\end{aligned}\quad (1.44)$$

Для количественной характеристики корреляций мы воспользуемся соответствующим обобщением понятия матрицы нормированных корреляторов  $g(t)$ , описанной в [30, 44]. Нас будут интересовать корреляции в стационарном состоянии. Предположим, что в момент начала регистрации произошло фотоиспускание в компоненту  $\alpha$ . При этом фаза поля под действием механизма обратной связи изменилась на  $\pi$ . Это позволяет заключить, что стационарная матрица плотности при этом перешла в

$$\hat{\rho}_\alpha^{(\sigma)}(0) = \frac{\hat{L}_\alpha(\bar{\sigma})\hat{\rho}_{st}^{(\bar{\sigma})}\hat{L}_\alpha^\dagger(\bar{\sigma})}{\sum_{\sigma'} \text{Tr}(\hat{L}_\alpha(\sigma')\hat{\rho}_{st}^{(\sigma')}\hat{L}_\alpha^\dagger(\sigma'))}, \quad (1.45)$$

Тогда вероятность  $p(\beta, t|\alpha, 0)$  того, что в момент времени  $t$  было зарегистрировано фотоиспускание в компоненту  $\beta$  при условии регистрации фотоотсчета в компоненту  $\alpha$  в начальный момент, имеет следующий вид:

$$p(\beta, t|\alpha, 0) \sim \sum_{\sigma} Tr(\hat{L}_{\beta}(\sigma)\hat{\rho}_{\alpha}^{(\sigma)}(t)\hat{L}_{\beta}^{\dagger}(\sigma)), \quad (1.46)$$

где  $\hat{\rho}_{\alpha}^{(\sigma)}(t)$  - решение (1.36) с начальными условиями (1.45). Безусловная же вероятность  $p(\beta)$  фотоиспускания в компоненту  $\beta$  связана с выражением

$$p(\beta) \sim \sum_{\sigma} Tr(\hat{L}_{\beta}(\sigma)\hat{\rho}_{st}^{(\sigma)}\hat{L}_{\beta}^{\dagger}(\sigma)). \quad (1.47)$$

Коэффициенты пропорциональности в (1.46,1.47) в общем случае зависят от времени. Однако, в наиболее интересном случае сильного внешнего поля (в этом случае эффект обратной связи более заметен), т.е. при углах смешивания, близких к  $\pm\pi/4$ , эта зависимость от времени выражена слабо. Тогда имеет смысл определить элементы  $g_{\alpha\beta}(t)$  матрицы нормированных корреляторов  $g(t)$  как отношение величин, стоящих в правой части (1.46,1.47)

$$g_{\alpha\beta}(t) = \frac{\sum_{\sigma} Tr(\hat{L}_{\beta}(\sigma)\hat{\rho}_{\alpha}^{(\sigma)}(t)\hat{L}_{\beta}^{\dagger}(\sigma))}{\sum_{\sigma} Tr(\hat{L}_{\beta}(\sigma)\hat{\rho}_{st}^{(\sigma)}\hat{L}_{\beta}^{\dagger}(\sigma))}; \alpha, \beta \in \{-, 0, +\}. \quad (1.48)$$

Т.о., элементы матрицы нормированных корреляторов отражают корреляции между фотоотсчетами в одной и той же (при совпадении индексов) или в разных компонентах триплета резонансной флуоресценции. Тип корреляций определяется аналогично корреляционной функции фотоиспусканий второго порядка [83] – значение  $g_{\alpha\beta} < 1$  соответствует *суб-пуассоновской* статистике, или *антигруппировке*, а  $g_{\alpha\beta} > 1$  – *супер-пуассоновской* статистике, или *группировке*.

Анализ решения уравнений (1.36) с начальными условиями (1.45) и выражения (1.48) показывает, что  $g_{\alpha 0} \equiv 1$  для всех значений  $\alpha$ . Это означает, что распределение вероятности фотоотсчетов в центральном пике, как и в случае отсутствия обратной связи, остается пуассоновским. Однако, у фотоиспусканий сначала в центральный, а затем в один из боковых пиков иная статистическая зависимость (Рис. 8, нижние графики). В зависимости от знака отстройки  $\Delta$ , соответствующие функции  $g_{0+}$  и  $g_{0-}$  демонстрируют как корреляции, так и антикорреляции. В то же время в боковых компонентах наблюдается группировка

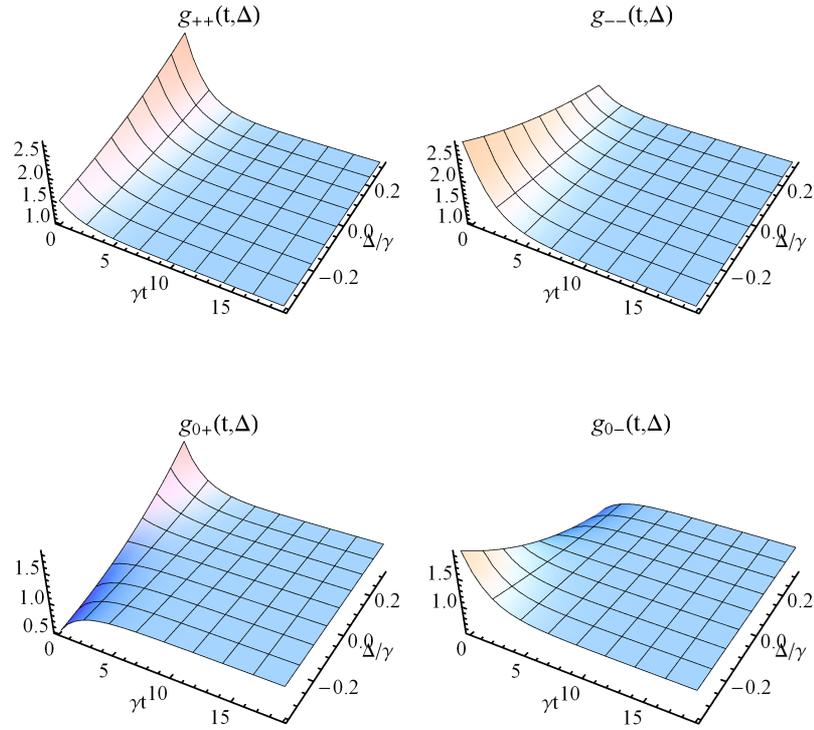


Рис. 8: Элементы корреляционной матрицы  $g_{\alpha\beta}$  для  $\Omega = \gamma$ .  $g_{++}(\Delta, t) \equiv g_{--}(-\Delta, t)$ ,  $g_{0+}(\Delta, t) \equiv g_{0-}(-\Delta, t)$ .

фотоотсчетов (Рис. 8, верхние графики), тогда как без обратной связи имеет место антигруппировка [84]. Корреляции между различными боковыми компонентами  $g_{+-}$  и  $g_{-+}$  демонстрируют антигруппировку и слабо зависят от  $\Delta$  (и поэтому не приведены на Рис. 8), что также находится в противоречии с известными классическими результатами. Т.о., статистика фотоотсчетов в боковых компонентах в некотором смысле ‘инвертирована’.

Как видно из приведенного выше анализа, обратная связь существенно модифицирует статистику фотоиспусканий в различные компоненты триплета, хотя сама она не обладает спектральной чувствительностью. Следующим логичным расширением данной задачи является введение зависимости фазового сдвига, осуществляемого цепью обратной связи, от частоты зарегистрированного фотона. Пусть фотоны сначала регистрируются спектральным прибором, осуществляющим ‘мягкую’ спектральную селекцию. После этого подается сигнал на один из трех счетчиков, соответствующий данному пику. В случае, если пики хорошо разрешены, такая спектральная селекция может быть проведена вполне однозначно. Тогда условие на спектральную ширину прибора  $f$  может быть пред-

СТАВЛЕНО В ВИДЕ

$$\gamma \ll f \ll \sqrt{4\Omega^2 + \Delta^2}. \quad (1.49)$$

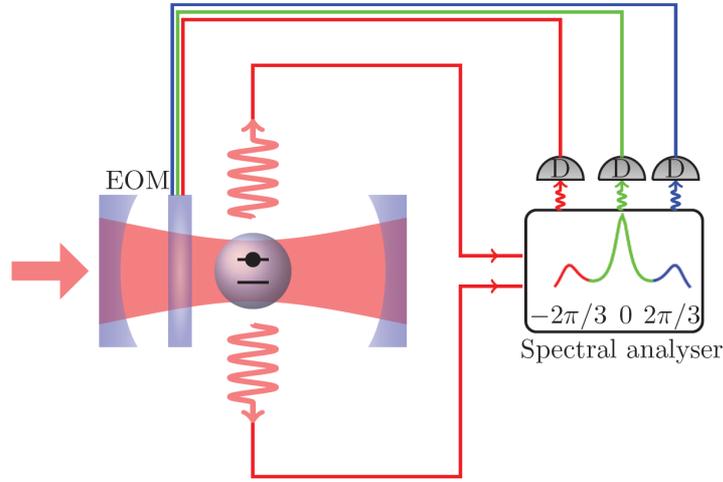


Рис. 9: Иллюстрация схемы обратной связи, действующей на основе ‘мягкой’ спектральной селекции.

Обратная связь осуществляется следующим образом - происходит переключение фазы поля на  $-2\pi/3$ ,  $0$  или  $2\pi/3$ , если было зарегистрировано фотоиспускание в левую, центральную или правую спектральные компоненты соответственно (Рис. 9). Теперь классический параметр, описывающий состояние классической части гибридной системы, - фаза поля по отношению к начальной, которую мы принимаем равной нулю, - может принимать три различных значения. Будем обозначать их соответственно  $\{-1, 0, 1\}$ . По аналогии с (1.35), запишем гамильтониан системы

$$\hat{H}^{(\sigma)} = \Delta \hat{s}_0 + \Omega (e^{i\frac{2\pi}{3}\sigma} \hat{s}_+ + e^{-i\frac{2\pi}{3}\sigma} \hat{s}_-). \quad (1.50)$$

Аналогично находятся одетые состояния

$$\begin{aligned} |1(\sigma)\rangle &= \cos(\theta)|e\rangle + \sin(\theta)e^{-i\frac{2\pi}{3}\sigma}|g\rangle, \\ |2(\sigma)\rangle &= \cos(\theta)|g\rangle - \sin(\theta)e^{i\frac{2\pi}{3}\sigma}|e\rangle. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Операторы Линдблада имеют тот же структурный вид, что и в (1.44), но число и вид ‘одетых’ состояний уже определяется (1.51).

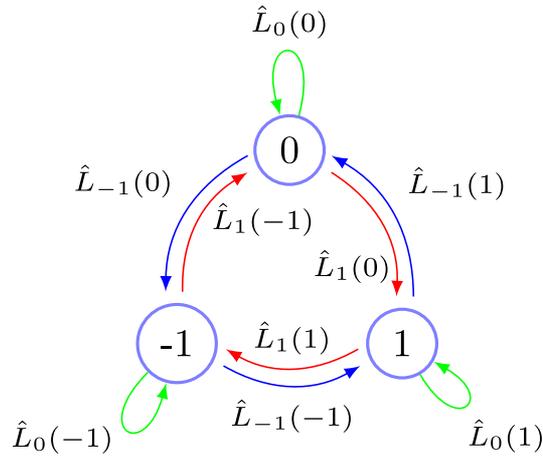


Рис. 10: Схема переходов между различными положениями цепи обратной связи.

Поскольку теперь обратная связь действует селективно по частоте фотона, то кинетические уравнения следует записывать в терминах операторов  $\hat{L}_\alpha(\sigma)$ , а хорошее спектральное разрешение компонент триплета позволят использовать секулярное приближение (1.26). Соображения о том, как следует модифицировать ‘сэндвичные’ члены в кинетическом уравнении, можно пояснить на следующем примере. Рассмотрим эволюцию оператора  $\hat{\rho}^{(0)}$ . Если фаза поля после фотоиспускания оказалась равной нулю, то возможны следующие варианты:

- 1) Фаза поля до фотоиспускания была такой же. Значит, произошло фотоиспускание в центральный пик, и соответствующий член будет иметь вид

$$\hat{L}_0(0)\hat{\rho}^{(0)}(t)\hat{L}_0^\dagger(0).$$

- 2) Фаза поля до фотоиспускания была  $-2\pi/3$ . Значит, произошло фотоиспускание в правый пик, и соответствующий член будет иметь вид

$$\hat{L}_1(-1)\hat{\rho}^{(-1)}(t)\hat{L}_1^\dagger(-1).$$

- 3) Фаза поля до фотоиспускания была  $2\pi/3$ . Значит, произошло фотоиспускание в левый пик, и соответствующий член будет иметь вид

$$\hat{L}_{-1}(1)\hat{\rho}^{(1)}(t)\hat{L}_{-1}^\dagger(1).$$

Данные соображения можно наглядно проиллюстрировать при помощи диаграммы на Рис. 10, на которой точками на окружности представлены состояния цепи обратной связи (различные значения классического индекса), а стрелками - его изменения, инициируемые фотодектированиями того или иного типа. Теперь нетрудно показать, что кинетические уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{\rho}^{(0)}(t) &= -i[\hat{H}^{(0)}, \hat{\rho}^{(0)}(t)] - \frac{\gamma}{2} \sum_{\alpha} \{ \hat{L}_{\alpha}^{\dagger}(0) \hat{L}_{\alpha}(0), \hat{\rho}^{(0)}(t) \} \\
&+ \gamma \left( \hat{L}_{-1}(1) \hat{\rho}^{(1)}(t) \hat{L}_{-1}^{\dagger}(1) + \hat{L}_1(-1) \hat{\rho}^{(-1)}(t) \hat{L}_1^{\dagger}(-1) + \hat{L}_0(0) \hat{\rho}^{(0)}(t) \hat{L}_0^{\dagger}(0) \right), \\
\frac{d}{dt}\hat{\rho}^{(1)}(t) &= -i[\hat{H}^{(1)}, \hat{\rho}^{(1)}(t)] - \frac{\gamma}{2} \sum_{\alpha} \{ \hat{L}_{\alpha}^{\dagger}(1) \hat{L}_{\alpha}(1), \hat{\rho}^{(1)}(t) \} \\
&+ \gamma \left( \hat{L}_{-1}(-1) \hat{\rho}^{(-1)}(t) \hat{L}_{-1}^{\dagger}(-1) + \hat{L}_1(0) \hat{\rho}^{(0)}(t) \hat{L}_1^{\dagger}(0) + \hat{L}_0(1) \hat{\rho}^{(1)}(t) \hat{L}_0^{\dagger}(1) \right), \\
\frac{d}{dt}\hat{\rho}^{(-1)}(t) &= -i[\hat{H}^{(-1)}, \hat{\rho}^{(-1)}(t)] - \frac{\gamma}{2} \sum_{\alpha} \{ \hat{L}_{\alpha}^{\dagger}(-1) \hat{L}_{\alpha}(-1), \hat{\rho}^{(-1)}(t) \} \\
&+ \gamma \left( \hat{L}_{-1}(0) \hat{\rho}^{(0)}(t) \hat{L}_{-1}^{\dagger}(0) + \hat{L}_1(1) \hat{\rho}^{(1)}(t) \hat{L}_1^{\dagger}(1) + \hat{L}_0(-1) \hat{\rho}^{(-1)}(t) \hat{L}_0^{\dagger}(-1) \right).
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Далее нам необходимо определить матрицу нормированных корреляторов. Положим, что система находится в стационарном состоянии, и значение параметра, контролирующего фазу поля, равно  $\sigma_0$ . Обозначим  $\sigma_0 \oplus \alpha$  состояние поля после регистрации фотоотсчета в компоненту  $\alpha$ . Соответственно, матрица плотности переходит в

$$\hat{\rho}_{\alpha}^{(\sigma_0 \oplus \alpha)} = \frac{\hat{L}_{\alpha}(\sigma_0) \hat{\rho}_{st}^{(\sigma_0)} \hat{L}_{\alpha}^{\dagger}(\sigma_0)}{Tr \left[ \hat{L}_{\alpha}(\sigma_0) \hat{\rho}_{st}^{(\sigma_0)} \hat{L}_{\alpha}^{\dagger}(\sigma_0) \right]}. \tag{1.53}$$

Из стационарного решения (1.52) следует, что все состояния поля равновероятны

$$p_{st}^{(\sigma_0)} = Tr \hat{\rho}_{st}^{(\sigma_0)} = 1/3. \tag{1.54}$$

При вычислении матрицы нормированных корреляторов мы не интересуемся ни начальным, ни конечным состоянием поля, поэтому по ним будет проведено суммирование. С учетом этого, мы можем переопределить индексы в (1.53)  $\sigma_0 \oplus \alpha \rightarrow \sigma_0$  и записать начальные условия, аналогичные (1.45)

$$\hat{\rho}_{\alpha}^{(\sigma)}(\sigma_0, 0) = \delta_{\sigma\sigma_0} \hat{\rho}_{\alpha}^{(\sigma_0)}. \tag{1.55}$$

Тогда для матрицы  $g(t)$  получаем

$$g_{\alpha\beta}(t) = \frac{\sum_{\sigma, \sigma_0} Tr \left[ \hat{L}_{\beta}(\sigma) \hat{\rho}_{\alpha}^{(\sigma)}(\sigma_0, t) \hat{L}_{\beta}^{\dagger}(\sigma) \right]}{3 \sum_{\sigma'} Tr \left[ \hat{L}_{\beta}(\sigma') \hat{\rho}_{st}^{(\sigma')} \hat{L}_{\beta}^{\dagger}(\sigma') \right]}, \tag{1.56}$$

где  $\hat{\rho}_{\alpha}^{(\sigma)}(\sigma_0, t)$  - решение уравнений (1.42) с начальными условиями (1.53, 1.55).

При вычислении элементов матрицы  $g(t)$  было обнаружено, что  $g_{0\alpha} = g_{\alpha 0} \equiv 1$  для всех  $\alpha$ . Это означает, что статистика фотоотсчетов в центральном пике пуассоновская, а также отсутствуют корреляции между фотоотсчетами в центральном и боковые пики, что совпадает с результатом, полученным в отсутствие обратной связи. Результаты вычисления остальных элементов представлены на Рис. 11.

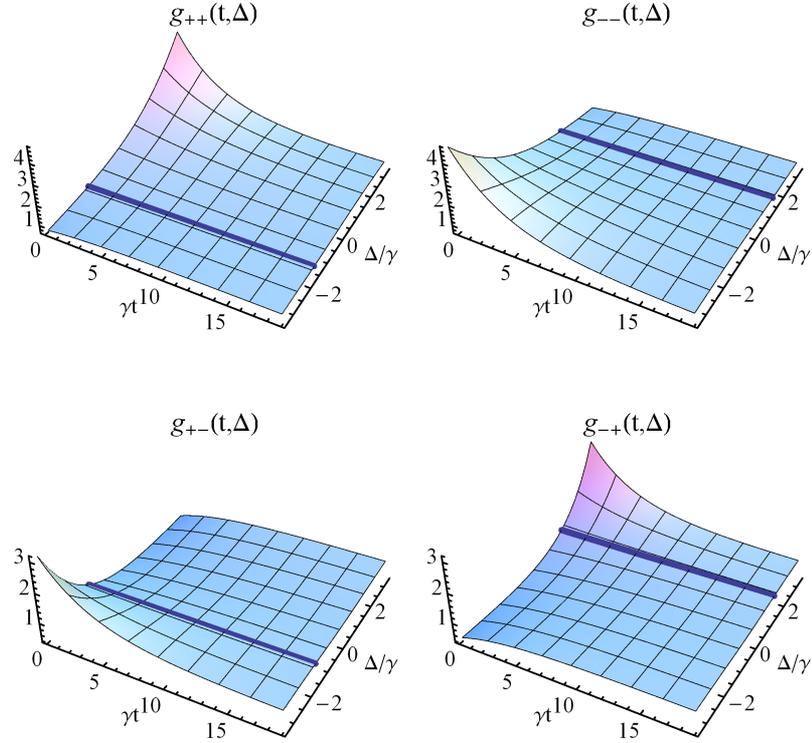


Рис. 11: Элементы корреляционной матрицы  $g_{\alpha\beta}$  для  $\Omega = 3.3\gamma$ .  $g_{++}(\Delta, t) \equiv g_{--}(-\Delta, t)$ ,  $g_{+-}(\Delta, t) \equiv g_{-+}(-\Delta, t)$ . Жирными линиями отмечены значения отстройки  $\Delta_0 = \pm 1.52\gamma$ , при которых  $g_{\alpha\beta}$  обращаются в единицу.

Как видно из графиков,  $g_{++}$  и  $g_{--}$ , так же, как и  $g_{+-}$  и  $g_{-+}$  демонстрируют противоположную зависимость от отстройки  $\Delta$ . Важным отличием как от случая обратной связи без спектральной селекции, так и вообще без обратной связи является то, что тип статистики фотоиспусканий в боковых компонентах, а также корреляции между ними зависят от величины отстройки.

Исследуем подробнее зависимость  $g_{++}$  и  $g_{--}$  от знака  $\Delta$ . Ввиду монотонности, достаточно рассмотреть лишь начальную точку  $t = 0$ . В этой точке выражения для корреляционных функций могут существенно упрощены, используя (1.53, 1.55):

$$\begin{aligned}
g_{++}(0) &= \frac{3\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}{\sum_{\sigma} \langle 1(\sigma) | \hat{\rho}_{st}^{(\sigma)} | 1(\sigma) \rangle}, \\
g_{--}(0) &= \frac{3\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}{\sum_{\sigma} \langle 2(\sigma) | \hat{\rho}_{st}^{(\sigma)} | 2(\sigma) \rangle}.
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Было выяснено, что стационарное решение уравнений (1.52) обладает следующим свойством:

$$\sin^4\theta \sum_{\sigma} \langle 2(\sigma) | \hat{\rho}_{st}^{(\sigma)} | 2(\sigma) \rangle = \cos^4\theta \sum_{\sigma} \langle 1(\sigma) | \hat{\rho}_{st}^{(\sigma)} | 1(\sigma) \rangle. \tag{1.58}$$

Зная, как угол смешивания  $\theta$  зависит от  $\Delta$ , можно записать

$$\begin{aligned}
\Delta > 0 : \sum_{\sigma} \langle 2(\sigma) | \hat{\rho}_{st}^{(\sigma)} | 2(\sigma) \rangle &> \sum_{\sigma} \langle 1(\sigma) | \hat{\rho}_{st}^{(\sigma)} | 1(\sigma) \rangle, \\
\Delta < 0 : \sum_{\sigma} \langle 2(\sigma) | \hat{\rho}_{st}^{(\sigma)} | 2(\sigma) \rangle &< \sum_{\sigma} \langle 1(\sigma) | \hat{\rho}_{st}^{(\sigma)} | 1(\sigma) \rangle,
\end{aligned} \tag{1.59}$$

что объясняет соотношение между  $g_{++}$  и  $g_{--}$ . Аналогичные рассуждения можно применить и к  $g_{+-}$  и  $g_{-+}$ :

$$\begin{aligned}
g_{+-}(0) &= \frac{1 - 3\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}{\sum_{\sigma} \langle 2(\sigma) | \hat{\rho}_{st}^{(\sigma)} | 2(\sigma) \rangle}, \\
g_{-+}(0) &= \frac{1 - 3\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}{\sum_{\sigma} \langle 1(\sigma) | \hat{\rho}_{st}^{(\sigma)} | 1(\sigma) \rangle}.
\end{aligned} \tag{1.60}$$

Выше было отмечено, что тип статистики может меняться в зависимости от отстройки. Представляет интерес значение отстройки, при котором статистика и корреляции строго пуассоновские. Пользуясь (1.57, 1.60), несложно показать, что это значение (обозначим его  $\Delta_0$ ) может быть получено из следующего уравнения:

$$\sum_{\sigma} \langle 1(\sigma) | \hat{\rho}_{st}^{(\sigma)} | 1(\sigma) \rangle = \frac{3}{4}\sin^2(2\theta) \Rightarrow \Delta = \Delta_0, \tag{1.61}$$

которое может быть решено численно. В итоге получаем

$$\begin{aligned}
\Delta = \Delta_0 : g_{++}(0) = g_{+-}(0) &= 1, \\
\Delta = -\Delta_0 : g_{--}(0) = g_{-+}(0) &= 1.
\end{aligned} \tag{1.62}$$

## 1.4 Резонансная флуоресценция пары атомов в цепи обратной связи

Как уже упоминалось в предыдущем разделе, если система после фотоиспускания оказывается в стационарном состоянии, то введение обратной связи не способно оказать влияние на динамику системы. Однако, если система содержит несколько компактно расположенных излучателей одинаковой природы, каждый из которых взаимодействует с внешним полем, то регистрация спонтанного фотоиспускания уже не обязательно разрушает когерентность между излучателями. Соответственно, остальные излучатели способны сохранять когерентность, и, следовательно, память о фазе, при которой эта когерентность возникла. Переключение фазы поля может в этом случае существенно модифицировать статистику фотоиспусканий, что и будет показано в данном разделе.

Рассмотрим взаимодействие пары не взаимодействующих между собой двухуровневых атомов (как и прежде, будет обозначать основное состояние  $|g\rangle$  и возбужденное  $|e\rangle$ ) с классическим монохроматическим световым полем. Обратная связь осуществляется таким же образом, как и в задаче с одним атомом (без предварительной спектральной селекции). Будем полагать, что атомы отстоят друг от друга на расстояние меньше длины волны резонансного излучения. В этом случае можно считать атомы тождественными с точки зрения поля и полагать, что симметрия состояния атомной пары не меняется при оптических переходах. Отсюда можно сделать вывод, что нетривиальная эволюция осуществляется внутри подпространства симметричных состояний, натянутого на собственные векторы энергетического квазиспина

$$|ee\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle + |ge\rangle), |gg\rangle. \quad (1.63)$$

соответствующие суммарному квазиспину  $J = 1$  и проекциям 1, 0 и -1 соответственно. Антисимметричное состояние  $(|eg\rangle - |ge\rangle)/\sqrt{2}$ , соответствующее  $J = 0$ , оказывается выключенным из взаимодействия с полем.

Таким образом, задача о резонансной флуоресценции двух двухуровневых атомов сводится к задаче с одним атомом, но с более сложной схемой уровней. Система кинетических уравнений на гибридные статистические операторы

$\hat{\rho}^{(0)}, \hat{\rho}^{(1)}$  полностью повторяет структуру (1.36), однако теперь атомные операторы  $\hat{s}_0, \hat{s}_+, \hat{s}_-$  следует заменить на их аналоги для единичного спина  $\hat{J}_3, \hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$  (обозначение  $\hat{J}_3$  выбрано из соображений удобства записи некоторых последующих выражений в тензорном виде):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\rho}^{(0)}(t) &= -i[\hat{H}^{(0)}, \hat{\rho}^{(0)}(t)] + \gamma\hat{J}_-\hat{\rho}^{(1)}(t)\hat{J}_+ - \frac{\gamma}{2}\{\hat{J}_+\hat{J}_-, \hat{\rho}^{(0)}(t)\}, \\ \frac{d}{dt}\hat{\rho}^{(1)}(t) &= -i[\hat{H}^{(1)}, \hat{\rho}^{(1)}(t)] + \gamma\hat{J}_-\hat{\rho}^{(0)}(t)\hat{J}_+ - \frac{\gamma}{2}\{\hat{J}_+\hat{J}_-, \hat{\rho}^{(1)}(t)\}, \\ \hat{H}^{(\sigma)} &= \Delta\hat{J}_3 + (-1)^\sigma\Omega(\hat{J}_+ + \hat{J}_-).\end{aligned}\quad (1.64)$$

Алгебра операторов, описывающих спин 1, более сложна, чем алгебра матриц Паули, использовавшаяся в задаче с одним атомом. Она состоит из девяти элементов:

$$\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3, \hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}_3^2, \{\hat{J}_1, \hat{J}_2\}, \{\hat{J}_1, \hat{J}_3\}, \{\hat{J}_2, \hat{J}_3\}, \quad (1.65)$$

причем  $\sum_{i=1}^3 \hat{J}_i^2 = J(J+1) = 2$ . Пользуясь обычными коммутационными соотношениями операторов углового момента, нетрудно доказать формулу раскрытия тройных произведений:

$$\hat{J}_i\hat{J}_j\hat{J}_k = i\varepsilon_{ijk} + \frac{1}{2}(\delta_{ij}\hat{J}_k + \delta_{jk}\hat{J}_i) - \frac{i}{2}\varepsilon_{ilk}\{\hat{J}_l, \hat{J}_j\}. \quad (1.66)$$

С помощью нее можно найти стационарное решение системы (1.64) в виде

$$\hat{\rho}_{st}^{(\sigma)} = \rho_i^{(\sigma)}\hat{J}_i + r_{ij}^{(\sigma)}\hat{J}_i\hat{J}_j, \quad (1.67)$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование и  $r_{ij}^{(\sigma)} = r_{ji}^{(\sigma)}$ .

Аналитические выражения для коэффициентов  $\rho_i^{(\sigma)}$  и  $r_{ij}^{(\sigma)}$  в общем случае достаточно громоздки. Однако, между ними имеют место следующие соотношения симметрии:

$$\rho_{1,2}^{(1)} = -\rho_{1,2}^{(0)}; \rho_3^{(1)} = \rho_3^{(0)}; r_{23,13}^{(1)} = -r_{23,13}^{(0)}; r_{11,22,33}^{(0)} = r_{11,22,33}^{(1)}. \quad (1.68)$$

Кроме того, в случае нулевой отстройки  $\Delta = 0$  оказывается возможным записать их в более компактном виде:

$$\begin{aligned}
\rho_1^{(0,1)} &= r_{12,13}^{(0,1)} = 0; \\
\rho_2^{(0)} &= \frac{\gamma\Omega(4\Omega^2 + \gamma^2)}{2(12\Omega^4 + 12\gamma^2\Omega^2 + \gamma^4)}; \rho_3^{(0)} = -\frac{\gamma^2(10\Omega^2 + \gamma^2)}{4(12\Omega^4 + 12\gamma^2\Omega^2 + \gamma^4)}; \\
r_{11}^{(0)} &= -\frac{\Omega^2(\gamma^2 - 2\Omega^2)}{2(12\Omega^4 + 12\gamma^2\Omega^2 + \gamma^4)}; r_{22}^{(0)} = \frac{\Omega^2(3\gamma^2 + 2\Omega^2)}{2(12\Omega^4 + 12\gamma^2\Omega^2 + \gamma^4)}; \\
r_{33}^{(0)} &= \frac{4\Omega^2(2\gamma^2 + \Omega^2) + \gamma^4}{2(12\Omega^4 + 12\gamma^2\Omega^2 + \gamma^4)}; r_{23}^{(0)} = -\frac{\gamma^3\Omega}{4(12\Omega^4 + 12\gamma^2\Omega^2 + \gamma^4)}.
\end{aligned} \tag{1.69}$$

Для определения свойств статистики фотоиспусканий воспользуемся модифицированным методом производящей функции, описанным в [85]. В дополнение к объединенному состоянию атомов и устройства, задающего фазу поля, теперь присутствует также счетчик числа  $n$  испущенных квантов. Вместо статистических операторов  $\hat{\rho}^{(0)}(t)$  и  $\hat{\rho}^{(1)}(t)$  введем наборы операторов  $\{\hat{\rho}^{(0)}(n, t)\}_{n=0}^{\infty}$  и  $\{\hat{\rho}^{(1)}(n, t)\}_{n=0}^{\infty}$ , пронумерованных числом  $n$ . Индексы 0 и 1 обозначают теперь фазу поля в момент начала счета фотонов, т.е.  $\hat{\rho}^{(\sigma)}(n, t)$  определяет вероятность испускания фотона за время  $t$  при условии, что к моменту начала измерения произошло *четное* ( $\sigma = 0$ ) или *нечетное* ( $\sigma = 1$ ) число фотоиспусканий. Эти операторы эволюционируют независимо:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{\rho}^{(0)}(n, t) &= -i[\hat{H}^{(0)}(n), \hat{\rho}^{(0)}(n, t)] + \gamma\hat{J}_-\hat{\rho}^{(0)}(n-1, t)\hat{J}_+ - \frac{\gamma}{2}\{\hat{J}_+\hat{J}_-, \hat{\rho}^{(0)}(n, t)\}, \\
\frac{d}{dt}\hat{\rho}^{(1)}(n, t) &= -i[\hat{H}^{(1)}(n), \hat{\rho}^{(1)}(n, t)] + \gamma\hat{J}_-\hat{\rho}^{(1)}(n-1, t)\hat{J}_+ - \frac{\gamma}{2}\{\hat{J}_+\hat{J}_-, \hat{\rho}^{(1)}(n, t)\},
\end{aligned} \tag{1.70}$$

где

$$\hat{H}^{(\sigma)}(n) = \Delta\hat{J}_3 + (-1)^{n+\sigma}\Omega(\hat{J}_+ + \hat{J}_-). \tag{1.71}$$

Полная вероятность регистрации  $n$  фотонов за время  $t$  записывается как

$$p(n, t) = Tr(\hat{\rho}^{(0)}(n, t) + \hat{\rho}^{(1)}(n, t)). \tag{1.72}$$

Одним из стандартных приемов решения системы рекуррентных соотношений типа (1.70) является введение операторнозначных производящих функций

$$\hat{Q}^{(\sigma)}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \hat{\rho}^{(\sigma)}(n, t), \tag{1.73}$$

которые связаны с распределением вероятности соотношением

$$p(n, t) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\partial^n \sum_{\sigma} \text{Tr} \hat{Q}^{(\sigma)}(x, t)}{\partial x^n} \Big|_{x=0}. \quad (1.74)$$

Уравнения на производящие функции естественным образом получаются из (1.70):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{Q}^{(0)}(x, t) &= -i\Delta[\hat{J}_3, \hat{Q}^{(0)}(x, t)] - i\Omega[\hat{J}_+ + \hat{J}_-, \hat{Q}^{(0)}(-x, t)] + \\ &\quad \gamma x \hat{J}_- \hat{Q}^{(0)}(x, t) \hat{J}_+ - \frac{\gamma}{2} \{\hat{J}_+ \hat{J}_-, \hat{Q}^{(0)}(x, t)\}, \\ \frac{d}{dt} \hat{Q}^{(1)}(x, t) &= -i\Delta[\hat{J}_3, \hat{Q}^{(1)}(x, t)] + i\Omega[\hat{J}_+ + \hat{J}_-, \hat{Q}^{(1)}(-x, t)] + \\ &\quad \gamma x \hat{J}_- \hat{Q}^{(1)}(x, t) \hat{J}_+ - \frac{\gamma}{2} \{\hat{J}_+ \hat{J}_-, \hat{Q}^{(1)}(x, t)\} \end{aligned} \quad (1.75)$$

с начальными условиями  $\hat{Q}^{(\sigma)}(x, 0) = \hat{\rho}_{st}^{(\sigma)}$ , где  $\hat{\rho}_{st}^{(\sigma)}$  – стационарные решения системы (1.64).

Наиболее информативные характеристики распределения вероятностей фоторегистраций – его первые два момента:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle_t &= \frac{\partial \sum_{\sigma} \text{Tr} \hat{Q}^{(\sigma)}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1}, \\ \langle (\Delta n)^2 \rangle_t &= \frac{\partial^2 \sum_{\sigma} \text{Tr} \hat{Q}^{(\sigma)}(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=1} + \langle n \rangle_t - \langle n \rangle_t^2. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Для среднего получаем компактное выражение:

$$\langle n \rangle_t = \gamma t (1 + \sum_{\sigma} (2\rho_3^{(\sigma)} + r_{11}^{(\sigma)} + r_{22}^{(\sigma)})). \quad (1.77)$$

Представляет интерес сравнение с известными результатами для одного атома [85]. Как показано в этой работе, в пределе сильных полей и умеренных отстроек статистика фотоотсчетов в случае одного атома оказывается практически пуассоновской. Оказывается, что в нашей задаче именно в этом диапазоне параметров зависимость дисперсии числа фотоотсчетов от времени может быть с хорошей точностью аппроксимирована следующей простой функцией (как с обратной связью, так и без нее):

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle_t = a(1 - e^{-bt}) + ct; \quad c > 0 \quad (1.78)$$

т. е. при  $t \rightarrow \infty$  дисперсия, как и среднее, ведет себя линейно. Эта формула описывает поведение дисперсии в области  $\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} \gg \gamma$  со среднеквадратичным отклонением  $10^{-7} - 10^{-4}$ .

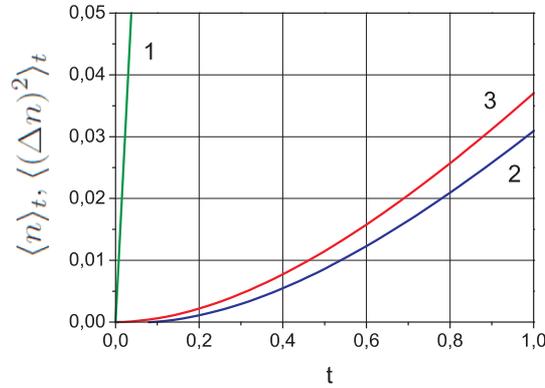


Рис. 12: Зависимость среднего числа фотоиспусканий 1) и его дисперсии с обратной связью 2) и без нее 3) от времени при  $\Delta/\gamma = 1$ ,  $\Omega/\gamma = 25$ .

Полученные характерные зависимости дисперсии и среднего от времени представлены на Рис. 12. Параметры кривых на рисунке: среднее – коэффициент наклона 1.332. Обратная связь слегка уменьшает среднее число фотоиспусканий в единицу времени, однако этот эффект проявляется лишь в пятом знаке после запятой, что не может быть отражено в масштабе Рис. 12. Дисперсия без обратной связи –  $a = 0.052$ ,  $b = 1.466$ ,  $c = 0.077$ . Дисперсия с обратной связью –  $a = 0.049$ ,  $b = 1.502$ ,  $c = 0.069$ .

Главным является неожиданно яркий феномен антигруппировки, вносимый появлением второго атома. Отношение

$$A = \left. \frac{\langle (\Delta n)^2 \rangle_t}{\langle n \rangle_t} \right|_{t \rightarrow \infty} \quad (1.79)$$

асимптотики наклона кривой дисперсии и среднего числа фотоотсчетов, являющейся естественной количественной характеристикой антигруппировки, оказывается, соответственно при отсутствии и наличии обратной связи,  $A = 0.058$  и  $A_f = 0.052$ .

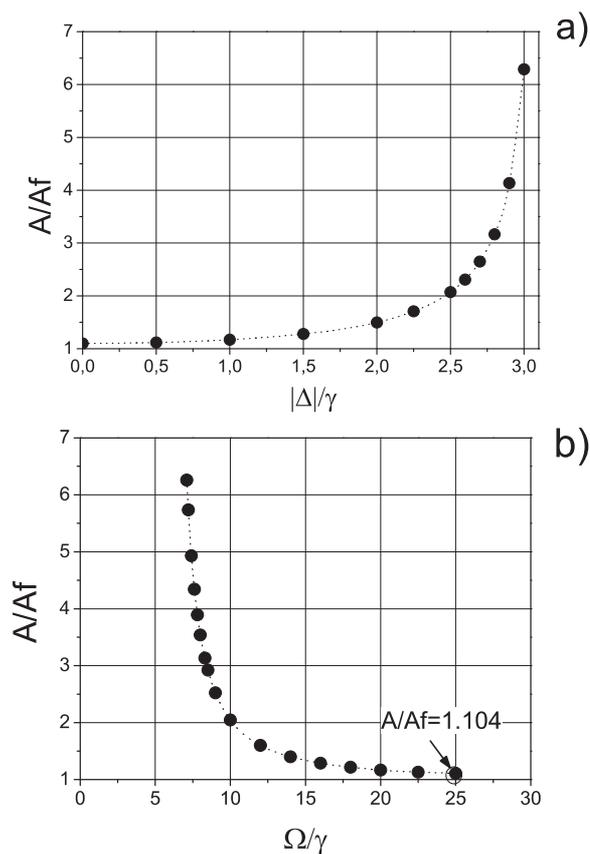


Рис. 13: Зависимость отношения коэффициентов антигруппировки от отстройки *a)* и частоты Раби *b)* (в единицах  $\gamma$ ). Отношение коэффициентов антигруппировки не зависит от знака отстройки. *a)*  $\Omega/\gamma = 20$ ; *b)*  $\Delta/\gamma = 1$ . Точка  $\Omega/\gamma = 25$  отвечает значениям параметров на Рис. 12.

Обратная связь практически не меняет среднего значения числа фотоиспусканий, но оказывает значительное влияние на дисперсию, т. е. степень антигруппировки отличается в случае обратной связи. Зависимость изменения отношения степени антигруппировки без обратной связи  $A$  к степени антигруппировки в присутствии обратной связи  $A_f$  с параметрами задачи представлена на Рис. 13. Как видно из приведенных зависимостей, обратная связь драматически увеличивает степень антигруппировки с удалением от резонанса. Также, эффект усиливается с уменьшением  $\Omega$ , т. е. в менее сильных полях.

## 1.5 Спектроскопия $\Lambda$ -системы с использованием обратной связи

Рассмотрение пары атомов во внешнем поле с обратной связью является первым шагом на пути к описанию многоатомных систем. Однако, уже в рассмотренном простейшем случае видны основные отличия от случая одного атома. Дальнейшее увеличение числа атомов с сохранением их двухуровневой структуры хотя и представляет интерес с точки зрения полноты рассмотрения, однако вряд ли способно привести к таким же ярким эффектам из-за относительно простой физики явлений, наблюдаемых в двухуровневых системах. Вместо того, чтобы идти по пути простого увеличения числа элементарных излучателей, обратимся к рассмотрению систем с более сложной структурой уровней. Следующей по сложности за моделью двухуровневого атома является популярная в спектроскопии трехуровневая система, причем наиболее интересной физикой обладает т.н.  $\Lambda$ -конфигурация, представленная на Рис 14. Уровень  $|0\rangle$  выбран за точку отсчета энергии. Система содержит два разрешенных оптических дипольных перехода, с каждым из которых взаимодействует свое внешнее классическое электромагнитное поле. Некогерентным обменом населенностей между уровнями  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  будем пренебрегать. В спектроскопии пробного поля обычно подразумевается наличие газа трехуровневых атомов, и переходы между уровнями  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  происходят в результате межатомных столкновений. Мы же будем рассматривать модельную задачу о единичной трехуровневой системе, поэтому этот канал распада в указанной постановке отсутствует.

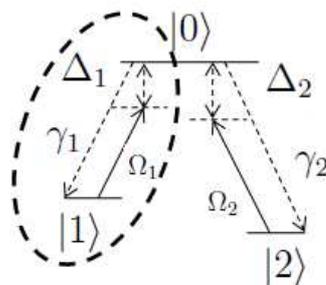


Рис. 14:  $\Lambda$ -схема спектроскопии пробного поля. Внешнее поле на переходе 0-1 управляется цепью обратной связи.

Кинетическое уравнение, управляющее эволюцией системы в отсутствие об-

ратной связи, записывается по аналогии с (1.20):

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -i[\hat{H}_{tot}, \hat{\rho}] + \sum_{i=1,2} \left( \hat{L}_i \hat{\rho} \hat{L}_i^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i, \hat{\rho} \} \right), \quad (1.80)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L}_i &= \sqrt{\gamma_i} |i\rangle \langle 0|; \quad i = 1, 2, \\ \hat{H}_{tot} &= \hat{H}_\Lambda + \hat{V}_1 + \hat{V}_2, \\ \hat{H}_\Lambda &= \sum_{i=1,2} \Delta_i |i\rangle \langle i|, \\ \hat{V}_i &= \Omega_i |0\rangle \langle i| + h.c. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Здесь  $\gamma_i$  – скорости спонтанного испускания из состояния  $|0\rangle$  в состояния  $|i\rangle$ ,  $\Delta_i$  и  $\Omega_i$  – соответствующие полевые отстройки и частоты Раби для каждого из переходов. Операторы  $\hat{L}_{1,2}$  описывают спонтанный распад уровня  $|0\rangle$  в  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ . Гамильтониан записан в представлении вращающейся волны по аналогии с (1.20). Наиболее ярким феноменом, возникающим в  $\Lambda$ -системе, является т.н. когерентное пленение населенностей (КПН) [86, 87, 88]. Суть его заключается в следующем. В случае равных отстроек внешних полей ( $\Delta_1 = \Delta_2$ ) система после очередного фотоиспускания оказывается в т.н. ‘темном’ состоянии  $|\Psi_{dark}\rangle$ , не взаимодействующем с полем и являющемся определенной суперпозицией основных состояний  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ . По аналогии можно ввести также и ортогональное ему ‘светлое’ состояние  $|\Psi_{bright}\rangle$ , из которого система быстрее всего возбуждается в состояние  $|0\rangle$ . В выбранном базисе  $\{|i\rangle\}_{i=0,1,2}$  эти состояния имеют следующий известный вид:

$$\begin{aligned} |\Psi_{dark}\rangle &= \frac{\Omega_2 |1\rangle - \Omega_1 |2\rangle}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}, \\ |\Psi_{bright}\rangle &= \frac{\Omega_1 |1\rangle + \Omega_2 |2\rangle}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Как известно, реальные  $\Lambda$ -системы всегда являются частью более сложной системы уровней, к примеру, перехода  $J = 1 \rightarrow J = 1$ , так что состояния  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  принадлежат к разным системам магнитных подуровней. В этом случае спонтанные фотоны, испущенные с переходов из  $|0\rangle$  в  $|1\rangle$  и из  $|0\rangle$  в  $|2\rangle$  в направлении волновых векторов внешних полей имеют ортогональные круговые

поляризации. Таким образом, эволюция (1.80) реализуется при детектировании спонтанных фотонов в базисе ортогональных круговых поляризаций. Однако, фоторегистрацию можно осуществлять и в базе двух произвольных ортогональных эллиптических поляризаций. Далее для простоты будем рассматривать одномерный случай фотоиспускания вдоль волнового вектора, в котором реализация такого нестандартного фотодетектирования может быть осуществлена при помощи подходящего поворота поляризационного делителя пучка (Рис. 15).

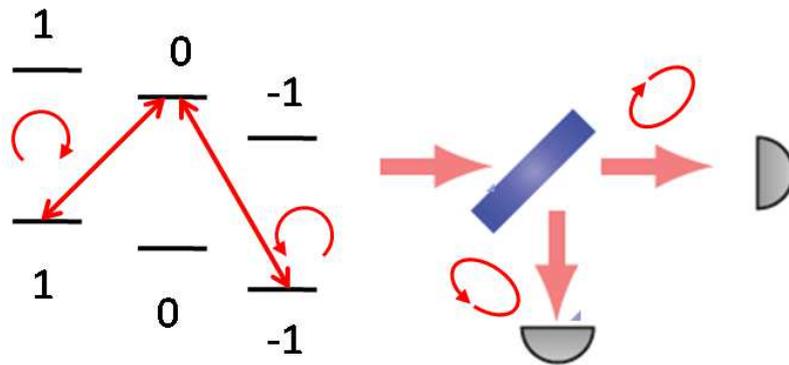


Рис. 15: К физической реализации нетривиального распутывания в одномерном случае.

Эллиптическая поляризация на языке векторов состояний может быть представлена в виде суперпозиции состояний некоторого фиксированного ортонормированного поляризационного базиса. Поэтому в кинетическом уравнении такой модифицированный процесс фотодетектирования может быть отражен путем введения набора новых операторов

$$\begin{aligned}\hat{L}_+ &= \alpha \hat{L}_1 + \beta \hat{L}_2, \\ \hat{L}_- &= -\beta^* \hat{L}_1 + \alpha^* \hat{L}_2, \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 &= 1.\end{aligned}\tag{1.83}$$

Подобное преобразование соответствует иной физической интерпретации процесса фотодетектирования (в общем случае - произвольного вполне положительного преобразования квантового состояния) и называется альтернативным распутыванием квантовой операции [89]. Без ограничения общности в дальнейшем будем полагать один из параметров, задающих распутывание, действительным:

$\alpha \in \mathbb{R}$ . Как известно, решение уравнения (1.80) инвариантно относительно выбора распутывания (т.е. любого унитарного преобразования набора операторов Линдблада  $\hat{L}_i \rightarrow \sum_j u_{ij} \hat{L}_j$  [80]), что вполне закономерно – ведь количество информации, извлекаемой из системы (число фотонов), одинаково при любом распутывании. Однако, ситуация меняется в случае введения в систему обратной связи. Пусть событие фотодетектирования типа ‘+’, описываемое оператором  $\hat{L}_+$ , переключает фазу поля, взаимодействующего с переходом 0-1, в значение 0 (т.е. совпадающее с некоторой исходной фазой). Соответствующее состояние цепи обратной связи будем также для удобства обозначать индексом (+). Событие же, описываемое оператором  $\hat{L}_-$ , переключает фазу поля в состояние  $\pi$ , а система обратной связи принимает состояние (-). Соответствующая система кинетических уравнений на гибридные статистические операторы принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}^{(+)} &= -\imath [\hat{H}_{tot}^{(+)}, \hat{\rho}^{(+)}] + \hat{L}_+(\hat{\rho}^{(+)} + \hat{\rho}^{(-)}) \hat{L}_+^\dagger - \frac{1}{2} \sum_{\sigma=+,-} \{ \hat{L}_\sigma^\dagger \hat{L}_\sigma, \hat{\rho}^{(+)} \}, \\ \frac{d}{dt} \hat{\rho}^{(-)} &= -\imath [\hat{H}_{tot}^{(-)}, \hat{\rho}^{(-)}] + \hat{L}_-(\hat{\rho}^{(+)} + \hat{\rho}^{(-)}) \hat{L}_-^\dagger - \frac{1}{2} \sum_{\sigma=+,-} \{ \hat{L}_\sigma^\dagger \hat{L}_\sigma, \hat{\rho}^{(-)} \}. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Структура ‘сэндвичных’ слагаемых отражает условие неизменности классического параметра (и фазы поля) при идущих подряд регистрациях событий одного типа. Поскольку обратная связь управляет фазой поля лишь на одном из переходов, то гамильтонианы  $\hat{H}_{tot}^{(\pm)}$  имеют вид

$$\hat{H}_{tot}^{(\pm)} = \hat{H}_\Lambda \pm \hat{V}_1 + \hat{V}_2. \quad (1.85)$$

Из (1.84) уже следует, что их решение чувствительно к выбору распутывания, причем это утверждение справедливо не только для индивидуальных гибридных плотностей  $\hat{\rho}^{(\pm)}$ , но и для истинного статистического оператора системы, являющегося их суммой. Это видно, если просуммировать оба уравнения в (1.84).

Нас будет интересовать, как меняется явление явление КПН при введении в систему обратной связи. Для этого необходимо найти стационарное решение (1.84). В самом общем виде оно записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\rho_{00}^{(+)} &= \frac{4}{D} \cdot (\Delta_1 - \Delta_2)^2 \Omega_1^2 \Omega_2^2 (\alpha^2 \gamma_1 + |\beta|^2 \gamma_2), \\
\rho_{11}^{(+)} &= \frac{\Omega_2^2}{D} [4|\beta|^2 \gamma_2 \Omega_1^2 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + 4\alpha^2 \gamma_1 (\Delta_1 - \Delta_2)^2 (\Delta_1^2 + \Omega_1^2) + \\
&4\alpha \Omega_1 \Omega_2 \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} (Im\beta \cdot (\gamma_1 + \gamma_2) (\Delta_1 - \Delta_2) - 2Re\beta \cdot (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Delta_1 (\Delta_2 - \Delta_1))) + \\
&4\alpha^2 \gamma_1 \Omega_2^2 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + 2\Delta_1 (\Delta_2 - \Delta_1)) + \alpha^2 \gamma_1 (\gamma_1 + \gamma_2)^2 (\Delta_1 - \Delta_2)^2], \\
\rho_{01}^{(+)} &= \frac{2}{D} (\Delta_1 - \Delta_2) \Omega_1 \Omega_2^2 [\alpha^2 \gamma_1 (\gamma_1 + \gamma_2) (\Delta_1 - \Delta_2) - 2(\alpha^2 \gamma_1 \Omega_2^2 + |\beta|^2 \gamma_2 \Omega_1^2) + \\
&2\alpha^2 \gamma_1 \Delta_1 (\Delta_1 - \Delta_2) + 4\alpha Re\beta \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \Omega_1 \Omega_2], \\
\rho_{12}^{(+)} &= -\frac{2\Omega_1 \Omega_2}{D} [-2\alpha \Omega_1 \Omega_2 \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} (2Re\beta (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \imath \beta (\gamma_1 + \gamma_2) (\Delta_1 - \Delta_2)) + \\
&2\alpha^2 \Omega_2^2 \gamma_1 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Delta_1 (\Delta_2 - \Delta_1)) + 2|\beta|^2 \Omega_1^2 \gamma_2 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Delta_2 (\Delta_1 - \Delta_2)) + \\
&\imath (\gamma_1 + \gamma_2) (\Delta_1 - \Delta_2) (\alpha^2 \Omega_2^2 \gamma_1 + |\beta|^2 \Omega_1^2 \gamma_2)], \\
D \cdot \rho_{00,11,22,02}^{(-)} &= (D \cdot \rho_{00,11,22,02}^{(+)}) \Big|_{\alpha^2 \leftrightarrow |\beta|^2}; \quad D \cdot \rho_{22,02}^{(\sigma)} = (D \cdot \rho_{11,01}^{(\sigma)}) \Big|_{1 \leftrightarrow 2; \alpha^2 \leftrightarrow |\beta|^2; \beta \rightarrow \beta^*}; \\
D \cdot \rho_{01,12}^{(-)} &= -(D \cdot \rho_{01,12}^{(+)}) \Big|_{\alpha^2 \leftrightarrow |\beta|^2},
\end{aligned} \tag{1.86}$$

где

$$\begin{aligned}
D &= 8\alpha \Omega_1 \Omega_2 \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \cdot [Im\beta \cdot (\Delta_1 - \Delta_2) (\gamma_1 + \gamma_2) (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - \\
&2Re\beta \cdot ((\Delta_1 - \Delta_2) \cdot (\Delta_2 \Omega_1^2 - \Delta_1 \Omega_2^2) + (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^2)] + \\
&(\alpha^6 + |\beta|^6 + 3\alpha^2 |\beta|^2) \cdot (\gamma_1 + \gamma_2)^2 \cdot (\Delta_1 - \Delta_2)^2 \cdot (\gamma_1 \Omega_2^2 + \gamma_2 \Omega_1^2) + \\
&4\gamma_1 \Omega_2^2 \cdot [(\Delta_2 - \Delta_1) \Delta_1 + \Omega_2^2]^2 + 4\gamma_2 \Omega_1^2 \cdot [(\Delta_1 - \Delta_2) \Delta_2 + \Omega_1^2]^2 + \\
&4\Omega_1^2 \Omega_2^2 [(\gamma_1 + 2\gamma_2) \Omega_1^2 + (\gamma_2 + 2\gamma_1) \Omega_2^2 + 2(\gamma_1 + \gamma_2) (\Delta_1 - \Delta_2)^2].
\end{aligned} \tag{1.87}$$

Здесь также принято, что  $\Omega_{1,2} \in \mathbb{R}$ . Подстановка  $\alpha^2 \leftrightarrow |\beta|^2$  означает, что заменяются только члены, квадратичные по  $\alpha$  и  $\beta$ .

Стационарное решение (1.86) находилось без введения дополнительных предположений относительно параметров задачи. Однако, можно показать, что оно не работает в ситуации  $\Delta_1 = \Delta_2$ . Поскольку в присутствии обратной связи имеют место два возможных значения фазы поля на переходе 0-1, то, соответственно, существуют и два типа темных и светлых состояний:

$$\begin{aligned}
|\Psi_{dark}^{(\pm)}\rangle &= \frac{\Omega_2|1\rangle \mp \Omega_1|2\rangle}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}, \\
|\Psi_{bright}^{(\pm)}\rangle &= \frac{\pm\Omega_1|1\rangle + \Omega_2|2\rangle}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}},
\end{aligned} \tag{1.88}$$

причем стационарное состояние системы имеет вид:

$$\begin{aligned}
p_+^{(st)} &= \frac{|\beta|^2\gamma_2\Omega_1^2 + \alpha^2\gamma_1\Omega_2^2 - 2\Omega_1\Omega_2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\alpha\text{Re}\beta}{\gamma_2\Omega_1^2 + \gamma_1\Omega_2^2 - 4\Omega_1\Omega_2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\alpha\text{Re}\beta}, \\
p_-^{(st)} &= \frac{\alpha^2\gamma_2\Omega_1^2 + |\beta|^2\gamma_1\Omega_2^2 - 2\Omega_1\Omega_2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\alpha\text{Re}\beta}{\gamma_2\Omega_1^2 + \gamma_1\Omega_2^2 - 4\Omega_1\Omega_2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\alpha\text{Re}\beta}, \\
\hat{\rho}_{st}^{(\sigma)} &= p_\sigma^{(st)}|\Psi_{dark}^{(\sigma)}\rangle\langle\Psi_{dark}^{(\sigma)}|.
\end{aligned} \tag{1.89}$$

Похожая ситуация с появлением двух типов ‘темных’ состояний возникает при рассмотрении КПН в системах с вырожденными энергетическими уровнями [90]. Однако, в нашем случае тип темного состояния скоррелирован с состоянием системы обратной связи, которая в нашем рассмотрении является классической. Именно поэтому стационарное состояние представляет собой некогерентную смесь различных темных состояний, с весами, зависящими от начального состояния трехуровневой системы и фазы внешнего поля. Подобная зависимость имеет место и в случае КПН вырожденных систем.

Стоит отметить, что в реальной экспериментальной ситуации достижение точного в математическом смысле равенства отстроек невозможно. Поэтому стационарное решение (1.86) может считаться универсальным. В дальнейшем под случаем равных отстроек будет пониматься случай  $\Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ .

Рассмотрим подробнее свойства стационарного решения в указанном случае почти равных отстроек. Существуют выделенные соотношения параметров, при которых обратная связь фактически перестает действовать, т.е. система обратной связи замирает в одном из состояний с вероятностью, стремящейся к единице. Это происходит в следующих случаях:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\Omega_1\sqrt{\gamma_2}}{\Omega_2\sqrt{\gamma_1}} : \hat{\rho}^{(+)} = 0, \hat{\rho}^{(-)} = |\Psi_{dark}^{(-)}\rangle\langle\Psi_{dark}^{(-)}|, \\
\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\Omega_2\sqrt{\gamma_1}}{\Omega_1\sqrt{\gamma_2}} : \hat{\rho}^{(-)} = 0, \hat{\rho}^{(+)} = |\Psi_{dark}^{(+)}\rangle\langle\Psi_{dark}^{(+)}|.
\end{aligned} \tag{1.90}$$

Для объяснения этого факта необходимо проанализировать состояния, в которых оказывается атом после очередной фоторегистрации типа ‘+’ либо ‘-’:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{L}_\sigma \hat{\rho} \hat{L}_\sigma^\dagger}{\text{Tr} \hat{L}_\sigma \hat{\rho} \hat{L}_\sigma^\dagger} &= |\Psi_{post}^{(\sigma)}\rangle \langle \Psi_{post}^{(\sigma)}|, \\ |\Psi_{post}^{(+)}\rangle &= \frac{\alpha \sqrt{\gamma_1} |1\rangle + \beta \sqrt{\gamma_2} |2\rangle}{\sqrt{\alpha^2 \gamma_1 + |\beta|^2 \gamma_2}}, \\ |\Psi_{post}^{(-)}\rangle &= \frac{-\beta^* \sqrt{\gamma_1} |1\rangle + \alpha \sqrt{\gamma_2} |2\rangle}{\sqrt{\alpha^2 \gamma_2 + |\beta|^2 \gamma_1}}.\end{aligned}\quad (1.91)$$

Начнем с анализа первого случая из (1.90). После фоторегистрации ‘+’ - типа система оказывается в состоянии  $|\Psi_{post}^{(+)}\rangle$ , которое совпадает со светлым состоянием для (+)-конфигурации обратной связи:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\Omega_1 \sqrt{\gamma_2}}{\Omega_2 \sqrt{\gamma_1}} : |\Psi_{post}^{(+)}\rangle = |\Psi_{bright}^{(+)}\rangle, \quad (1.92)$$

из которого система быстро возбуждается в верхнее состояние  $|0\rangle$ . Т.о., система в среднем проводит мало времени в (+)-конфигурации. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для второго случая в (1.90):

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\Omega_2 \sqrt{\gamma_1}}{\Omega_1 \sqrt{\gamma_2}} : |\Psi_{post}^{(-)}\rangle = |\Psi_{bright}^{(-)}\rangle. \quad (1.93)$$

По определению, ‘темное’ состояние системы не взаимодействует с внешним полем. Поэтому, казалось бы, для того, чтобы прекратить переключения фазы, зафиксировав систему обратной связи в определенном состоянии, должно быть достаточно, чтобы система после фоторегистрации соответствующего типа оказывалась в состоянии, являющемся ‘темным’ для новой фазы поля. Это происходит при следующих соотношениях между параметрами распутывания:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} &= -\frac{\Omega_2 \sqrt{\gamma_2}}{\Omega_1 \sqrt{\gamma_1}} : |\Psi_{post}^{(+)}\rangle = |\Psi_{dark}^{(+)}\rangle, \\ \frac{\alpha}{\beta} &= -\frac{\Omega_1 \sqrt{\gamma_1}}{\Omega_2 \sqrt{\gamma_2}} : |\Psi_{post}^{(-)}\rangle = |\Psi_{dark}^{(-)}\rangle.\end{aligned}\quad (1.94)$$

Однако, как следует из (1.89), данное соотношение не создает значительной разницы между вероятностями нахождения системы обратной связи в состояниях (+) либо (-). Причина заключается в следующем. В первом случае из (1.94)

состояние  $|\Psi_{post}^{(-)}\rangle$  имеет вид  $|\Psi_{post}^{(-)}\rangle \propto \Omega_1\gamma_1|1\rangle + \Omega_2\gamma_2|2\rangle$ . Данное состояние имеет ненулевую когерентную примесь состояния  $|\Psi_{dark}^{(-)}\rangle$ . Поэтому система может оказаться в состоянии  $|\Psi_{dark}^{(-)}\rangle$  после любой фоторегистрации ‘-’ -типа.

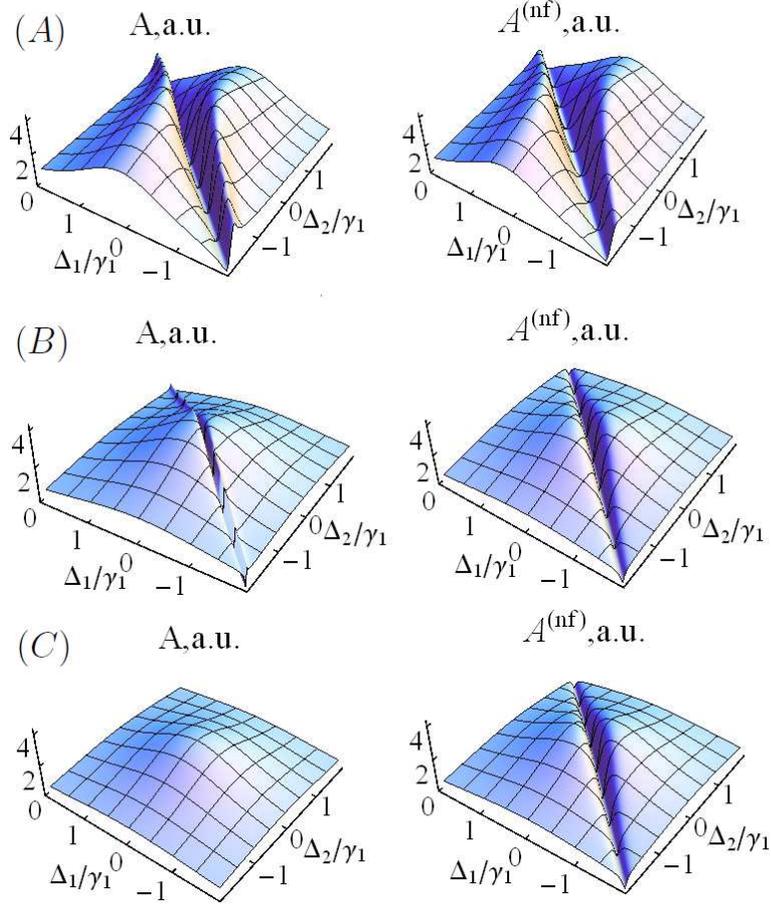


Рис. 16: Работа поля в единицу времени с обратной связью (слева) и без нее (справа). На всех графиках  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2$ . Остальные параметры системы выбраны следующим образом: (A)  $\Omega_1 = 0.25\gamma_1$ ,  $\Omega_2 = 0.67\gamma_1$ ; (B)  $\Omega_1 = 0.25\gamma_1$ ,  $\Omega_2 = 0.3\gamma_1$ ; (C)  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.25\gamma_1$ .

В эксперименте явление КПН проявляется в виде т.н. темных резонансов [87, 88] - провалов в графиках зависимостей работ полей как функций отстроек, наблюдающихся вблизи  $\Delta_1 = \Delta_2$ . Известное выражение для работы поля в единицу времени может быть найдено в [91]:

$$A_i^{(n.f)} \sim -iTr \left( [|i\rangle\langle i|, \hat{D}_i] E_i \hat{\rho}_{st} \right) \sim Re(i\Omega_i \rho_{0i}). \quad (1.95)$$

Здесь  $\rho_{01}$  и  $\rho_{02}$  - матричные элементы стационарного решения (1.80),  $E_i$  - амплитуды внешних полей,  $\hat{D}_i = d_i|0\rangle\langle i| + h.c.$  - операторы дипольных момен-

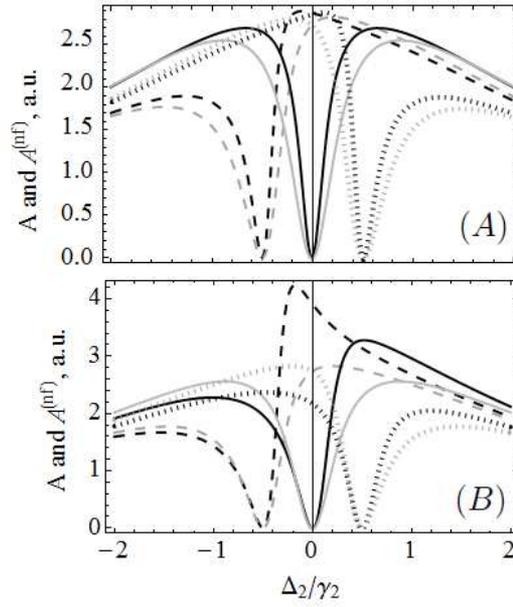


Рис. 17: Работа полей в единицу времени в зависимости от одной из отстроек ( $\Delta_2$ ) при  $\beta = \alpha$  (A) и  $\beta = \alpha e^{2\pi/3}$  (B). На всех графиках  $\Omega_1 = 1/5\gamma_1$ ,  $\Omega_2 = 1/2\gamma_1$ ,  $\gamma_2 = \gamma_1$ . Различные кривые соответствуют разным значениям  $\Delta_1$ : 0 (сплошная линия),  $-1/2\gamma_1$  (пунктир) и  $1/2\gamma_1$  (точки). Кривые на графике (B) для случая обратной связи демонстрируют асимметрию по отношению к изменению знака  $\Delta_1$ , что отличается от случая без обратной связи.

тов переходов  $0 - i$ . В присутствии обратной связи выражения для работ полей существенно модифицируются:

$$\begin{aligned}
 A_1 &\sim \text{Re}(i\Omega_1(\rho_{01}^{(+)} - \rho_{01}^{(-)})), \\
 A_2 &\sim \text{Re}(i\Omega_2(\rho_{02}^{(+)} + \rho_{02}^{(-)})), \\
 A_1/\gamma_1 = A_2/\gamma_2 &\sim \frac{2(\Delta_1 - \Delta_2)^2}{D} \cdot \Omega_1^2 \Omega_2^2 (\gamma_1 + \gamma_2).
 \end{aligned} \tag{1.96}$$

Последнее соотношение между величинами работ следует из стационарного решения (1.86). Работы полей пропорциональны, как и в случае без обратной связи, а значит, достаточно исследовать лишь нормированную величину  $A = A_1/\gamma_1 = A_2/\gamma_2$ . Ее зависимости от полевых отстроек представлены на Рис. 16 для случаев с обратной связью и без нее. Как видно, введение обратной связи дает возможность управления шириной ‘темного’ резонанса, меняя параметры распутывания операции фотодетектирования. Кроме того, детальный анализ стационарного решения (1.86) показывает, что при выполнении следую-

щего соотношения между параметрами задачи

$$\frac{\Omega_1 \sqrt{\gamma_2}}{\Omega_2 \sqrt{\gamma_1}} = 1; \alpha = \beta = 1/\sqrt{2}, \quad (1.97)$$

‘темный’ резонанс исчезает при  $\Delta_1 = \Delta_2$ , или становится бесконечно узким при  $\Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ . Различные стадии этого сужения представлены на Рис. 16. В последней из них выполняется равенство  $|\Psi_{post}^{(\pm)}\rangle = |\Psi_{bright}^{(\pm)}\rangle$ . Поэтому КПН в этой ситуации невозможно. Кроме того, поскольку в области параметров, близкой к (1.97),  $|\Psi_{post}^{(\pm)}\rangle$  содержит лишь малую примесь  $|\Psi_{dark}^{(\pm)}\rangle$ , то резонанс КПН имеет меньшую ширину, чем в случае без обратной связи.

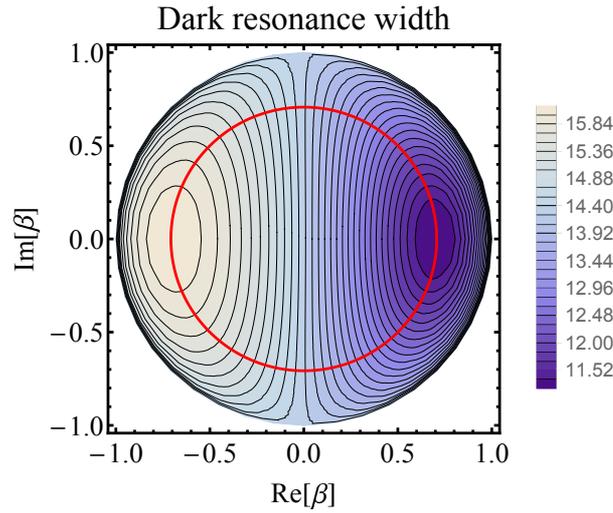


Рис. 18: Зависимость ширины темного резонанса (в единицах  $\gamma_1$ ) от комплексного параметра распутывания  $\beta$  при  $\Omega_1 = \gamma_1, \Omega_2 = 4\gamma_1, \gamma_2 = 2\gamma_1, \Delta_1 = 0$ . Большие значения ширины соответствуют представленные более светлым цветом. Красный круг соответствует значениям  $\alpha = |\beta| = 1/\sqrt{2}$ .

Рассмотрим теперь, как форма ‘темных’ резонансов зависит от фазы комплексного параметра распутывания  $\beta$ . На Рис. 17 представлены сечения трехмерных графиков, подобных представленным на Рис. 16, когда одна из отстроек фиксирована (была выбрана отстройка  $\Delta_1$ , но результаты остаются неизменными, если зафиксировать другую отстройку). Можно отметить, что симметрия провала относительно прямой  $\Delta_1 = \Delta_2$  на плоскости отстроек сохраняется лишь при  $\arg \beta = 0, \pi$ . Зависимость ширины ‘темного’ резонанса от выбора распутывания представлена на Рис. 18. Видно, что указанная ширина достигает минимума в точке  $\alpha = \beta$  и максимума в точке  $\alpha = -\beta$ .

По смыслу явления КПН, ‘темные резонансы’ становятся тем уже, чем ближе состояния, в которых оказывается система после фотоиспускания, к соответствующим ‘ярким’ состояниям. Действительно, вычисления показывают, что минимум и максимум ширины резонанса совпадают с минимумом и максимумом величины  $|\langle \Psi_{post}^{(\sigma)} | \Psi_{bright}^{(\sigma)} \rangle|^2$ . Этим и объясняется поведение функции на Рис. 18. Различия по величине между максимумом и минимумом ширины также весьма значительны, что позволяет утверждать о возможности эффективного управления шириной ‘темного’ резонанса путем варьирования параметров распутывания  $\alpha$  и  $\beta$ .

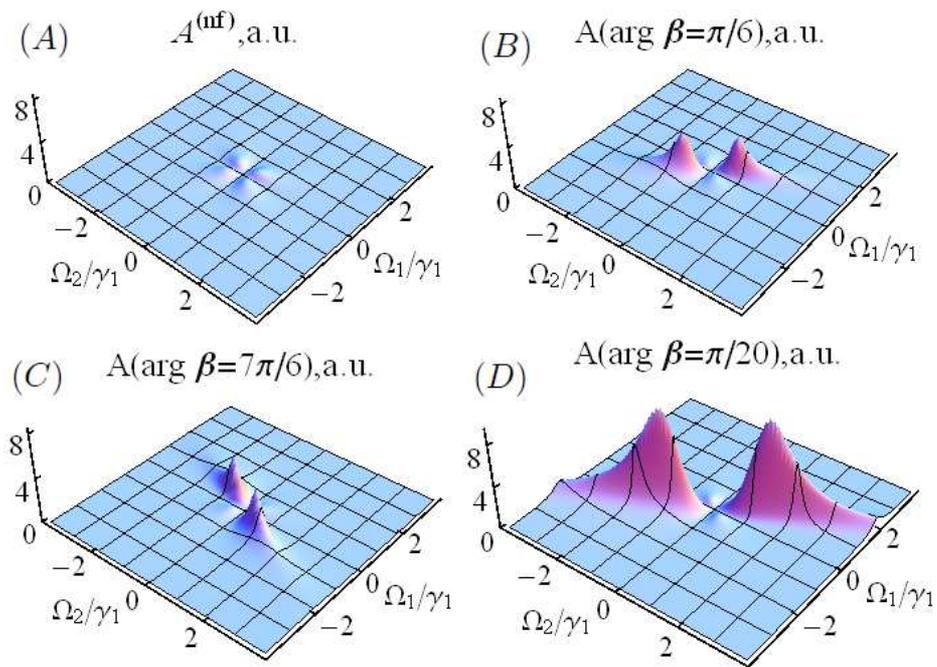


Рис. 19: Работа поля в зависимости от частот Раби в случае без обратной связи (A) и с обратной связью (B,C,D). Значения отстроек выбраны вблизи дна темного резонанса:  $\Delta_1 = 0$ ,  $\Delta_2 = -1/10\gamma_1$ . На всех графиках  $\gamma_2 = 4\gamma_1$ . Параметры распутывания:  $\beta = \alpha e^{i\pi/6}$  (B),  $\beta = \alpha e^{7i\pi/6}$  (C) и  $\beta = \alpha e^{i\pi/20}$  (D).

Введение обратной связи в систему приводит к необычной зависимости работ полей от частот Раби (Рис. 19). Рассмотрим поведение работ полей с изменением  $\Omega_{1,2}$ . При фиксированной  $\Omega_1$  и малой  $\Omega_2$  величина работы также мала, но увеличивается с ростом  $\Omega_2$ . Наиболее резкий рост наблюдается, если значение выбрано так, что система изначально находится вне ‘темного’ резонанса. Минимальная ширина резонанса согласно (1.97) наблюдается при  $\Omega_2 = \Omega_1 \sqrt{\gamma_2/\gamma_1}$ . Дальнейшее увеличение  $\Omega_2$  выше этого значения приведет к тому, что разность

отстройка  $\Delta_1 - \Delta_2$  окажется вблизи дна уширяющегося ‘темного’ резонанса, поэтому работа снова уменьшится.

Данный эффект можно наблюдать на Рис. 19В в виде двух симметричных максимумов. Остальные два максимума объясняются аналогично, если заменить  $\beta$  на  $-\beta$ , при этом минимальная ширина резонанса будет наблюдаться при  $\Omega_2 = -\Omega_1\sqrt{\gamma_2/\gamma_1}$ . Более интересная ситуация наблюдается при  $\alpha = \pm\beta$ . В этом случае изменение частот Раби вдоль прямых  $\Omega_2\sqrt{\gamma_1} = \pm\Omega_1\sqrt{\gamma_2}$  уже не будет удалять систему от условия минимальной ширины резонанса. В результате возникают узкие протяженные ‘стены’, зачатки которых наблюдаются на Рис. 19D. Подобные узкие структуры, как и резкая асимметрия значений работы при положительном и отрицательном знаках частот Раби, являются принципиальным отличием задачи с обратной связью от традиционной спектроскопии пробного поля.

## Глава 2

# Интерферометрическая обратная связь в атомарном бозе-конденсате в двухъямном потенциале

В предыдущих главах были исследованы применения обратной связи на основе переключений фазы к отдельным квантовым излучателям. При этом предполагалось, что излучатели неподвижны и хорошо локализованы в пространстве, например, находятся в оптической ловушке. Рассмотрение большего числа томов по образу и подобию того, как это было сделано в предыдущих главах, наталкивается на существенные вычислительные трудности (даже для пары двухуровневых атомов). Однако, имеется важный класс многоатомных систем, допускающих рассмотрение с использованием одночастичных состояний. Это атомарные конденсаты Бозе-Эйнштейна (бозе-конденсаты). Данные системы обладают макроскопической волновой функцией, что позволяет рассматривать их как цельный объект. В связи с развитием экспериментальных технологий приготовления атомарных бозе-конденсатов приобретают актуальность вопросы управления их состоянием. Использование в этих целях обратной связи представляется весьма эффективным методом. Для организации обратной связи требуется способ извлечения информации из системы. В рассмотренных в предыдущих главах задачах с одиночными атомами таким способом была фоторегистрация спонтанных фотонов. Для конденсата наиболее естественным способом исследования его внутреннего состояния является метод фазо-контрастного зондирования (*phase-contrast imaging*), заключающийся в освещении конденсата излучением, далеко отстроенным от всех атомных резонансов. Излучение в этом случае не поглощается (и поэтому данный метод измерения не разрушает конденсат), но приобретает фазовый сдвиг, несущий информацию о состоянии освещенной фракции конденсата. Действие обратной связи как правило заключается в модификации

потенциала, формирующего ловушку, например, с целью достижения лучшей степени охлаждения [92, 93, 94, 95, 96, 97].

Особый интерес представляет бозе-конденсат, локализованный в двухъямном потенциале. С одной стороны, данная система может быть описана относительно простыми методами, с другой - позволяет исследовать такое фундаментальное физическое явление, как квантовое туннелирование. В двухъямном потенциале оно может наблюдаться на макроскопических масштабах [98]. Мы рассмотрим вариант управления атомарным конденсатом, приготовленным в таком потенциале, который также основан на методе фазо-контрастного зондирования, однако ключевым элементом в рассматриваемой схеме является интерферометр Маха-Цандера. Конденсат расположен на пути светового пучка, распространяющегося в одном из плеч интерферометра, так что освещенной оказывается только одна из двух потенциальных ям. Излучение, взаимодействуя с атомами конденсата нерезонансным образом, приобретает фазовый сдвиг, пропорциональный числу атомов в яме. Разностный сигнал на выходе из интерферометра используется для изменения оптического потенциала ловушки.

Поскольку основной задачей работы является исследование механизмов обратной связи, для описания самого атомарного конденсата логично выбрать наиболее простую двухмодовую модель. Будем полагать, что все атомы занимают основные колебательные состояния находящихся рядом потенциальных ям  $A$  и  $B$ , имеющих глубины  $\omega_A$  и  $\omega_B$  (Рис. 20). Пусть яма  $A$  освещается пучком монохроматического когерентного излучения, достаточно далеко отстроенным от всех атомных переходов в конденсате. Ширина пучка выбрана сравнимой с линейным размером ловушки, так что все атомы в ней взаимодействуют с излучением. Туннелирование атомов через потенциальный барьер между ямами характеризуется параметром  $\lambda$  (в общем случае комплексным). Излучение при взаимодействии с конденсатом приобретает фазовый сдвиг и после прохождения через выходной делитель пучка регистрируется парой фотодетекторов.

Излучение в другом плече интерферометра подвергается фазовому сдвигу  $\beta$ , который может варьироваться. Система обратной связи переключает потенциал в одну из двух заранее заданных конфигураций, в зависимости от того, в каком из двух детекторов был зарегистрирован фотон. В реальном эксперименте данное изменение может быть осуществлено подходящим изменением полей дипольных

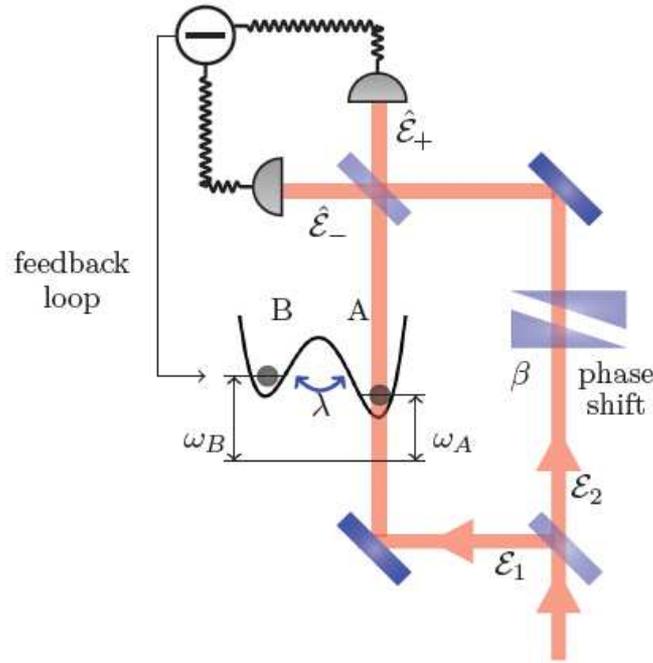


Рис. 20: Схема интерферометрического зондирования конденсата в двухъямном потенциале.

ловушек, создающих потенциальные ямы. В рамках двухмодового приближения конденсат характеризуется двумя парами бозонных операторов рождения и уничтожения:  $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$  для атомов в яме  $A$  и  $\hat{b}, \hat{b}^\dagger$  для атомов в яме  $B$ . Поскольку в общем случае можно также менять и высоту потенциального барьера, то для каждого состояния цепи обратной связи, которые мы будем обозначать  $(+)$  и  $(-)$ , имеем два различных гамильтониана:

$$\hat{H}^{(\pm)} = \omega_A^{(\pm)} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_B^{(\pm)} \hat{b}^\dagger \hat{b} + \lambda^{(\pm)} \hat{a}^\dagger \hat{b} + \lambda^{(\pm)*} \hat{b}^\dagger \hat{a}. \quad (2.1)$$

Изменение конфигурации потенциала происходит за некоторое конечное время  $\tau$ . С одной стороны, это время должно быть достаточно малым по сравнению со временем туннелирования  $|\lambda^{-1}|$ , а с другой стороны - переключения должны быть достаточно медленными по сравнению с характерным периодом эволюции атомов внутри ямы  $\omega_{osc}^{-1}$ . Первое условие гарантирует малое изменение системы за время изменения потенциала, так что систему можно анализировать в рамках марковских кинетических уравнений. Если нарушено второе условие, то атомы после переключения могут оказаться в возбужденных колебательных состояниях потенциальных ям, так что двухмодовое приближение становится неприменимым. Т.о., имеем следующие ограничения на время переключения потенциала:

$$|\lambda| \ll \tau^{-1} \ll \omega_{osc}. \quad (2.2)$$

Зондирующее поле, которое изначально подается на вход интерферометра, будем считать классическим. Однако, после взаимодействия с конденсатом фаза поля в левом плече интерферометра оказывается скоррелированной с числом атомов в яме  $A$ , и поэтому после такого взаимодействия амплитуда поля становится оператором, действующим на пространстве состояний конденсата. В случае сбалансированного делителя пучка на выходе из интерферометра имеем следующие (безразмерные) амплитуды полей, падающих на детекторы:

$$\hat{\mathcal{E}}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \mathcal{E}_1 \exp(i\varphi \hat{a}^\dagger \hat{a}) \pm \mathcal{E}_2 \exp(i\beta) \right), \quad (2.3)$$

где  $\varphi$  - фазовый сдвиг, вносимый единичным атомом. Такая модель предполагает однородность конденсата, а механизмом взаимодействия излучения с конденсатом является упругое рассеяние [99]. Поскольку основной целью данной Главы является исследование влияния обратной связи на конденсат, то для упрощения модели можно пренебречь возможными искажениями формы волнового фронта светового пучка, вызванными неоднородной структурой конденсата в потенциальной ловушке. Если входной делитель пучка в интерферометре Маха-Цандера также сбалансированный, то  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 1$ .

Введенные операторы  $\hat{\mathcal{E}}_{\pm}$  являются операторами Линдблада для гибридных кинетических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}^{(+)} &= -i[\hat{H}^{(+)}, \hat{\rho}^{(+)}] + \nu \hat{\mathcal{E}}_+(\hat{\rho}^{(+)} + \hat{\rho}^{(-)}) \hat{\mathcal{E}}_+^\dagger - \frac{\nu}{2} \{ \hat{\mathcal{E}}_+^\dagger \hat{\mathcal{E}}_+ + \hat{\mathcal{E}}_-^\dagger \hat{\mathcal{E}}_-, \hat{\rho}^{(+)} \}, \\ \frac{d}{dt} \hat{\rho}^{(-)} &= -i[\hat{H}^{(-)}, \hat{\rho}^{(-)}] + \nu \hat{\mathcal{E}}_-(\hat{\rho}^{(+)} + \hat{\rho}^{(-)}) \hat{\mathcal{E}}_-^\dagger - \frac{\nu}{2} \{ \hat{\mathcal{E}}_+^\dagger \hat{\mathcal{E}}_+ + \hat{\mathcal{E}}_-^\dagger \hat{\mathcal{E}}_-, \hat{\rho}^{(-)} \}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Введенный параметр  $\nu$  имеет размерность частоты и характеризует частоту фоторегистраций в выходных детекторах (он зависит как от интенсивности поля, так и от площади фотодетектора). Он определяет скорость декогеренции, т.е. ухода информации из системы (конденсата) в окружение (систему детекторов).

Отдельного комментария заслуживает смысл стационарного решения уравнений (2.4), поскольку даже в стационарном состоянии происходят переключения конфигураций потенциала под действием обратной связи. Помимо осцилляций

населенностей ям из-за перекрытия их волновых функций [100, 101], каждое (неадиабатичное) изменение потенциала ям также вызывает осцилляции [102]. Стационарные состояния  $\hat{\rho}_{st}^{(\pm)}$  возникают в результате усреднения по форме и периоду осцилляций, вызванных последним переключением потенциала.

Анализ показывает, что в случае сильной декогеренции  $\nu \gg |\lambda|, |\omega_A^{(\pm)} - \omega_B^{(\pm)}|$  действие обратной связи неэффективно. Это ожидаемый результат, поскольку обратная связь содержится в (2.4) в форме различных гамильтонианов  $\hat{H}^{(\pm)}$ . Если динамические члены малы по сравнению с кинетическими (структурой Линдблада), то эволюция системы мало отличается от таковой в отсутствие обратной связи. Поэтому в дальнейшем будет рассмотрен противоположный случай слабой декогеренции, т.е.  $\nu \ll |\lambda|, |\omega_A^{(\pm)} - \omega_B^{(\pm)}|$ .

Поскольку одна из частей уравнения (динамическая) доминирует над другой (кинетической), то естественно решать уравнения (2.4) в соответствующем естественном базисе. В данном случае это базис собственных состояний гамильтонианов (в случае сильной декогеренции естественным являлся бы базис, в котором структура Линдблада вырождается в обычные для балансного уравнения члены). Для каждой конфигурации потенциала имеется собственный базис:

$$\hat{H}^{(\sigma)} = \omega_1^{(\sigma)} \hat{c}_1^{(\sigma)\dagger} \hat{c}_1^{(\sigma)} + \omega_2^{(\sigma)} \hat{c}_2^{(\sigma)\dagger} \hat{c}_2^{(\sigma)}. \quad (2.5)$$

Здесь вместо бозонных мод, соответствующих нахождению атомов в яме  $A$  или  $B$ , введены новые бозонные моды  $1^{(\sigma)}$  и  $2^{(\sigma)}$  (здесь и далее  $\sigma = \pm$ ). Соответствующие им операторы рождения и уничтожения получаются из операторов исходных мод  $A$  и  $B$  унитарным преобразованием:

$$\begin{aligned} \hat{c}_1^{(\sigma)} &= \cos(\chi^{(\sigma)}) \hat{a} + e^{i\theta^{(\sigma)}} \sin(\chi^{(\sigma)}) \hat{b}, \\ \hat{c}_2^{(\sigma)} &= -e^{-i\theta^{(\sigma)}} \sin(\chi^{(\sigma)}) \hat{a} + \cos(\chi^{(\sigma)}) \hat{b}, \\ e^{i\theta^{(\sigma)}} &= \lambda^{(\sigma)} / |\lambda^{(\sigma)}|, \\ \tan(2\chi^{(\sigma)}) &= 2|\lambda^{(\sigma)}| / (\omega_A^{(\sigma)} - \omega_B^{(\sigma)}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Собственные частоты этих новых мод имеют вид

$$2\omega_{1,2}^{(\sigma)} = \omega_A^{(\sigma)} + \omega_B^{(\sigma)} + \sigma \sqrt{4|\lambda^{(\sigma)}|^2 + (\omega_A^{(\sigma)} - \omega_B^{(\sigma)})^2}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим случай, когда полное число атомов в конденсате фиксировано и равно  $N$ . Тогда в качестве базиса пространства состояний конденсата логично выбрать базис, являющийся прямым произведением базисов Фока новых мод:  $\{|n, N - n\rangle^{(\sigma)} \equiv |n\rangle_1^{(\sigma)} \otimes |N - n\rangle_2^{(\sigma)}, n = 0, \dots, N\}$ . Уравнения (2.4) теперь можно записать для статистических операторов  $\hat{\rho}_N^{(\sigma)}$ , характеризующих состояние системы *при условии* того, что полное число атомов равно  $N$  и последняя фото-регистрация относилась к типу  $\sigma$ . В базисе Фока они имеют вид

$$\hat{\rho}_{Nst}^{(\sigma)} = \sum_{n, n'=0}^N \rho_{Nst}^{(\sigma)}(n, n') |n, N - n\rangle^{(\sigma)} \langle n', N - n'|. \quad (2.8)$$

При получении системы рекуррентных соотношений на матричные элементы  $\rho_{Nst}^{(\sigma)}(n, n')$  можно воспользоваться соотношением  $|\omega_1^{(\sigma)} - \omega_2^{(\sigma)}| \gg \nu$  в приближении слабой декогеренции и пренебречь быстро осциллирующими членами вида  $\propto \exp[-i(\omega_1^{(\sigma)} - \omega_2^{(\sigma)})(n - n')t]$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_N^{(\sigma)}(n, n') &= -i(\omega_1^{(\sigma)} - \omega_2^{(\sigma)})(n - n') + 2\nu \rho_N^{(\sigma)}(n, n') + \\ &\nu \sum_k w_N^{(\sigma)}(n, n+k) w_N^{(\sigma)}(n', n'+k)^* \varrho_N^{(\sigma)}(n+k, n'+k) + \\ &\nu \sum_k z_N^{(\sigma)}(n, n+k) z_N^{(\sigma)}(n', n'+k)^* \varrho_N^{(-\sigma)}(n+k, n'+k). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_N^{(\sigma)}(n, n') &\doteq^{(\sigma)} \langle n, N - n | \hat{\mathcal{E}}_\sigma | n', N - n' \rangle^{(\sigma)}, \\ z_N^{(\sigma)}(n, n') &\doteq^{(\sigma)} \langle n, N - n | \hat{\mathcal{E}}_\sigma | n', N - n' \rangle^{(-\sigma)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Коэффициенты  $w_N^{(\pm)}(n, n')$  и  $z_N^{(\pm)}(n, n')$  выражаются через вспомогательную величину [103]

$$\begin{aligned} &{}^{(\sigma_1)} \langle n, N - n | \exp(i\varphi \hat{a}^\dagger \hat{a}) | n', N - n' \rangle^{(\sigma_2)} \doteq \\ &\sum_{j=0}^N \sum_{p=0}^{\min(j, n)} \sum_{q=0}^{\min(j, n')} \frac{j! (N - j)! C_n^p C_{N-n}^{j-p} C_{n'}^q C_{N-n'}^{j-q}}{\sqrt{n! n'! (N - n)! (N - n')!}} \times \\ &(\cos(\chi^{(\sigma_1)}))^{N+2p-n-j} (\cos(\chi^{(\sigma_2)}))^{N+2q-n'-j} \times \\ &(\sin(\chi^{(\sigma_1)}))^{j+n-2p} (\sin(\chi^{(\sigma_2)}))^{j+n'-2q} \times \\ &\exp [ij\varphi + i(n - j)\theta^{(\sigma_1)} + i(j - n')\theta^{(\sigma_2)} + i\pi(2j - p - q)], \end{aligned} \quad (2.11)$$

при вычислении которой в свою очередь были использованы результаты решения задачи о нормальном упорядочении мономов бозонных операторов [104], а именно

$$\hat{a}^{\dagger r} \hat{a}^s \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^l = \sum_{i=0}^{\min(k,s)} i! C_s^i C_k^i \hat{a}^{\dagger r+k-i} \hat{a}^{s+l-i}. \quad (2.12)$$

Статистические операторы  $\hat{\rho}_{Nst}^{(\sigma)}$  в выбранных базисах оказываются диагональными:

$$\hat{\rho}_{Nst}^{(\sigma)} = \sum_{n=0}^N \rho_{Nst}^{(\sigma)}(n) |n, N-n\rangle^{(\sigma)} \langle n, N-n|, \quad (2.13)$$

Вероятности  $\rho_{Nst}^{(\sigma)}(n)$  определяются из стационарного решения системы (2.9).

Основной эффект действия обратной связи в данной простой модели заключается в изменении распределений атомов по ямам. Эти распределения задаются диагональными элементами статистических операторов в базисе исходных мод  $A$  и  $B$   $p_{stN}^{(\pm)}(n_A) \doteq^{(\pm)} \langle n_A, N-n_A | \hat{\rho}_{Nst}^{(\pm)} | n_A, N-n_A \rangle^{(\pm)}$  и могут быть найдены по следующей формуле:

$$\begin{aligned} p_{stN}^{(\pm)}(n_A) &= \sum_{n=0}^N \rho_{Nst}^{(\pm)}(n) \frac{n_A!(N-n_A)!}{n!(N-n)!} \times \\ &\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in_A\alpha} \left( \cos(\chi^{(\pm)}) + e^{i(\alpha-\theta^{(\pm)})} \sin(\chi^{(\pm)}) \right)^n \times \right. \\ &\left. \left( \cos(\chi^{(\pm)}) e^{i\alpha} - \sin(\chi^{(\pm)}) e^{i\theta^{(\pm)}} \right)^{N-n} d\alpha \right|^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В реальном эксперименте процесс загрузки атомов в оптическую ловушку носит случайный характер. Соответственно, число атомов в потенциале также является случайной величиной. Пусть, подобно многим реальным случайным процессам, ее распределение может быть приближено распределением Пуассона  $p(N)$  с некоторым средним  $\bar{N}$ . Тогда средние заселенности ям даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
p_A^{(\sigma)}(n) &= \sum_{N \geq n} p_{Nst}^{(\sigma)}(n)p(N), \\
p_B^{(\sigma)}(n) &= \sum_{N \geq n} p_{Nst}^{(\sigma)}(N-n)p(N), \\
p_{A,B}(n) &= p_{A,B}^{(+)}(n) + p_{A,B}^{(-)}(n).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Здесь произведено суммирование по индексам состояния цепи обратной связи, поскольку нас интересуют средние значения наблюдаемых по истинному состоянию системы, а не взятому при какой-либо конкретной конфигурации потенциала.

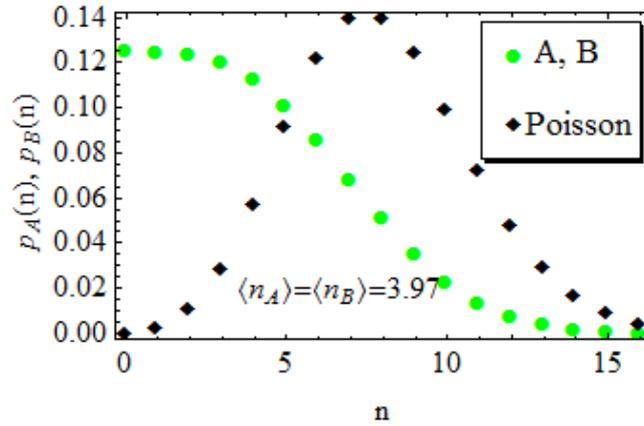


Рис. 21: Распределение атомов в ямах  $A$  и  $B$  без обратной связи при  $\varphi = 0.1$ ,  $\nu = 0.01|\lambda|$  в сравнении с распределением Пуассона с  $\bar{N} = 8$ .

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим простой в вычислении случай малого полного числа атомов  $\bar{N} = 8$  (результаты для больших  $\bar{N}$  не содержат качественных отличий). Даже в отсутствие обратной связи наличие зондирующего пучка создает корреляции между фазой поля и числом атомов в яме  $A$ , таким образом разрушая когерентность между различными состояниями с определенными числами атомов. Соответствующие графики представлены на Рис. 21 [103]. Как видно, распределения атомов по фоковским состояниям одинаковы для обеих ям. Данный результат справедлив для любых глубин ям  $\omega_{A,B}$ , параметров туннелирования  $\lambda$  и значений управляемого фазового сдвига  $\beta$ . Средние значения чисел атомов в ямах  $\langle n_{A,B} \rangle$  близки к  $\bar{N}/2$ , однако их дисперсии намного больше пуассоновской дисперсии полного числа атомов.

В рассматриваемой схеме существует несколько параметров, доступных для

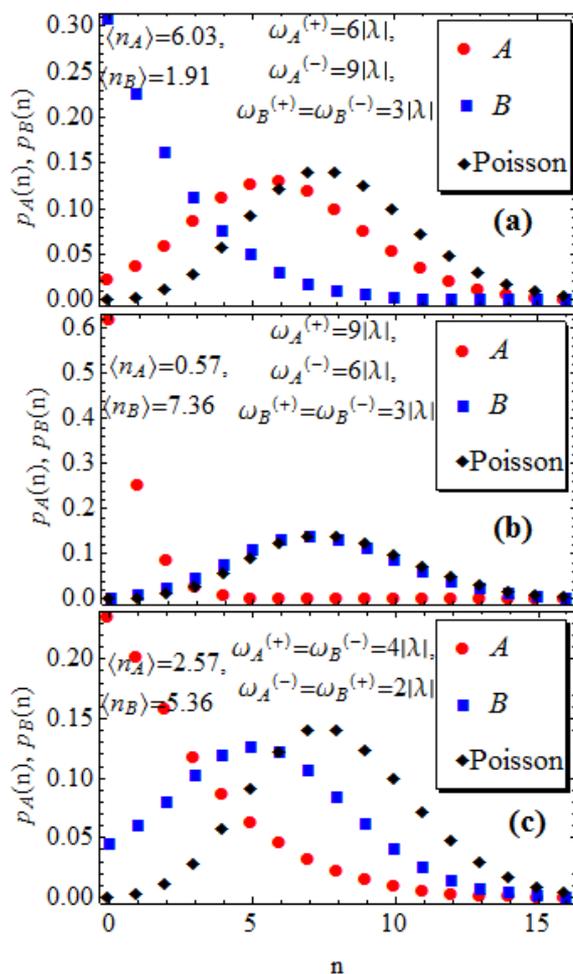


Рис. 22: Населенности состояний Фока числа атомов в ямах  $A$  и  $B$  при  $\bar{N} = 8$ ,  $\varphi = 0.1$ ,  $\nu = 0.01|\lambda|$  и  $\beta = 0$  в случае, когда при переключении меняется глубина только одной ямы (a, b) или обеих ям (c). Параметры потенциала и рассчитанные средние числа фотонов в яме приведены на графиках. Распределения на графике (b) получаются из соответствующих распределений на графике (a), если при неизменной схеме обратной связи изменить на  $\pi$  управляемый сдвиг фазы  $\beta$  в правом плече интерферометра.

варьирования - глубины ям, амплитуда и фаза параметра туннелирования, а кроме того, управляемый фазовый сдвиг в свободном от конденсата плече интерферометра. На Рис. 22(a, b) представлены результаты для случая, когда под действием обратной связи меняется глубина только одной из потенциальных ям. Можно видеть, что подходящим выбором (+)- и (-)-конфигураций потенциала можно добиться 'перекачки' большей части атомов в одну либо другую яму. Знаком разности заселенностей ям можно управлять, заменяя (+)- и (-)-конфигурации, либо меняя на  $\pi$  фазу  $\beta$ . Действительно, из (2.3) следует, что

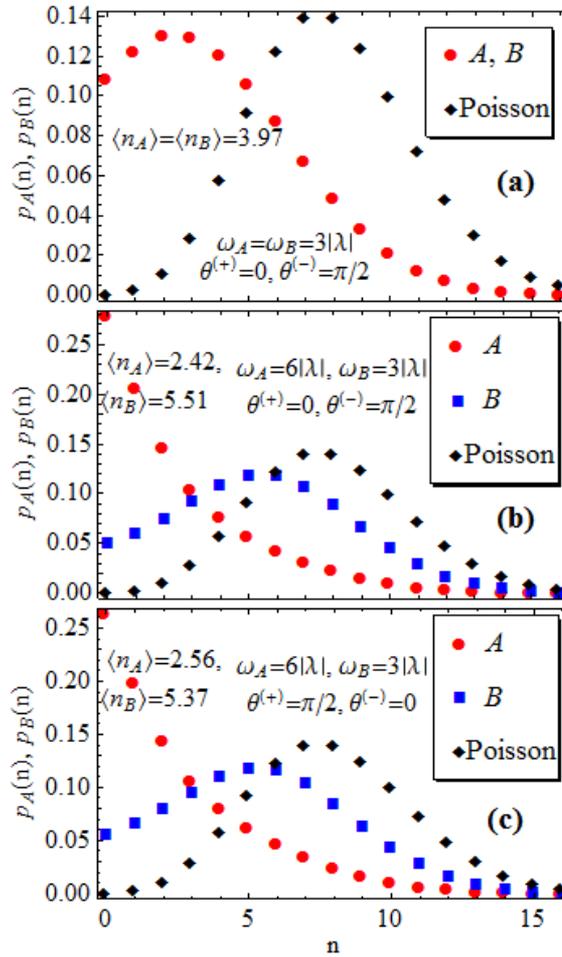


Рис. 23: Населенности состояний Фока числа атомов в ямах  $A$  и  $B$  при  $\bar{N} = 8$ ,  $\varphi = 0.1$ ,  $\nu = 0.01|\lambda|$  и  $\beta = 0$ . Обратная связь модифицирует только параметр туннелирования  $\lambda$ :  $\lambda^{(\pm)} = |\lambda|e^{i\theta^{(\pm)}}$ . Потенциал ловушки выбран симметричным (a) либо несимметричным (b, c) образом. Параметры потенциала и рассчитанные средние числа атомов в ямах представлены на графиках.

такое изменение фазы переставляет местами амплитуды полей  $\hat{\mathcal{E}}_+$  и  $\hat{\mathcal{E}}_-$ , что в свою очередь эквивалентно перестановке  $\hat{H}^{(+)}$  и  $\hat{H}^{(-)}$  в (2.4). Если изменению под действием обратной связи подвержены обе ямы, причем конфигурации потенциала симметричны относительно перестановки ям (Рис. 22(c)), то полученные результаты оказываются промежуточными между Рис. 22(a) и Рис. 22(b).

При подробном рассмотрении выяснилось, что варьирования одного лишь модуля параметра  $|\lambda|$  при помощи обратной связи оказывается недостаточно для изменения стационарных распределений. Однако, изменение фазы способно оказывать на них нетривиальный эффект. В эксперименте изменение фазы  $\lambda$  можно осуществить путем кратковременного возмущения потенциала и быстро-

го его возврата в исходное состояние. Соответствующие результаты вычислений представлены на Рис. 23. Стоит отметить, что в случае  $\omega_A = \omega_B$  (Рис. 23(a)) распределения  $p_{A,B}(n)$  хотя и меняются, но сохраняют те же самые средние значения, что и на Рис. 22. Кроме того, несмотря на то, что Рис. 23(b) и Рис. 23(c) мало отличаются друг от друга (это отличие иллюстрирует отсутствие симметрии между различными знаками разности фаз между  $\lambda^{(+)}$  и  $\lambda^{(-)}$ , также как и в случае, представленном на Рис. 22), их отличие от случая без обратной связи (Рис. 21) значительно.

## Глава 3

# Спектроскопия атомных ансамблей в поле типа ‘кошки Шредингера’

### 3.1 Квантованная мода в цепи обратной связи с переключением фазы

Предыдущие главы были посвящены рассмотрению влияния обратной связи на системы элементарных излучателей и бозе-конденсат, находящихся во внешнем поле. При этом действие обратной связи заключалось в быстрых актах изменения фазы этого поля, инициируемых процессом фотодетектирования фотонов. При этом внешнее поле полагалось классическим, а исследовалось квантовое состояние системы излучателей. Однако, наряду с излучателями, сами электромагнитные поля также являются предметом изучения в квантовой оптике. Среди различных экзотических квантовых состояний поля, возникающие в квантовой оптике, особый интерес представляют т.н. состояния типа ‘кошек Шредингера’ [105] - суперпозиции когерентных состояний, демонстрирующих яркие неклассические свойства. Данные состояния имеют важное значение в области квантовой информатики и квантовой криптографии [106, 19]. Обратная связь, как уже отмечалось во Введении, является эффективным методом контроля и предотвращения разрушения когерентности ‘кошек Шредингера’. Данная глава посвящена исследованию обратной связи применительно к квантованным полям, в том числе к находящимся в таких суперпозиционных состояниях.

Рассмотрим подробнее процесс разрушения когерентности квантового состояния в присутствии необратимой потери фотонов из полевой моды. Как известно, когерентное состояние Глаубера  $|\alpha\rangle_G$  является наиболее близким квантовым

аналогом классической электромагнитной моды, при этом комплексный параметр  $\alpha$  отвечает комплексной амплитуде моды. Состояние  $|\alpha\rangle_G$  является собственным для оператора уничтожения фотонов  $\hat{a}_G$  ( $\hat{a}_G|\alpha\rangle_G = \alpha|\alpha\rangle_G$ ). Пусть данное состояние приготовлено в оптическом резонаторе с конечной добротностью, так что фотоны покидают резонатор со с частотой  $\gamma$ . Данный процесс в отсутствие собственной динамики моды может быть описан следующим кинетическим уравнением:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_t = \gamma\hat{a}_G\hat{\rho}_t\hat{a}_G^\dagger - \frac{\gamma}{2}\hat{n}\hat{\rho}_t - \frac{\gamma}{2}\hat{\rho}_t\hat{n}. \quad (3.1)$$

Здесь  $\hat{n} = \hat{a}_G^\dagger\hat{a}_G$  - оператор числа фотонов. Во время эволюции состояние поля остается когерентным, но его амплитуда уменьшается:

$$\hat{\rho}_0 = |\alpha\rangle_G\langle\alpha| \rightarrow \hat{\rho}_t = |\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle_G\langle\alpha e^{-\gamma t/2}|. \quad (3.2)$$

Законы квантовой механики допускают существование состояний, являющихся суперпозиций когерентных состояний Глаубера с различными амплитудами:

$$|\Psi_{SC}\rangle = f_1|\alpha_1\rangle_G + f_2|\alpha_2\rangle_G, \quad (3.3)$$

где  $f_{1,2}$  - коэффициенты суперпозиции. Среди состояний типа ‘кошек Шредингера’ выделяют особый класс т.н. состояний Юрке-Столера  $|\alpha\rangle_{YS}$ , являющихся собственными для преобразованного оператора уничтожения фотона [107] (несущественные общие фазовые множители опущены):

$$\begin{aligned} \hat{a}_{YS}|\alpha\rangle_{YS} &= \alpha|\alpha\rangle_{YS}; \hat{a}_{YS} \doteq e^{i\pi\hat{n}}\hat{a}_G; \hat{a}_{YS}^\dagger \doteq \hat{a}_G^\dagger e^{-i\pi\hat{n}}, \\ |\alpha\rangle_{YS} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|i\alpha\rangle_G + | -i\alpha\rangle_G\right), \\ |\alpha\rangle_G &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|i\alpha\rangle_{YS} + | -i\alpha\rangle_{YS}\right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Новые операторы  $\hat{a}_{YS}, \hat{a}_{YS}^\dagger$  (операторы Юрке-Столера) подчиняются обычным бозонным коммутационным соотношениям. Оператор числа фотонов  $\hat{n}$  выражается одинаковым образом и через обычные операторы Глаубера  $\hat{a}_G, \hat{a}_G^\dagger$ , и через операторы Юрке-Столера:  $\hat{a}_G^\dagger\hat{a}_G = \hat{n} = \hat{a}_{YS}^\dagger\hat{a}_{YS}$ , и средние числа фотонов

в  $|\alpha\rangle_G$  и  $|\alpha\rangle_{YS}$  одинаковы и равны  $|\alpha|^2$ . Отсюда можно заключить, что имеет место своего рода дуальность состояний Глаубера и состояний Юрке-Столера, причем эта дуальность касается лишь их фазовых свойств, а с энергетической точки зрения они тождественны. Можно рассматривать явления квантовой оптики как в терминах состояний Глаубера, так и в терминах состояний Юрке-Столера, при этом оба подхода являются эквивалентными. Т.о., можно говорить о существовании нашего мира, который можно условно назвать ‘миром Глаубера’, и дуального ему ‘мира Юрке-Столера’. ‘Классические’ состояния нашего мира (когерентные состояния Глаубера) являются существенно квантовыми состояниями (т.е. суперпозициями) с точки зрения ‘мира Юрке-Столера’, и наоборот. Эта дуальность схематически проиллюстрирована на Рис. 24.

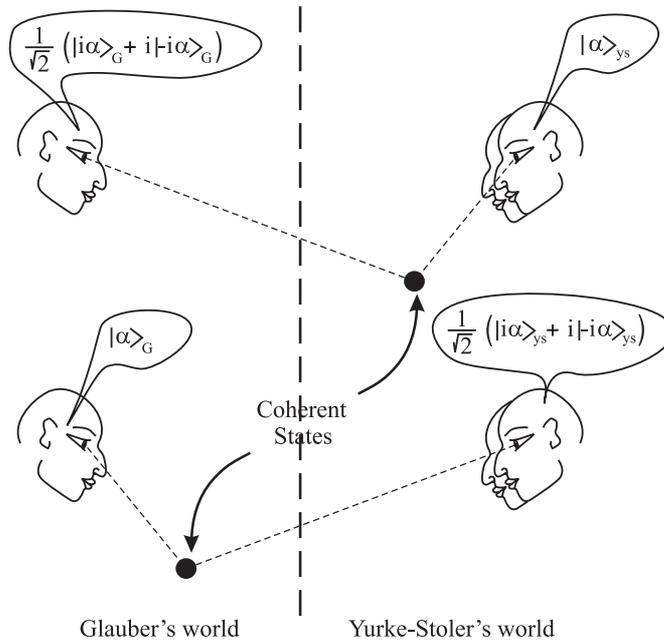


Рис. 24: Дуальность когерентных состояний Глаубера и Юрке-Столера.

Наиболее интересен случай многофотонных состояний Юрке-Столера, поскольку при этом более явно проявляется их неклассическая природа. В работе [67] было показано, что при  $|\alpha|^2 \gg 1$  состояние  $|\alpha\rangle_{YS}$  в процессе эволюции типа (3.1) за время  $(\gamma|\alpha|^2)^{-1} \ll \gamma^{-1}$  превращается в некогерентную смесь:

$$\hat{\rho}_0 = |\alpha\rangle_{YS}\langle\alpha| \rightarrow \hat{\rho}_t \simeq \frac{1}{2} |\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle_G \langle\alpha e^{-\gamma t/2}| + \frac{1}{2} |-\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle_G \langle-\alpha e^{-\gamma t/2}|. \quad (3.5)$$

Отсюда следует чрезвычайная уязвимость суперпозиций макроскопически различных состояний к процессам декогеренции. Прояснить это явление можно и

с другой точки зрения, рассмотрев, как меняется состояние Юрке-Столера при потере одного фотона согласно сценарию Глаубера:

$$\hat{a}_G|\alpha\rangle_{YS} = \alpha|-\alpha\rangle_{YS}. \quad (3.6)$$

Как видно, фаза параметра когерентного состояния меняется на  $\pi$  при необратимом уходе фотона из полевой моды. Возникающая неопределенность фазы параметра состояния Юрке-Столера вследствие потери фотонов и является причиной потери когерентности между компонентами суперпозиции.

Рассмотрим процесс, аналогичный (3.1), но в котором все операторы Глаубера заменены на соответствующие операторы Юрке-Столера:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_t = \gamma e^{i\pi\hat{n}}\hat{a}_G\hat{\rho}_t\hat{a}_G^\dagger e^{-i\pi\hat{n}} - \frac{\gamma}{2}\hat{n}\hat{\rho}_t - \frac{\gamma}{2}\hat{\rho}_t\hat{n}, \quad (3.7)$$

Из определения состояния Юрке-Столера как собственного для  $\hat{a}_{YS}$  следует полный аналог уравнения (3.2):

$$\hat{\rho}_0 = |\alpha\rangle_{YS}\langle\alpha| \rightarrow \hat{\rho}_t = |\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle_{YS}\langle\alpha e^{-\gamma t/2}|. \quad (3.8)$$

С точки зрения физики явления уравнение (3.8) отличается от (3.1) изменением фазы квантованной моды (т.е. знака характеризующего его комплексного параметра  $\alpha$ ) на  $\pi$  после каждой регистрации фотона, покинувшего резонатор. Это переключение реализуется цепью обратной связи, которая, таким образом, компенсирует фазовый сдвиг из (3.6) и тем самым предотвращает декогеренцию состояния  $|\alpha\rangle_{YS}$ . Изложенная идея была подробно рассмотрена в работе [67]. Данный же раздел посвящен исследованию возможности *создания* неклассического состояния поля при помощи обратной связи указанного типа. При этом предполагается также наличие классического гармонического тока, выполняющего роль внешней накачки для поля в резонаторе.

Рассмотрим квантованную моду излучения, находящуюся в оптическом резонаторе и возбуждаемую накачкой в виде внешнего монохроматического источника, отстроенного от собственной частоты резонатора на величину  $-\Delta$ . Гамильтониан системы, из которого исключена гармоническая зависимость от времени амплитуды  $\lambda$  внешнего поля источника [80],

$$\hat{H} = \Delta\hat{a}_G^\dagger\hat{a}_G + \lambda\hat{a}_G^\dagger + \lambda^*\hat{a}_G. \quad (3.9)$$

Резонатор помещен в цепь обратной связи с переключением фазы моды. Действие обратной связи инициируется детектированием фотонов, необратимо покинувших резонатор (детекторы предполагаются близкими к идеальным, скорость ухода фотонов из резонатора равна  $\gamma$ ).

Полное кинетическое уравнение для матрицы плотности поля  $\hat{\rho}$  содержит как динамическую часть с гамильтонианом (3.9), так и кинетическую часть из (3.1):

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_t = -i[\hat{H}, \hat{\rho}_t] + \gamma e^{i\pi\hat{n}}\hat{a}_G\hat{\rho}_t\hat{a}_G^\dagger e^{-i\pi\hat{n}} - \frac{\gamma}{2}\{\hat{n}, \hat{\rho}_t\}. \quad (3.10)$$

Поскольку пространство состояний поля бесконечномерно, точное аналитическое решение уравнения (3.10) получить не удаётся. Для поля обычным приемом является переход от операторных уравнений к уравнениям на скалярные функции, реализующие одно из классических представлений электромагнитного поля. Таковым является, к примеру,  $P$ -представление Глаубера для матрицы плотности [80, 83]:

$$\hat{\rho}_t = \int_{\mathbb{R}^2} P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle_G \langle\alpha| d^2\alpha. \quad (3.11)$$

Тогда получаем следующее уравнение для функции  $P$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}P = \gamma|\alpha|^2(\bar{P} - P) + \frac{1}{2}\partial_\alpha[(\gamma + 2i\Delta)\alpha + 2i\lambda]P + \frac{1}{2}\partial_{\alpha^*}[(\gamma - 2i\Delta)\alpha^* - 2i\lambda]P, \quad (3.12)$$

где  $\bar{P} = P(-\alpha, -\alpha^*)$ . Появление данного члена в правой части обусловлено наличием обратной связи и свойством (3.6) состояний Юрке-Столера.

В уравнение (3.12) входят три параметра с размерностью частоты –  $\Delta$ ,  $\lambda$  и  $\gamma$ . В зависимости от соотношения между ними должен меняться характер решения. Рассмотрим сначала эволюцию системы на временном промежутке, не содержащем актов регистрации квантов. В этом случае диссипативные члены в уравнении (3.10) можно перегруппировать так, что в результате в уравнении останется только динамический член, но с неэрмитовым гамильтонианом. Это означает, что изначально чистое когерентное состояние  $|\psi_0\rangle = |\alpha(0)\rangle$  эволюционирует согласно уравнению Шредингера

$$\frac{d}{dt}|\psi_t\rangle = -i\left(\hat{H} - i\frac{\gamma}{2}\hat{n}\right)|\psi_t\rangle, \quad (3.13)$$

и его решение имеет вид

$$\alpha(t) = \alpha(0)e^{-(\gamma/2+i\Delta)t} - \frac{2i\lambda}{\gamma + 2i\Delta} \left(1 - e^{-(\gamma/2+i\Delta)t}\right). \quad (3.14)$$

Удобно представлять эволюцию когерентного состояния как движение точки на комплексной плоскости параметра  $\alpha$ . На ней точка  $\alpha(t)$  приближается по спиральной траектории к стационарной точке  $\alpha_{st} = -2i\lambda/(\gamma + 2i\Delta)$ , так что выполняется соотношение

$$0 = -i[\hat{H}, |\alpha_{st}\rangle\langle\alpha_{st}|] + \gamma\hat{a}_G|\alpha_{st}\rangle\langle\alpha_{st}|\hat{a}_G^\dagger - \frac{\gamma}{2}\{\hat{n}, |\alpha_{st}\rangle\langle\alpha_{st}|\}. \quad (3.15)$$

В случае точного резонанса, т.е. при  $\Delta = 0$ , приближение осуществляется по прямой траектории. Из отрезков таких траекторий, прерываемых случайными актами регистрации фотонов, состоит любая реализация эволюции моды. При каждой регистрации действие обратной связи сводится к отражению параметра  $\alpha_t$  относительно центра комплексной плоскости, после чего следует новый непрерывный отрезок траектории. Две возможные реализации траекторий представлены на Рис. 25. В случае точного резонанса (Рис. 25А) видна тенденция приближения кусочно-прямолинейной траектории к отрезку, соединяющему  $\alpha_{st}$  и  $-\alpha_{st}$ . Поэтому можно заключить, что с течением времени множество наиболее вероятных состояний системы будет группироваться вблизи этого отрезка.

Стационарное решение уравнения (3.12) находилось численно, результаты представлены на Рис. 26. Как видно из Рис. 26А, распределение квазивероятности действительно сконцентрировано вблизи указанного отрезка, соединяющего точки  $\alpha_{st}$  и  $-\alpha_{st}$ . При  $\Delta \neq 0$  (Рис. 26В) в форме  $P$ -функции угадываются спиральные траектории Рис. 25В.

Хотя уравнение (3.12) в общем случае решается только численно, существует область значений параметров, позволяющая использовать упрощенную аналитическую модель. Рассмотрим случай больших значений отстройки. Как можно заключить из Рис. 26С, ненулевые значения  $P$ -функции сконцентрированы вблизи точки  $-\lambda/\Delta$ , являющейся пределом  $\alpha_{st}$  при  $|\Delta| \gg \gamma$ . Практически не заметна асимметрия, вносимая точкой  $-\alpha_{st}$ . Чтобы взглянуть на этот факт с другой точки зрения, заметим, что гамильтониан (3.9) может быть представлен в виде

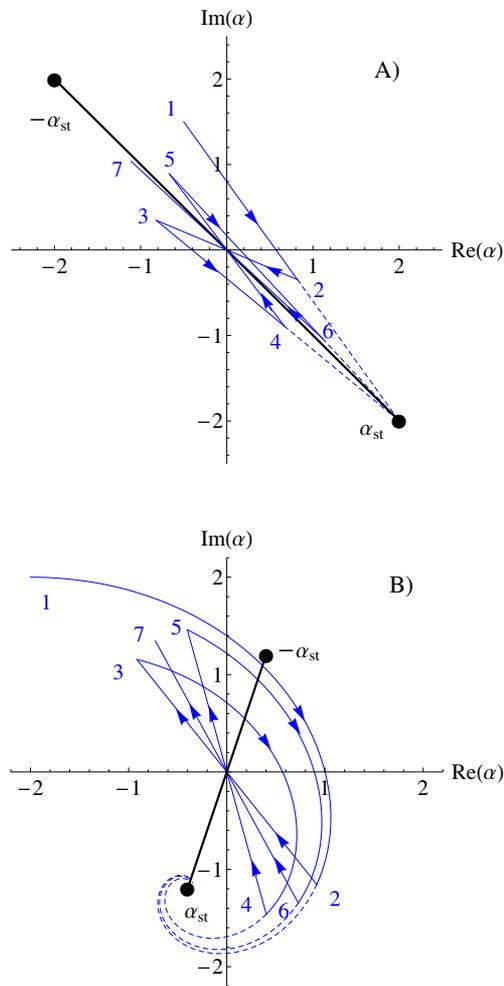


Рис. 25: Примеры реализаций эволюции состояния системы на плоскости когерентных состояний при точном резонансе (А) и при  $\Delta = \gamma$  (В). Фоторегистрация происходит в точках с чётными номерами.  $\alpha_{st} = -2i\lambda/(\gamma + 2i\Delta)$ ,  $\lambda = (1 + i)\gamma$ .

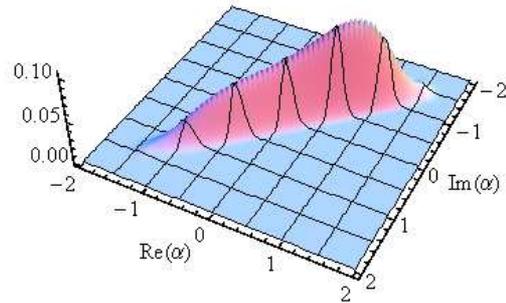
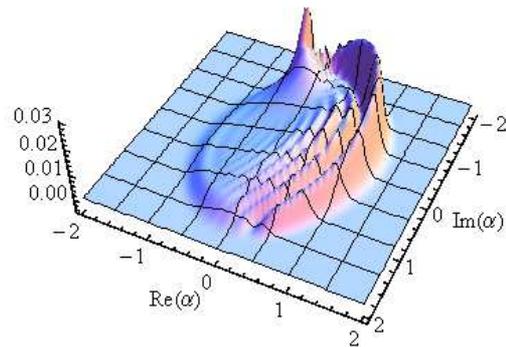
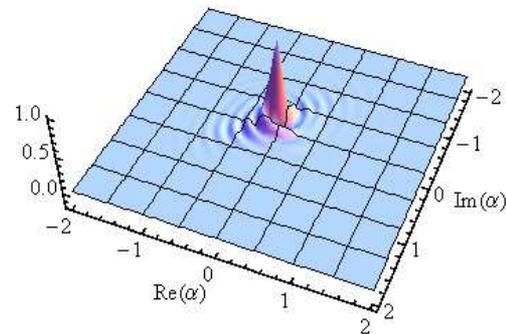
A)  $P_{st}(x,y)$  at  $\Delta=0$ B)  $P_{st}(x,y)$  at  $\Delta=\gamma$ C)  $P_{st}(x,y)$  at  $\Delta=5\gamma$ 

Рис. 26: Стационарное состояние моды при  $\Delta = 0$  (A),  $\Delta = \gamma$  (B) и  $\Delta = 5\gamma$  (C). В случае (A) ненулевая часть функции  $P$  сосредоточена вблизи отрезка, соединяющего точки  $-2i\lambda/\gamma$  и  $2i\lambda/\gamma$ , а в случае (C) – вблизи точки  $-\lambda/\Delta$ . Значение  $\lambda$  такое же, что и на Рис. 25.

$$\hat{H} = \Delta \hat{b}^\dagger \hat{b} - \frac{|\lambda|^2}{\Delta^2}, \quad (3.16)$$

где

$$\hat{b} = \hat{a} + \frac{\lambda}{\Delta}, \quad \hat{b}^\dagger = \hat{a}^\dagger + \frac{\lambda^*}{\Delta} \quad (3.17)$$

- т.н. смещённые полевые операторы. Поскольку они удовлетворяют обычным бозонным коммутационным соотношениям, можно рассматривать систему как эффективный осциллятор с собственными состояниями – смещённым базисом Фока (displaced number states) [108, 109]:

$$\begin{aligned} |\tilde{n}\rangle &= \frac{\hat{b}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |\tilde{0}\rangle; \quad n = 0, 1, \dots \\ |\tilde{0}\rangle &= \left| -\frac{\lambda}{\Delta} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где  $\left| -\frac{\lambda}{\Delta} \right\rangle$  – когерентное состояние Глаубера, называемое смещённым вакуумом. Заметим, что базис обычных состояний Фока  $\{|n\rangle\}_{n=0}^\infty$  является естественным для диссипативной части из (1.4) в том смысле, что диагональные в этом базисе элементы статистического оператора подчиняются классическому кинетическому уравнению, справедливому для марковских процессов - уравнению Паули [82]. Смещённый фоковский базис  $\{|\tilde{n}\rangle\}_{n=0}^\infty$  оказывается собственным базисом гамильтониана (3.9). В случае  $|\Delta| \gg \gamma$  динамический член является определяющим в эволюции системы, и поэтому для решения логично использовать смещенный базис. Далее мы применим метод, использовавшийся в прошлой Главе, и перейдем к скалярным уравнениям на матричные элементы, взятые в смещенном фоковском базисе, при этом достаточно удерживать члены с одинаковой основной зависимостью от времени, определяемой динамикой:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(n_1|n_2) &= -i\Delta \cdot (n_1 - n_2) \rho(n_1|n_2) + \\ \gamma \sum_n w(n_1|n_1 + n) w^*(n_2|n_2 + n) \rho(n_1 + n|n_2 + n) - \\ &\frac{\gamma}{2} \sum_n (|w(n|n_1)|^2 + |w(n|n_2)|^2) \rho(n_1|n_2). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Здесь

$$w(n|m) = \langle \tilde{n} | e^{i\pi \hat{n}} \hat{a} | \tilde{m} \rangle. \quad (3.20)$$

В стационарном состоянии матрица плотности оказывается диагональной:

$$\hat{\rho}_{st} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}|. \quad (3.21)$$

Явное выражение для амплитуд скоростей перехода (3.20), от которых зависят стационарные вероятности  $p_n$ , можно получить аналогично прошлой Главе, воспользовавшись формулой (2.11):

$$w(n|k) = \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^k \sum_{i=0}^{\min(m,l+1)} C_{nk}^{iml} \alpha_0^{n+1-i} (\alpha_0^*)^{k-i}, \quad (3.22)$$

$$C_{nk}^{iml} = \frac{e^{-2|\alpha_0|^2} (-1)^{n+l+i} \sqrt{n!k!} (l+1)}{(n-l)!(k-m)!i!(l+1-i)!(m-i)!}; \alpha_0 = \frac{\lambda}{\Delta}.$$

Система (3.19) также решается численно для конечного числа  $N_{max}$  доступных состояний  $|\tilde{n}\rangle$ . Решение при больших временах приближается к стационарным вероятностям из (3.21).

Наиболее заселенным оказывается состояние  $|\tilde{0}\rangle$ , и далее заселенность монотонно и быстро убывает с увеличением номера  $n$ . Это согласуется с решением точного уравнения (3.12), представленным на Рис. 26С.  $P$ -функция представляет собой узкий пик с максимумом в точке, соответствующей когерентному состоянию  $|\lambda/\Delta\rangle = |\tilde{0}\rangle$ . Этот результат оказывается справедливым для произвольных значений  $\lambda$ . Таким образом, использованная простая модель позволяет достаточно точно описывать состояние в случае больших значений отстройки  $\Delta$ .

Одной из характерных черт  $P$ -распределения Глаубера является его знакопеременность (поэтому его называют распределением квазивероятности). Более того, наличие отрицательной части в  $P$ -распределении является свидетельством существенно квантовой природы соответствующего ему квантового состояния [83]. В случае точного резонанса (Рис. 26А) вычисленная  $P$ -функция является неотрицательной, в то время как функции на Рис. 26В,С не являются знакоопределенными, а значит, представляемые ими состояния демонстрируют неклассичность, хотя и не очень ярко выраженную.

### 3.2 Резонансная флуоресценция одиночного атома в поле ‘кошки Шредингера’

В предыдущем разделе было показано, что суперпозиция когерентных состояний поля при взаимодействии с окружением оказывается подверженной весьма быстрой декогеренции. Фактически, потеря даже одного фотона из полевой моды приводит к полному разрушению когерентности между компонентами суперпозиции. В работе [67], которая, насколько нам известно, является первым полноценным рассмотрением взаимодействия поля типа ‘кошки Шредингера’ с атомной системой (а именно - процесса резонансной флуоресценции атома в таком поле), остался нерассмотренным важный вопрос о процессе восстановления когерентности состояния поля. Кроме того, время жизни суперпозиционного состояния поля напрямую зависело от того, насколько эффективной является фоторегистрация спонтанных фотонов, покинувших резонатор (именно спонтанными фоторегистрациями инициировалось действие обратной связи). Поэтому было возможно исследовать лишь квазистационарный режим резонансной флуоресценции, возникающий на начальном периоде взаимодействия атома с полем. Для рассмотрения истинно стационарного режима необходимо включить в исследуемую систему механизм непрерывного восстановления состояния поля. Именно этой задаче и посвящен настоящий раздел. Кроме того, в нем будет исследован особый тип обратной связи, отличающийся от рассмотренных ранее. В предыдущем разделе цепь обратной связи меняла фазу параметра когерентного состояния поля на  $\pi$ . Однако, ввиду свойства (3.6) когерентного состояния Юрке-Столера, аналогичное изменение его фазы происходит при вынужденном поглощении фотона по глауберовскому сценарию. Таким образом, при взаимодействии атома с полем в состоянии Юрке-Столера возникает обратная связь, контролируемая актами *вынужденного* поглощения атомом фотонов из полевой моды. Основное ее отличие от рассмотренных ранее видов обратной связи заключается в том, что она возникает естественным образом в ходе взаимодействия атома с полем, а не вносится искусственно.

Существует довольно много теоретических и экспериментальных предложений [67, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116], направленных на приготовление неклассических состояний поля. Большая часть из них основаны на последова-

тельности измерений, проводимых над системой, с последующей коррекцией ее состояния в зависимости от полученного результата. Примером может служить способ, описанный в [117], и его вариации, при помощи которых экспериментально продемонстрирована возможность приготовления Фоковских состояний света, также являющихся существенно неклассическими [114, 116]. Он заключается в дисперсионном (нерезонансном) взаимодействии двухуровневых атомов с полем в обычном когерентном состоянии Глаубера, приготовленном в резонаторе. Состояние атомов, провзаимодействовавших с полем, измеряется, и в случае получения определенного результата поле оказывается в требуемом квантовом состоянии - выполняется т.н. постселекция. Источник атомов, взаимодействующих с полем, в этом случае может считаться своего рода 'источником', а процесс постселекции - 'стоком'. Поскольку задачей данного раздела является исследование процесса стационарного режима взаимодействия атома с полем, логично выбрать наиболее простое описание способа приготовления и восстановления суперпозиционного состояния поля. Здесь удобно воспользоваться уже упоминавшейся полной симметрией законов квантовой оптики в представлении состояний Глаубера и состояний Юрке-Столера. Как известно, когерентное состояние Глаубера возникает в результате совместного действия гармонически осциллирующего диполя, играющего роль источника поля, и процесса необратимого ухода фотонов из резонатора вследствие его конечной добротности [83]. То же самое справедливо и для состояний Юрке-Столера, иначе говоря, состояние Юрке-Столера является решением уравнения

$$\begin{aligned} \Lambda_{ph}[\hat{\rho}] &= -i\mu[\hat{a}_{YS} + \hat{a}_{YS}^\dagger, \hat{\rho}] + 2\nu\hat{a}_{YS}\hat{\rho}\hat{a}_{YS}^\dagger - \nu\{\hat{a}_{YS}^\dagger\hat{a}_{YS}, \hat{\rho}\} = 0, \\ \Lambda_{ph}[|\alpha\rangle_{YS}\langle\alpha|] &= 0; \alpha = -i\mu/\nu, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где  $\mu$  - параметр размерности частоты, пропорциональный величине дипольного момента,  $\nu$  - частота актов ухода фотонов из резонатора (Рис. 27). Для упрощения вычислений в (3.23) частота осцилляций диполя принята равной частоте моды, а явная гармоническая зависимость от времени исключена обычным переходом в представление вращающейся волны. Эта простая математическая модель, хотя и не соответствует какому-либо конкретному способу приготовления 'кошки Шредингера', однако является достаточной для наших целей, поскольку имеет своим стационаром требуемое суперпозиционное состояние.

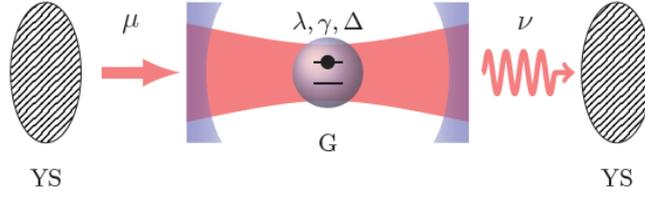


Рис. 27: К модели восстановления состояния поля.

При внесении атома в поле, в кинетическое уравнение добавляются соответствующие динамические члены (собственный гамильтониан и дипольное взаимодействие с полем) и структура Линдблада, соответствующая спонтанному распаду атома:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho} &= -i\Delta[\hat{s}_0, \hat{\rho}] - i\lambda[\hat{a}_G\hat{s}_+ + \hat{a}_G^\dagger\hat{s}_-, \hat{\rho}] + \Lambda_{at}[\hat{\rho}] + \Lambda_{ph}[\hat{\rho}], \\ \Lambda_{at}[\hat{\rho}] &= \gamma\hat{s}_-\hat{\rho}\hat{s}_+ - \frac{\gamma}{2}\{\hat{s}_+\hat{s}_-, \hat{\rho}\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Решение этого уравнения в общем случае затруднительно. Сконцентрируемся на наиболее интересном случае сильного поля, в котором должны наиболее сильно проявляться эффекты, связанные с его неклассичностью. Будем полагать, что число фотонов в нем  $|\alpha|^2 \gg 1$ , а процесс восстановления состояния поля быстрый по сравнению с характерными временами эволюции атома. Эти условия можно выразить следующим двойным неравенством:

$$\Delta, \lambda, \gamma \ll \nu \ll \mu. \quad (3.25)$$

Условие быстроты ‘источника’ позволяет считать, что модуль амплитуды поля в среднем не меняется. Это значит, что с учетом переключений фазы, вызванной вынужденными фотопоглощениями, пространство состояний полевой системы становится эффективно двумерным, что в свою очередь приводит к следующему наиболее общему виду матрицы плотности:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{(+)} \otimes |\alpha\rangle_{YS}\langle\alpha| + \hat{\rho}^{(-)} \otimes |-\alpha\rangle_{YS}\langle-\alpha| + \hat{R} \otimes |\alpha\rangle_{YS}\langle-\alpha| + \hat{R}^\dagger \otimes |-\alpha\rangle_{YS}\langle\alpha|. \quad (3.26)$$

Здесь левые множители являются операторами, действующими только на пространстве состояний атома. Поскольку для когерентных состояний  $\langle\alpha|-\alpha\rangle \ll 1$

при больших  $|\alpha|$ , то можно заключить, что основополагающее требование единичности следа статистического оператора  $Tr[\hat{\rho}^{(+)} + \hat{\rho}^{(-)}] = 1$  выполняется с высокой точностью.

Подстановка анзаца (3.26) в кинетическое уравнение (3.24) и взятие следа по полевым переменным дает

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}^{(+)} &= -i\Delta[\hat{s}_0, \hat{\rho}^{(+)}] + \Lambda_{at}[\hat{\rho}^{(+)}] + i\lambda\alpha(\hat{R}\hat{s}_+ + \hat{s}_+\hat{R}^\dagger) - i\lambda\alpha^*(\hat{R}\hat{s}_- + \hat{s}_-\hat{R}^\dagger), \\ \frac{d}{dt}\hat{\rho}^{(-)} &= -i\Delta[\hat{s}_0, \hat{\rho}^{(-)}] + \Lambda_{at}[\hat{\rho}^{(-)}] + i\lambda\alpha^*(\hat{s}_-\hat{R}(t) + \hat{R}^\dagger\hat{s}_-) - i\lambda\alpha(\hat{s}_+\hat{R} + \hat{R}^\dagger\hat{s}_+), \\ \frac{d}{dt}\hat{R} &= -i\Delta[\hat{s}_0, \hat{R}] + \Lambda_{at}[\hat{R}] - \Gamma\hat{R} + i\lambda\alpha(\hat{s}_+\hat{\rho}^{(-)}(t) - \hat{\rho}^{(+)}(t)\hat{s}_+) + \\ & i\lambda\alpha^*(\hat{\rho}^{(+)}(t)\hat{s}_- - \hat{s}_-\hat{\rho}^{(-)}(t)). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Здесь  $\Gamma = 4\mu^2/\nu$ . Поскольку  $\Gamma \gg \mu$ , эволюция операторов  $\hat{R}, \hat{R}^\dagger$  определяется именно этим большим параметром. Они быстро (по сравнению с  $\hat{\rho}^{(+)}, \hat{\rho}^{(-)}$ ) достигают своего стационарного состояния, после чего их производными по времени можно пренебречь:  $\frac{d}{dt}\hat{R} = \frac{d}{dt}\hat{R}^\dagger = 0$ . Иными словами, операторы  $\hat{R}, \hat{R}^\dagger$  являются адиабатически подчиненными более медленно эволюционирующим операторам  $\hat{\rho}^{(+)}, \hat{\rho}^{(-)}$ . Это позволяет получить следующие выражения для  $\hat{R}, \hat{R}^\dagger$ :

$$\begin{aligned} \hat{R}(t) &= R(t)\hat{\mathbb{1}} + R_0(t)\hat{s}_0 + R_+(t)\hat{s}_+ + R_-(t)\hat{s}_-, \\ \hat{\rho}(t) &= \rho(t)\hat{\mathbb{1}} + \rho_0(t)\hat{s}_0 + \rho_+(t)\hat{s}_+ + \rho_-(t)\hat{s}_-, \\ R(t) &= \frac{i\lambda\alpha}{2\Gamma}(\rho_-^{(-)}(t) - \rho_-^{(+)}(t)) + \frac{i\lambda\alpha^*}{2\Gamma}(\rho_+^{(+)}(t) - \rho_+^{(-)}(t)), \\ R_0(t) &= \frac{i\lambda\alpha}{\Gamma + \gamma} \left[ (1 + \gamma/\Gamma)\rho_-^{(+)}(t) + (1 - \gamma/\Gamma)\rho_-^{(-)}(t) \right] + \\ & \frac{i\lambda\alpha^*}{\Gamma + \gamma} \left[ (1 - \gamma/\Gamma)\rho_+^{(+)}(t) + (1 + \gamma/\Gamma)\rho_+^{(-)}(t) \right], \\ R_+(t) &= \frac{i\lambda\alpha}{\Gamma + \gamma/2 + i\Delta} \cdot (\rho_-^{(-)}(t) - \rho_0^{(-)}(t) - \rho_+^{(+)}(t) - \rho_0^{(+)}(t)), \\ R_-(t) &= \frac{i\lambda\alpha^*}{\Gamma + \gamma/2 - i\Delta} \cdot (\rho_+^{(+)}(t) - \rho_0^{(+)}(t) - \rho_-^{(-)}(t) - \rho_0^{(-)}(t)). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Данные соотношения справедливы на временах  $t \gtrsim 1/\Gamma$ . Их постановка в (3.27) дает

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho^{(+)}(t) &= \nu_3(\rho^{(-)}(t) - \rho^{(+)}(t)), \\
\frac{d}{dt}\rho_0^{(+)}(t) &= -(\nu_3 + \gamma)\rho_0^{(+)}(t) - \nu_3\rho_0^{(-)}(t) - \gamma\rho^{(+)}(t), \\
\frac{d}{dt}\rho_+^{(+)}(t) &= -(\gamma/2 + \nu_1 + i\Delta)\rho_+^{(+)}(t) - \nu_1e^{i\beta}\rho_-^{(-)}(t) + \\
&\nu_2e^{i\beta}\rho_-^{(+)}(t) + \nu_2\rho_+^{(-)}(t), \\
\frac{d}{dt}\rho_-^{(+)}(t) &= -(\gamma/2 + \nu_1 - i\Delta)\rho_-^{(+)}(t) - \nu_1e^{-i\beta}\rho_+^{(-)}(t) + \\
&\nu_2e^{-i\beta}\rho_+^{(+)}(t) + \nu_2\rho_-^{(-)}(t), \\
\frac{d}{dt}\hat{\rho}^{(-)}(t) &= \frac{d}{dt}\hat{\rho}^{(+)}(t) \Big|_{(\pm) \rightarrow (\mp)}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Последняя строка означает, что уравнения на компоненты матрицы  $\hat{\rho}^{(-)}(t)$  получаются из представленных уравнений на  $\hat{\rho}^{(+)}(t)$  соответствующей заменой верхних индексов. Кроме того, здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
e^{i\beta} &= \left( \frac{\alpha}{|\alpha|} \right)^2, \\
\nu_1 &= \frac{\lambda^2|\alpha|^2(2\Gamma + \gamma)}{\Gamma(\Gamma + \gamma)}, \\
\nu_2 &= \frac{\lambda^2|\alpha|^2\gamma}{\Gamma(\Gamma + \gamma)}, \\
\nu_3 &= \frac{\lambda^2|\alpha|^2(2\Gamma + \gamma)}{(\Gamma + \gamma/2)^2 + \Delta^2}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Стационарное решение (3.29) имеет вид

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{st}^{(+)} &= \hat{\rho}_{st}^{(-)} = \frac{\nu_3}{2(\gamma + 2\nu_3)}|e\rangle\langle e| + \frac{\nu_3 + \gamma}{2(\gamma + 2\nu_3)}|g\rangle\langle g|, \\
\hat{R}_{st} &= \frac{\nu_3}{2(\gamma + 2\nu_3)} \cdot \frac{i\lambda\alpha}{\Gamma + \gamma/2 + i\Delta}|e\rangle\langle g| - h.c.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Для нахождения спектра резонансной флуоресценции необходимо знать выражения для атомных операторов в представлении Гейзенберга. Однако, решить уравнение Гейзенберга, полученное напрямую из (3.24), не представляется возможным, поскольку анзац (3.26) для него не годится. Вместо этого мы по-

лучим соответствующие ‘гейзенберговские’ уравнения из (3.29), воспользовавшись принципом эквивалентности представлений Шредингера и Гейзенберга, подобно тому, как это было сделано в Главе 1. В зависимости от того, какой была фаза поля в момент первого зарегистрированного фотоиспускания (мы рассматриваем установившийся режим флуоресценции), возможны два типа начальных условий:

$$\begin{aligned} I : \hat{A}^{(+)}(t) \Big|_{t=0} &= \hat{s}_+, \hat{A}^{(-)}(t) \Big|_{t=0} = 0, \\ II : \hat{A}^{(+)}(t) \Big|_{t=0} &= 0, \hat{A}^{(-)}(t) \Big|_{t=0} = \hat{s}_+. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Тогда окончательное выражение для спектра резонансной флуоресценции имеет вид

$$\begin{aligned} S(\omega) \sim ReTr \left[ \hat{A}^{(+)}(\omega) \Big|_I \hat{s}_- \hat{\rho}_{st}^{(+)} + \hat{A}^{(-)}(\omega) \Big|_{II} \hat{s}_- \hat{\rho}_{st}^{(-)} + \right. \\ \left. \hat{A}^{(+)}(\omega) \Big|_{II} \hat{s}_- \hat{\rho}_{st}^{(-)} + \hat{A}^{(-)}(\omega) \Big|_I \hat{s}_- \hat{\rho}_{st}^{(+)} \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Результаты вычисления спектра представлены на Рис. 28. В отличие от обычного триплета резонансной флуоресценции (в глауберовском поле), спектр резонансной флуоресценции в поле Юрке-Столера содержит только один пик, центрированный на частоте атомного резонанса. Его ширина составляет  $\sim \gamma$ , как и в классическом случае, т.е. полная интенсивность излучения оказывается значительно ниже. Наличие боковых компонент в триплете резонансной флуоресценции объясняется возникновением когерентности между атомными энергетическими уровнями, создаваемой внешним полем. В нашем случае эта когерентность разрушается из-за корреляций между состояниями атома и поля, что явно видно из формы анзаца (3.26) и стационарного решения (3.31). Действительно, недиагональные члены атомной матрицы плотности оказываются неразрывно связанными с таковыми состояниями внешнего поля. Эти корреляции носят классический характер, поскольку состояние (3.31) не является зацепленным, что можно проверить, воспользовавшись критерием Переса [118], состоящим в проверке неположительной определенности частично транспонированной матрицы

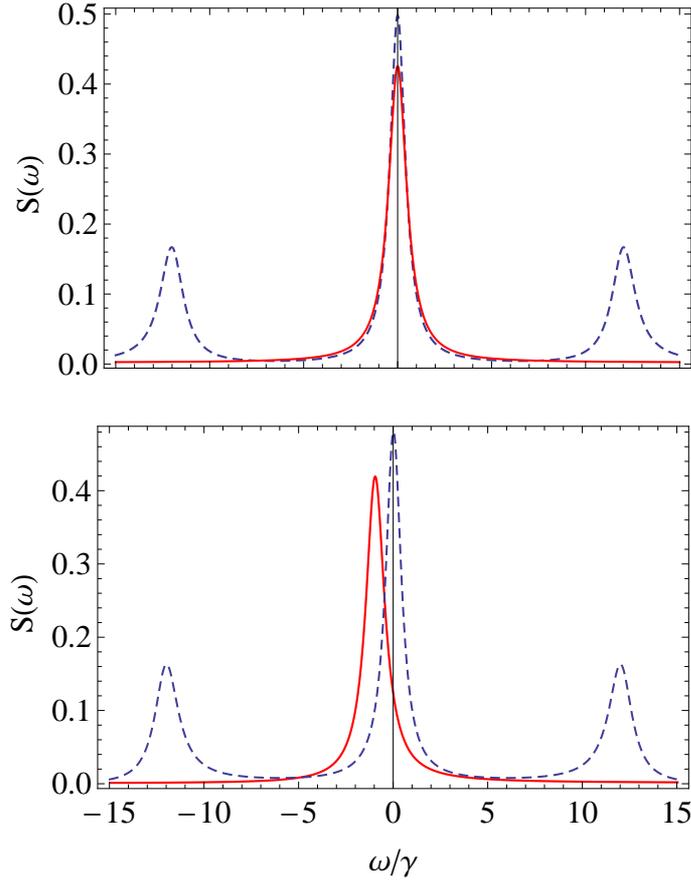


Рис. 28: Спектр резонансной флуоресценции в полях Юрке-Столера (сплошная линия) и Глаубера (пунктир) при  $\lambda = \gamma$ ,  $\nu = 5\gamma$ ,  $\mu = 30\gamma$  и  $\Delta = 0$  (верхний график) и  $\Delta = -\gamma$  (нижний график).

плотности матрицы плотности. Поскольку в случае сильного поля размерность пространства состояния и атома, и поля равна двум, то этот критерий является одновременно необходимым и достаточным [119].

Рассмотрим отдельно состояние поля в стационарном режиме взаимодействия. Беря след по атомным переменным в (3.31), мы получаем равновесную смесь двух почти ортогональных когерентных состояний:

$$\hat{\rho}_{ph} = Tr_{at}\hat{\rho} = \frac{1}{2}|\alpha\rangle_{YS}\langle\alpha| + \frac{1}{2}|-\alpha\rangle_{YS}\langle-\alpha| = \frac{1}{2}|i\alpha\rangle_G\langle i\alpha| + \frac{1}{2}|-i\alpha\rangle_G\langle -i\alpha|. \quad (3.34)$$

Данное состояние не является суперпозиционным. Этот результат интересен сам по себе, поскольку оказывается, что несмотря на сильный и быстрый внешний источник, внесение в поле всего одного атома способно разрушить супер-

позицию между когерентными амплитудами. Однако, при этом возникают упомянутые корреляции между состоянием атома и поля, которые и ответственны за наблюдаемые необычные спектральные свойства. Отсутствием когерентности в стационарном состоянии поля можно также объяснить и положение пика резонансной флуоресценции. Действительно, в рассматриваемой ситуации фактически имеет место некогерентное возбуждение атома, что и приводит к центрированию спектра спонтанного испускания на частоте атомного резонанса.

### 3.3 Статистика фотоиспусканий атомного ансамбля в поле ‘кошки Шредингера’

Рассмотрев задачу об одиночном атоме, взаимодействующем с полем состояния ‘кошки Шредингера’, перейдем к изучению случая многих атомов. Этот случай безусловно представляет интерес, поскольку вынужденное поглощение фотона из поля каждым атомом будет изменять фазу поля для всего ансамбля. В классической нелинейной спектроскопии единичное фотопоглощение неспособно сколько-нибудь значительно повлиять на поле, особенно в случае, когда оно содержит много фотонов.

Исследовав спектральные свойства резонансной флуоресценции, перейдем к рассмотрению ее статистических свойств. Пусть в резонатор с полевой модой, приготовленной в состоянии Юрке-Столера  $|\alpha\rangle_{YS}$ , внесен ансамбль из  $N$  двухуровневых атомов. Основное и возбужденное состояние  $i$ -го атома будем обозначать  $|g^{(i)}\rangle$  и  $|e^{(i)}\rangle$  соответственно. Как и в Главе 1, будем полагать, что атомы расположены достаточно компактно в плоскости, перпендикулярной волновому вектору поля, так что нет необходимости добавлять к атомным операторам соответствующие пространственные фазовые множители. Как и предыдущем разделе, рассмотрение поля будет включать в себя также и его источник. Кинетическое уравнение по форме совпадает с (3.24):

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -i\Delta[\hat{s}_0, \hat{\rho}] - i\lambda[\hat{a}_G\hat{S}_+ + \hat{a}_G^\dagger\hat{S}_-, \hat{\rho}] + \Lambda_{ph}[\hat{\rho}], \quad (3.35)$$

однако вместо обычных операторов для одного атома  $\hat{s}_{\pm,0}$  в них фигурируют коллективные операторы

$$\begin{aligned}
\hat{S}_0 &= \sum_{i=1}^N \hat{s}_0^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( |e^{(i)}\rangle\langle e^{(i)}| - |g^{(i)}\rangle\langle g^{(i)}| \right), \\
\hat{S}_+ &= \sum_{i=1}^N \hat{s}_+^{(i)} = \sum_{i=1}^N |e^{(i)}\rangle\langle g^{(i)}|, \\
\hat{S}_- &= \hat{S}_+^\dagger.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Поскольку в контексте данной работы наиболее важным является исследование явлений, вызванных обратной связью, которая в данном случае инициируется *вынужденными* фотопоглощениями, *спонтанными* атомными испусканиями будем пренебрегать. Кроме того, это предположение позволит существенно упростить дальнейшие выкладки. Источник поля, как и предыдущем разделе, действует быстро по сравнению с атомной подсистемой, поэтому для решения (3.35) можно применить тот же анзац (3.26).

После подстановки (3.26) в (3.35) оказывается, что полученные уравнения на атомные операторы выглядят наиболее простым образом, если ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \hat{\rho}^{(+)} + \hat{\rho}^{(-)}, \\
\hat{r} &= \hat{R} - \hat{R}^\dagger.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Для них имеем

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{\rho} &= -i\Delta[\hat{S}_0, \hat{\rho}] + i\lambda\alpha_{st}[\hat{r}, \hat{S}_+ + \hat{S}_-], \\
\frac{d}{dt} \hat{r} &= -i\Delta[\hat{S}_0, \hat{r}] - \Gamma\hat{r} - i\lambda\alpha_{st}[\hat{\rho}, \hat{S}_+ + \hat{S}_-].
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Следуя логике предыдущего раздела, производную по времени в последнем уравнении можно опустить:  $\frac{d}{dt} \hat{r} = 0$ . Отметим, что при  $\Delta = 0$  эволюция оператора  $\hat{\rho}$  представляет собой (случайные) вращения вокруг оси  $x$  в трехмерном пространстве коллективного атомного псевдоспина (по определению,  $\hat{S}_+ + \hat{S}_- = 2\hat{S}_x$ ). В случае неравной нулю отстройки этот процесс прерывается случайной прецессией вокруг оси  $z$ . В результате стационарное решение (3.38) является максимально смешанным:  $\hat{\rho}^{st} = \hat{\mathbb{1}}/(N+1)$ . Однако, для нахождения временного поведения корреляционных функций фотоиспускания одно-

го стационарного решения недостаточно. Обсуждаемая атомная система полностью эквивалентна квантовому угловому моменту величины  $j = N/2$ . Стандартным приемом для решения уравнений, подобных (3.38), является использование представления неприводимых тензорных операторов [120, 121]. Вместо использования базиса состояний  $|jm\rangle$  с определенной проекцией углового момента произвольный ограниченный оператор  $\hat{O}$  может быть разложен по базису операторов  $\{\hat{T}_{\kappa q}; \kappa = 0, 1, \dots, 2j; q = -\kappa, \dots, \kappa\}$ , являющихся компонентами неприводимого тензора  $\hat{\mathbf{T}}_{\kappa}$ :

$$\hat{O} = \sum_{\kappa=0}^{2j} \sum_{q=-\kappa}^{\kappa} O_{\kappa q} \hat{T}_{\kappa q}; \quad O_{\kappa q} = Tr \left( \hat{T}_{\kappa q}^{\dagger} \hat{O} \right). \quad (3.39)$$

В  $jm$ -базисе они имеют следующий вид:

$$\hat{T}_{\kappa q} = \sum_{m, m'=-j}^j (-1)^{j-m'} C_{m, -m', q}^{j, j, \kappa} |jm\rangle \langle jm'|, \quad (3.40)$$

где  $C_{m, m', q}^{j, j', \kappa}$  - коэффициенты Клебша-Гордана со стандартным [120] выбором фазы. Другое определение  $\hat{T}_{\kappa q}$  может быть дано через их коммутационные соотношения с операторами углового момента:

$$[\hat{S}_m, \hat{T}_{\kappa q}] = \sqrt{\kappa(\kappa+1)} C_{q, m, q+m}^{\kappa, 1, \kappa} \hat{T}_{\kappa q+m}; \quad m = 0, \pm 1, \quad (3.41)$$

где  $\hat{S}_{\pm 1} = \mp \hat{S}_{\pm} / \sqrt{2}$  - т.н. сферические компоненты углового момента.

Применяя аппарат неприводимых тензорных операторов к (3.38), получаем следующие выражения для коэффициентов разложения  $r_{\kappa q}$ :

$$r_{\kappa q} = \frac{i\lambda\alpha_{st}\sqrt{2\kappa(\kappa+1)}}{\Gamma + i\Delta q} \left( C_{q, -1, q-1}^{\kappa, 1, \kappa} \varrho_{\kappa q-1} - C_{q, 1, q+1}^{\kappa, 1, \kappa} \varrho_{\kappa q+1} \right), \quad (3.42)$$

их подстановка в первое уравнение (3.39) дает

$$\frac{d}{dt} \varrho_{\kappa q} = -i\Delta q \varrho_{\kappa q} + \left( C_{q+1, -1, q}^{\kappa, 1, \kappa} F_{\kappa q+1} - C_{q-1, 1, q}^{\kappa, 1, \kappa} F_{\kappa q-1} \right), \quad (3.43)$$

$$F_{\kappa q} = \frac{2\lambda^2 \alpha_{st}^2 \kappa(\kappa+1)}{\Gamma + i\Delta q} \left( C_{q+1, -1, q}^{\kappa, 1, \kappa} \varrho_{\kappa q+1} - C_{q-1, 1, q}^{\kappa, 1, \kappa} \varrho_{\kappa q-1} \right). \quad (3.44)$$

Как видно, полная система уравнений распадается на множество независимых подсистем для каждого  $\kappa$ . Это объясняется тем, что входящие в (3.39) операторы меняют лишь проекцию углового момента, но не его величину.

Поскольку прошлый раздел был посвящен вычислению спектра (пусть и одного атома), исследуем статистические свойства спонтанных атомных фотоиспусканий. Основополагающей функцией, характеризующей эти свойства, является корреляционная функция второго порядка:

$$G(t) = Tr(\hat{S}_+ \hat{S}_+(t) \hat{S}_-(t) \hat{S}_- \hat{\rho}^{st}). \quad (3.45)$$

Члены с  $\hat{r}$  не дают вклада в итоговое выражение, поскольку в приближении сильного поля  $\langle -\alpha | \alpha \rangle \ll 1$ . На этот раз нам удобнее перейти в представлении Шредингера, поскольку в нем начальные условия для оператора  $\hat{\rho}(t)$  остаются эрмитовыми, что позволяет использовать анзац (3.26):

$$G(t) = Tr(\hat{S}_+ \hat{S}_- \hat{\rho}(t)); \quad \hat{\rho}(0) = \hat{S}_- \hat{\rho}^{st} \hat{S}_+. \quad (3.46)$$

В представлении неприводимых тензорных операторов это выражение преобразуется к виду

$$G(t) = \sum_{\kappa=0}^{2j} \sum_{q=-\kappa}^{\kappa} Tr(\hat{S}_+ \hat{S}_- \hat{T}_{\kappa q}) \varrho_{\kappa q}(t) = \quad (3.47)$$

$$2j(j+1) \sum_{\kappa=0}^{2j} \sum_{m=-j}^j \varrho_{\kappa 0}(t) \cdot (-1)^{j-m} \cdot (C_{m,-1,m-1}^{j,1,j})^2 \cdot C_{m,-m,0}^{j,j,\kappa}.$$

Система (3.43) может быть решена численно, однако с увеличением числа атомов это становится все более проблематичным. Как видно, корреляционная функция зависит лишь от  $\varrho_{\kappa 0}(t)$ , т.е. полное решение (3.43) для наших целей избыточно. Упростим исходную систему, воспользовавшись следующими соображениями. При больших числах атомов основной вклад в  $G(t)$  вносят коэффициенты  $\varrho_{\kappa 0}(t)$  с большими  $\kappa$ . Как известно, фигурирующие в (3.43) коэффициенты Клебша-Гордана при больших  $\kappa$  демонстрируют достаточно гладкую зависимость от  $q$  [121]. Поэтому можно ожидать такой же гладкой зависимости и от  $\varrho_{\kappa q}(t)$  (по крайней мере вблизи  $q = 0$  и на не слишком больших временах). Таким образом, появляется возможность упрощения (3.43,3.44), при этом не слишком возмущая точное решение. К примеру, можно просто заменить  $\varrho_{\kappa q} \approx \varrho_{\kappa q \pm 2}$ . Кроме того, можно одновременно подстраивать и выражения (3.44). Среди всех возможных приближений было выбрано то, что дает временную зависимость  $G(t)$ , наиболее близкую к точному численному решению. Оно имеет следующий вид:

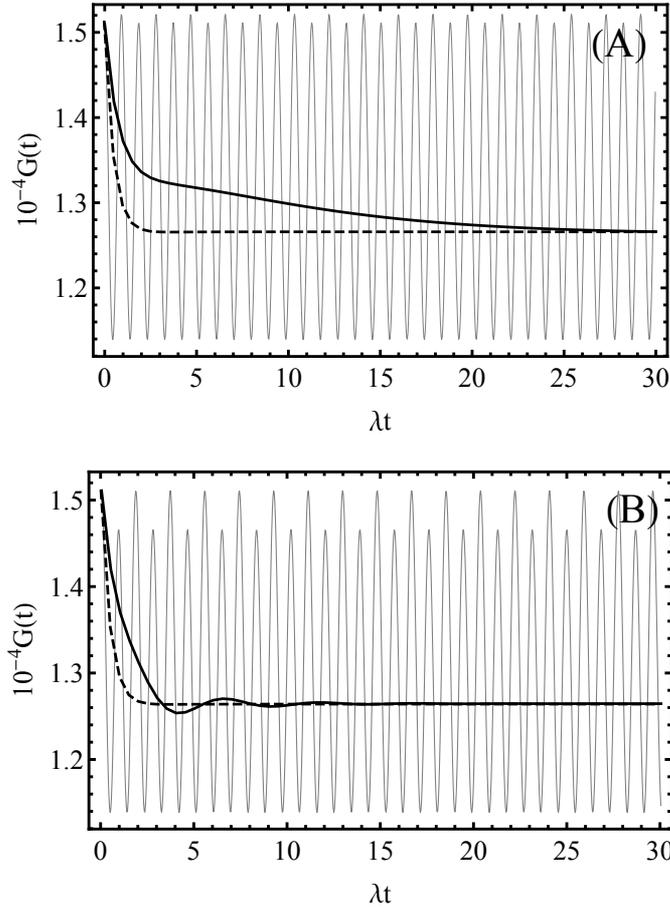


Рис. 29: Корреляционные функции атомных фотоиспусканий, вычисленные при  $\Delta = \lambda/10$  (А) и  $\Delta = 2\lambda/3$  (В). Остальные параметры задачи одинаковы для всех кривых:  $\mu = 10\lambda$ ,  $\nu = 3\lambda$ ,  $N = 25$ . Корреляционные функции в поле Глаубера обозначены тонкими линиями, а в поле Юрке-Столера - жирными; пунктиром обозначено приближенное аналитическое решение.

$$F_{\kappa q-1} = F_{\kappa q+1} \approx 2\lambda^2 \alpha_{st}^2 \kappa(\kappa + 1) \varrho_{\kappa q} \times \left( \frac{C_{q,-1,q-1}^{\kappa,1,\kappa}}{\Gamma + i\Delta(q-1)} - \frac{C_{q,1,q+1}^{\kappa,1,\kappa}}{\Gamma + i\Delta(q+1)} \right). \quad (3.48)$$

Подстановка в (3.43) приводит к набору уже независимых уравнений на  $\varrho_{\kappa 0}(t)$  для различных  $\kappa$ . Каждое из них имеет простое решение:

$$\varrho_{\kappa 0}(t) = \varrho_{\kappa 0}(0) \cdot \exp(-A_{\kappa} t) \quad (3.49)$$

$$A_{\kappa} = \frac{4\Gamma\lambda^2 |\alpha_{st}|^2 \kappa(\kappa + 1)}{\Gamma^2 + \Delta^2},$$

где  $\varrho_{\kappa 0}(0)$  вычисляется из (3.46), при этом  $\hat{\varrho}_{st}$  является максимально смешанным.

Сравним полученные результаты со случаем, когда внешнее поле находится в обычном когерентном состоянии Глаубера. Кинетическое уравнение получается из (3.35) путем замены всех операторов Юрке-Столера на операторы Глаубера. Если, как и в случае поля Юрке-Столера, поле Глаубера накачивается быстрым внешним источником, то можно считать его состояние неизменным в ходе эволюции. Тогда полное состояние системы в любой момент времени записывается в виде  $\hat{\rho} = \hat{\varrho} \otimes |\alpha_{st}\rangle_G \langle \alpha_{st}|$  (здесь учтено, что источник сильный и действует быстро, так что параметр когерентного состояния на самом деле не зависит от времени). Уравнение на атомный оператор  $\hat{\varrho}$  в отсутствие спонтанного распада атомов является уравнением фон Неймана:

$$\frac{d}{dt}\hat{\varrho} = -i[\lambda\alpha_{st}(\hat{S}_+ - \hat{S}_-) + \Delta\hat{S}_0, \hat{\varrho}]. \quad (3.50)$$

Его решение представляет собой (незатухающие) осцилляции Раби, и корреляционная функция фотоиспусканий второго порядка также их содержит. Сравнение временного поведения корреляционных функций в случае глауберовского поля и поля Юрке-Столера приведено на Рис. 29. Как видно, в последнем случае приближенное решение достаточно близко к точному, хотя и не содержит осцилляций Раби, возникающих при ненулевой отстройке. Асимптотические же значения на больших временах одинаковы:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = \left( \frac{2j(j+1)}{3} \right)^2, \quad (3.51)$$

поскольку, как следует из (3.49), лишь  $\varrho_{00}$  дает вклад в асимптотику, а все остальные  $\varrho_{\kappa 0}$  при  $\kappa \neq 0$  затухают со временем.

## Заключение

В данной работе были исследованы возможности управления квантово-оптическими системами при помощи обратной связи, основанной на переключениях фазы присутствующих в системе оптических полей. При этом использовался аппарат гибридных квантово-классических систем, позволяющий во многих случаях дальше продвинуться по пути аналитического решения, что выгодно отличает его от традиционных подходов [19, 24, 25], основанных на интерпретации эволюции системы в терминах стохастических процессов. Действие обратной связи предполагалось импульсным и достаточно быстрым для возможности оставаться в рамках марковских кинетических уравнений. В этом приближении было исследовано явление резонансной флуоресценции двухуровневого атома в классическом поле, чья фаза контролируется собственными спонтанными испусканиями атома. Спектр резонансной флуоресценции приобретает ярко выраженную асимметрию, чувствительную к отстройке внешнего поля. Кроме того, отдельные пики модифицированного триплета оказываются хорошо разрешенными даже в слабых полях, т.о. превращая их в удобные реперы частоты. В дополнение к спектральным свойствам фотоиспусканий, была также исследована их статистика. Продемонстрирована зависимость типа корреляций фотоиспусканий в различные пики триплета от знака отстройки внешнего поля, что является коренным отличием от известных классических результатов [85]. При рассмотрении задачи о статистике фотоиспусканий пары невзаимодействующих двухуровневых атомов в такой же цепи обратной связи обнаружена сильная антигруппировка фотонов, в то время как без обратной связи наблюдается строго пуассоновская статистика фотоотчетов.

Для атомов с  $\Lambda$ -подобной структурой энергетических уровней наиболее ярким явлением является когерентное пленение населенностей (КПН), поэтому был исследован вопрос о ее модификации в присутствии обратной связи. При

этом последняя инициировалась модифицированными событиями фотодетектирования спонтанных фотонов. Одной из возможных реализаций такого нестандартного процесса фоторегистрации в одномерном случае (например, в случае помещения атома в волноводоподобную структуру [122, 123, 124]) является детектирование в базисе произвольных ортогональных эллиптических поляризацій. Продемонстрирована возможность управления шириной и формой ‘темного’ резонанса при помощи варьирования параметров задачи.

Многоатомные системы явились следующим шагом на пути исследования возможных применений обратной связи обсуждаемого типа. Среди них особняком стоят системы типа атомарных бозе-конденсатов, обладающих макроскопической волновой функцией и потому представляющих интерес для исследования фундаментальных квантовых эффектов, таких как квантовое туннелирование и декогеренция. Была рассмотрена задача об управлении атомарным бозе-конденсатом невзаимодействующих атомов, локализованным в двухъямном оптическом потенциале, помещенном в интерферометр Маха-Цандера. Одна из ям зондировалась нерезонансным световым излучением, которое при взаимодействии с конденсатом приобретало фазовый сдвиг, зависящий от состояния конденсата в яме, и затем регистрировалось парой выходных фотодетекторов. Действие обратной связи инициировалось фоторегистрациями в этих детекторах и заключалось в быстром импульсном переключении оптического потенциала в одну из двух заранее заданных конфигураций. Показана возможность эффективного управления атомными населенностями путем подходящего выбора этих конфигураций.

Помимо систем элементарных излучателей, сами электромагнитными поля также являются типичными объектами исследования в квантовой оптике. Обратная связь часто используется для приготовления разнообразных экзотических состояний оптических полей. В данной работе был рассмотрен вопрос о стационарном состоянии поля в резонаторе с внешним источником, с обратной связью, меняющей фазу поля в резонаторе после каждой регистрации покинувших его фотонов. Выяснилось, что найденное стационарное состояние имеет существенно квантовую природу, и в предельном случае больших отстроек внешнего источника от частоты моды предложена упрощенная аналитическая модель, удовлетворительно описывающая наблюдаемый эффект.

Кроме того, рассмотрены задачи о взаимодействии электромагнитного поля, находящегося в специального типа суперпозиции когерентных состояний, с системами двухуровневых атомов. Показано, что при этом естественным образом также возникает обратная связь, основанная на переключении фазы поля, инициируемая вынужденными фотопоглощениями, которая может быть отнесена к когерентному типу. В теоретическую модель впервые явным образом включен механизм непрерывного восстановления суперпозиционного состояния поля. В случае многофотонного поля найдено аналитическое решение кинетического уравнения, на основе которого рассчитан спектр резонансной флуоресценции (для одного атома) и корреляционная функция спонтанных фотоиспусканий (для ансамбля невзаимодействующих атомов). Спектр оказался состоящим из одного пика, centered на резонансной частоте атома, а не поля, как в случае отсутствия обратной связи. Отсутствие боковых компонент объяснено на основе анализа корреляций, возникающих между атомом и полем в процессе эволюции. В случае многоатомной задачи исходное кинетическое уравнение сведено к системе скалярных уравнений, полученных с использованием техники неприводимых тензорных операторов и предложено ее приближенное аналитическое решение, хорошо согласующееся с численными расчетами. Обнаружено, что рассчитанные корреляционные имеют ярко выраженный диссипативный характер (даже в приближении медленного спонтанного распада атомных уровней), в отличие от тех же функций в классическом внешнем поле, демонстрирующих незатухающие осцилляции.

Полученные результаты позволяют говорить о высокой эффективности рассмотренных схем обратной связи для управления квантовыми системами. Более того, во многих случаях они приводят к нетривиальным и интересным с фундаментальной точки зрения модификациям уже известных явлений, таких как резонансная флуоресценция и КПН. Отдельный интерес представляют системы, подобные рассмотренной в последней Главе, проявляющие в процессе эволюции свойства самоорганизации. Разработанный метод анализа эволюции системы на основе гибридных квантовых кинетических уравнений является мощным инструментом исследования систем с обратной связью, основанной на переключениях фазы. До недавнего времени класс квантовых систем, в которых можно было экспериментально исследовать применения обратной связи (особенно это

касается обратной связи, основанной на измерениях), был весьма ограничен. Бурное развитие экспериментальных методик, позволяющих ставить эксперименты над малоразмерными квантовыми системами, сильно расширяет число доступных применений квантовой теории управления. В этой связи безусловно представляет интерес исследование различных подходов и методов к описанию систем, содержащих в себе механизмы обратной связи.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Ильичёву Леониду Вениаминовичу, без постоянного внимания и поддержки которого данная работа не могла бы быть выполнена.

## Список цитируемой литературы

- [1] M. Vitruvius Pollio, De Architectura Libri X/ К. Fensterbuch, Ed. Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft. - 1976.
- [2] Habib S., Jacobs K., Mabuchi H., Quantum feedback control: How can we control quantum systems without disturbing them?// Los Alamos Science. - 2002. - V. 27. - pp. 126-135.
- [3] Diels H., Antike Technik/ Berlin: Teubner. - 1920.
- [4] Maxwell J. C. , On Governors// Proc. Roy. Soc. London. - 1868. - V. 16. - pp. 270-283.
- [5] Вышнеградский И. А., О регуляторах прямого действия/ СПб. - 1877.
- [6] Колмогоров А. Н., Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей// ИАН СССР, серия математическая. - 1941. - Т. 5. - С. 3-14.
- [7] Винер Н., Кибернетика, или управление и связь в животном и машинном мире/ М.: Советское радио. - 1968.
- [8] Bernulli J., Curvatura radii in diaphanis non uniformibus, Solutioque Problematis a se in Actis 1696, p. 269, propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua grave a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, et de curva Synchrona seu radiorum unda construenda// Acta Eruditorum. - 1697. - V.19. - p. 206; Problema novum ad cuius solutionem Mathematici invitantur// Acta Eruditorum. - 1696. - V.18. - p. 269.
- [9] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. и Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов. 2-е изд./ М.: Наука. - 1969.
- [10] Kalman R. E., Contributions to the theory of optimal control// Bol. Soc. Mat. Mexicana. - 1960. - V. 5. - pp. 102-119.

- [11] Kalman R. E., A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems// ASME J. Basic Eng. - 1960. - V. 82 - pp.34-45.
- [12] Kalman R. E., and Bertram J.E., Control System Analysis and Design via the 'Second Method' of Lyapunov. I. Continuous-time Systems// Trans. ASME J. Basic Eng. - 1960. - pp. 371-393.
- [13] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения/ Харьков. - 1892.
- [14] Стратонович Р. Л., Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления/ М.: Изд-во МГУ, 1966.
- [15] Zhang J. *et al.*, Quantum feedback: theory, experiments, and applications// arXiv:1407.8536v3 - 2014.
- [16] Y. Yamamoto, N. Imoto, S. Machida, Amplitude squeezing in a semiconductor laser using quantum nondemolition measurement and negative feedback, Phys. Rev. A 33 (1986) 3243-3261.
- [17] Shapiro J. H. *et al.*, Theory of light detection in the presence of feedback// J. Opt. Soc. Am. B. - 1987. - V.4. - p. 1604.
- [18] Diedrich F. *et al.*, Laser Cooling to the Zero-Point Energy of motion// Phys. Rev. Lett. - 1989. - V. 62. - p. 403.
- [19] Wiseman H. M., Milburn G. J., Quantum Measurement and Control/ Cambridge: Cambridge University Press. - 2009.
- [20] James M. R., Control Theory: From Classical to Quantum Optimal, Stochastic, and Robust Control/ Australian National University. - 2005.
- [21] Mabuchi H., Doherty A. C., Cavity Quantum Electrodynamics: Coherence in Context// Science. - 2002. - V. 29. - pp. 1372-1377.
- [22] Zhang G., James M. R., Quantum feedback networks and control: A brief survey// Chinese Science Bulletin. - 2012. - V. 5. - pp. 2200-2214.
- [23] Serafini A., Feedback control in quantum optics: an overview of experimental breakthroughs and areas of application/ ISRN Optics 2012. - 2012. - p. 275016.
- [24] Belavkin V. P., Quantum stochastic calculus and quantum nonlinear filtering// J. Multivariate Anal. - 1992. - V. 42. - pp. 171-202.

- [25] Belavkin V. P., Quantum continual measurements and a posteriori collapse on CCR// Commun. Math. Phys. - 1992. - V. 146, pp. 611-635.
- [26] Wiseman H. M., Milburn G. J., Quantum theory of field-quadrature measurements// Phys. Rev. A. - 1993. - V. 47. - pp. 642-662.
- [27] Wiseman H. M., Milburn G. J., Quantum theory of optical feedback via homodyne detection// Phys. Rev. Lett. - 1993. - V. 70. - pp. 548-551.
- [28] Carmichael H. J., An Open Quantum Systems Approach to Quantum Optics/ Berlin: Springer Verlag. - 1993.
- [29] Carmichael H. J., Singh S., Vyas R., Rice P. R., Photoelectron waiting times and atomic state reduction in resonance fluorescence// Phys. Rev. A. - 1989. - V.39. - pp. 1200-1218.
- [30] Wiseman H. M., Quantum theory of continuous feedback// Phys. Rev. A. - 1994. - V. 49. - pp. 2133-2150.
- [31] Srinivas M. D., Davies E. B., Photon counting probabilities in quantum optics// J. Mod. Opt. - 1981. - V. 28. - pp. 981-996.
- [32] Gisin N., A model for the macroscopic description and continual observations in quantum mechanics// Phys. Rev. Lett. - 1984. - V. 52. - pp. 1657-1660.
- [33] Diósi L., Stochastic pure state representation for open quantum systems// Phys. Lett. A. - 1986. - V. 114A. - pp. 451-454.
- [34] Yanagisawa M., Kimura H., A Control Problem for Gaussian States/ Y. Yamamoto, S. Hara (Eds.), Learning, Control and Hybrid Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences// New York: Springer-Verlag - pp. 249-313.
- [35] Doherty A. C., Jacobs K., Feedback control of quantum systems using continuous state estimation// Phys. Rev. A. - 1999. - V. 60. - pp. 2700-2711.
- [36] Wiseman H. M., Milburn G. J., All-optical versus electro-optical quantum-limited feedback// Phys. Rev. A. - 1994. - V. 49. - p. 4110.
- [37] Lloyd S., Coherent quantum feedback// Phys. Rev. A. - 2000. - V. 62. - 022108.
- [38] Nelson R. J., Weinstein Y., Cory D., Lloyd S., Experimental demonstration of fully coherent quantum feedback// Phys. Rev. Lett. - 2000. - V. 85. - pp. 3045-3048.

- [39] Jacobs K., Wang X., Wiseman H. M., Coherent feedback that beats all measurement-based feedback protocols// *New J. Phys.* - 2014. - V.16. - p. 073036.
- [40] Qi B., Guo L., Is measurement-based feedback still better for quantum control systems?// *Sys. Contr. Lett.* - 2010. - V. 59. - pp. 333-339.
- [41] Gardiner C. W., Driving a Quantum System with the Output Field From Another Driven Quantum System// *Phys. Rev. Lett.* - 1993. - V.70. - p.2269.
- [42] James M. R., Nurdin H. I., Petersen I. R.,  $H^\infty$  Control of Linear Quantum Stochastic Systems// *IEEE Trans. Automat. Contr.* - 2008. - V. 53. - pp. 1787-1803.
- [43] Gardiner C. W., Colett M. J., Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation// *Phys. Rev. A.* - 1985. - V.31. - p. 3761.
- [44] Gardiner C. W., Zoller P., *Quantum Noise*/ Berlin: Springer. - 2000.
- [45] Gough J. E., James M. R., The series product and its application to quantum feedforward and feedback networks// *IEEE Trans. Automat. Contr.* - 2009. - V. 54. - pp. 2530-2544.
- [46] Kerckhoff J., Lehnert K.W., Superconducting microwave multivibrator produced by coherent feedback// *Phys. Rev. Lett.* - 2012. - V. 109 - 153602.
- [47] Mabuchi H., Nonlinear interferometry approach to photonic sequential logic// *Appl. Phys. Lett.* - 2011. - V. 99. - 153103.
- [48] Zhang J. *et al.*, Quantum coherent nonlinear feedbacks with applications to quantum optics on chip// *IEEE trans. Automat. Contr.* - 2012. - V. 57. - pp. 1997-2008.
- [49] Liu Z.-P. *et al.*, Feedback-induced nonlinearity and superconducting on-chip quantum optics// *Phys. Rev. A.* - 2013. - V. 88. - 063851.
- [50] Nurdin H. I., James M. R., Petersen I. R., Coherent quantum LQG control// *Automatica.* - 2009. - V. 45. - pp. 1837-1846.
- [51] Hamerly R., Mabuchi H., Advantages of coherent feedback for cooling quantum oscillators// *Phys. Rev. Lett.* - 2012. - V. 109. - p. 173602.

- [52] Cohadon P. F., Heidmann A., Pinard M., Cooling of a mirror by radiation pressure// Phys. Rev. Lett. - 1999. - V. 83 . - pp. 3174-3177.
- [53] Steixner V., Rabl P., Zoller P., Quantum feedback cooling of a single trapped ion in front of a mirror// Phys. Rev. A. - 2005. - V.72. - p. 043826.
- [54] Bushev P. *et al.*, Feedback Cooling of a Single Trapped Ion// Phys. Rev. Lett. - 2006. - V.96. - p. 043003.
- [55] Kubanek A. *et al.*, Photon-by-photon feedback control of a single-atom trajectory// Nature. - 2009. - V.462. - pp. 898-901.
- [56] Fischer T. *et al.*, Feedback on the Motion of a Single Atom in an Optical Cavity// Phys. Rev. Lett. - 2002. - V.88. - p. 163002.
- [57] Morrow N. V., Dutta S. K., Raithel G., Feedback Control of Atomic Motion in an Optical Lattice// Phys. Rev. Lett. - 2002. - V.88. - p. 093003.
- [58] Negretti A., Poulsen U. V., Mølmer K., Quantum Superposition State Production by Continuous Observations and Feedback// Phys. Rev. Lett. - 2007. - V.99. -p. 223601.
- [59] Nurdin H. I., Yamamoto N., Distributed entanglement generation between continuous-mode Gaussian fields with measurement-feedback enhancement// Phys. Rev. A. - 2012. - V.86. - p. 022337.
- [60] Li Y., Luo B., Guo H., Entanglement and quantum discord dynamics of two atoms under practical feedback control// Phys. Rev. A. - 2011. - V.84. - p. 012316.
- [61] Wiseman H. M., Mancini S., Wang J., Bayesian feedback versus Markovian feedback in a two-level atom// Phys. Rev. A. - 2002. - V.66. - p. 013807.
- [62] van Handel R., Stockton J. K., Mabuchi H., Feedback control of quantum state reduction// IEEE Trans. Automat. Control. - 2005. - V.50. - p. 768.
- [63] Iida S. *et al.*, Experimental Demonstration of Coherent Feedback Control on Optical Field Squeezing// IEEE Trans. Automat. Control. - 2012. - V.57. - p. 2045.
- [64] Crisafulli O. *et al.*, Squeezed light in an optical parametric oscillator network with coherent feedback quantum control// Opt. Express. - 2013. - V.21. - p. 18371.
- [65] Brańczyk A.M. *et al.*, Quantum control of a single qubit// Phys. Rev. A. - 2007. - V.75. - p. 012329.

- [66] Gilett G. G. *et al.*, Experimental Feedback Control of Quantum Systems Using Weak Measurements// *Phys. Rev. Lett.* - 2010. - V.104. - p. 080503.
- [67] Horoshko D. B., Kilin S. Ya., Direct Detection Feedback for Preserving Quantum Coherence in an Open Cavity// *Phys. Rev. Lett.* - 1997. - V.78. - p. 840.
- [68] Хорошко Д.Б., Килин С.Я., Резонансная флуоресценция, возбуждаемая макроскопической суперпозицией в цепи обратной связи// *ЖЭТФ.* – 2000. – Т. 117. – С. 844-852.
- [69] Zippilli S. *et al.*, Scheme for decoherence control in microwave cavities// *Phys. Rev. A* . - 2003. - V.67. - p. 052101.
- [70] Carvalho A. R. R., Hope J. J., Stabilizing entanglement by quantum-jump-based feedback// *Phys. Rev. A.* - 2007. - V.76. - p. 010301(R).
- [71] Blanchard Ph., Jadczyk A., Events and piecewise deterministic dynamics in event-enhanced quantum theory// *Phys. Lett. A.* - 1993. - V.175. - p. 157.
- [72] Blanchard Ph., Jadczyk A., Event-enhanced quantum theory and piecewise deterministic dynamics// *Ann. der Phys.* - 1995. - V.4. - p. 583.
- [73] Redfield A. G., On the Theory of Relaxation Processes// *IBM J. Res. Dev.* - 1957. - V.1. - pp. 19-31.
- [74] Lindblad G., On the generators of quantum dynamical semigroups// *Commun. Math. Phys.* - 1976. V.48. - p.119.
- [75] Frasca M., A modern review of the two-level approximation// *Annals of Physics.* - 2003. - V.306. - p. 193.
- [76] Berman P. R., Salomaa R., Comparison between dressed-atom and bare-atom pictures in laser spectroscopy// *Phys. Rev. A.* - 1982. - V.25. - p. 2667.
- [77] Courtens E., Szöke A., Time and spectral resolution in resonance scattering and resonance fluorescence// *Phys. Rev. A.* - 1977. - V.15. - p. 1588.
- [78] Раутиан С. Г., Некоторые вопросы теории газовых квантовых генераторов// *Труды ФИАН.* - 1968. - Т.43. - С.3-115.
- [79] Mollow B. R., Power Spectrum of Light Scattered by Two-Level Systems// *Phys. Rev.* - 1969. - V.188. - p. 1969.

- [80] Breuer H. P., Petruccione F., *The Theory of Open Quantum Systems*/ Oxford: Oxford University Press. - 2002.
- [81] Diósi L., *Hybrid Quantum-Classical Master Equations*// arXiv:1401.0476v1 - 2014.
- [82] van Kampen N.G., *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*/ Amsterdam: North Holland. - 1984.
- [83] Walls D. F., Milburn G. J., *Quantum Optics*/ Berlin: Springer-Verlag. - 2008.
- [84] Carmichael H. J., Walls D.F., A quantum-mechanical master equation treatment of the dynamical Stark effect// *J. Phys. B.* - 1976. - V.9. - p. 1199.
- [85] Cook R. J., Photon number statistics in resonance fluorescence// *Phys. Rev. A.* - 1981. - V.23. - p. 1243.
- [86] Gray H. R., Whitley R. M., Stroud C.R., Coherent trapping of atomic populations// *Opt. Lett.* - 1978. - V. 3. - p. 218.
- [87] Alzetta G. *et al.*, An experimental method for the observation of r.f. transitions and laser beat resonances in oriented Na vapour// *Nuovo Cimento B.* - 1976. - V. 36. p. 5.
- [88] Arimondo E., Orriols G., Nonabsorbing atomic coherences by coherent two-photon transitions in a three-level optical pumping// *Lett. Nuovo Cimento.* - 1976. - V.17. - p. 333.
- [89] Carmichael H. J., *An Open Systems Approach to Quantum Optics - Lecture Notes in Physics, m18*/ Berlin: Springer. - 1993.
- [90] Taichenachev A., Tumaikin A., Yudin V., On Dynamics of Slow Atoms under Conditions of Coherent Population Trapping in Spatially-Nonuniform Polarized Fields// *Laser Physics.* 1992. - V. 2. - p. 575.
- [91] Раутиан С. Г., Смирнов Г. И., Шалагин А. М., *Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул*/ Новосибирск: Наука. - 1979.
- [92] Szigeti S. S. *et al.*, Continuous measurement feedback control of a Bose-Einstein condensate using phase-contrast imaging// *Phys. Rev. A.* - 2009. - V.80. - p. 013614.

- [93] Szigeti S. S. *et al.*, Feedback control of an interacting Bose-Einstein condensate using phase-contrast imaging// Phys. Rev. A. - 2010. - V.82. - p. 043632.
- [94] Szigeti S. S. *et al.*, Robustness of System-Filter Separation for the Feedback Control of a Quantum Harmonic Oscillator Undergoing Continuous Position Measurement// Phys. Rev. A **87**, 013626 (2013).
- [95] Hush M. R. *et al.*, Controlling spontaneous-emission noise in measurement-based feedback cooling of a Bose–Einstein condensate// New J. Phys. - 2013. - V.15. - p. 113060.
- [96] Wiseman H. M., Thomsen L. K., Reducing the Linewidth of an Atom Laser by Feedback// Phys. Rev. Lett. - 2001. - V.86. - p. 1143.
- [97] Thomsen L. K., Wiseman H. M., Atom-laser coherence and its control via feedback// Phys. Rev. A. - 2002. - V.65. - p. 063607.
- [98] Albiez M. *et al.*, Direct Observation of Tunneling and Nonlinear Self-Trapping in a Single Bosonic Josephson Junction// Phys. Rev. Lett. - 2005. - V.95. - p. 010402.
- [99] Andrews M. R. *et al.*, Direct, Nondestructive Observation of a Bose Condensate// Science. - 1996. - V.273. - p. 5271.
- [100] Javanainen J., Oscillatory exchange of atoms between traps containing Bose condensates// Phys. Rev. Lett. - 1996. - V.57. - pp. 3164-3166.
- [101] Jack M. W., Collett M. J., Walls D. F., Coherent quantum tunneling between two Bose-Einstein condensates// Phys. Rev. A. - 1996. - V.54. - p. R4625.
- [102] Nesterenko V. O., Novikov A. N., Suraud E., Transport of the repulsive Bose–Einstein condensate in a double-well trap: interaction impact and relation to the Josephson effect// Laser Phys. - 2014. - V.24. - p. 125501.
- [103] Il'ichev L. V., Chapovskii P. L., Decoherence of an atomic condensate in a double-well trap at optical probing// JETP Letters. - 2015. - V.102. - pp. 14-18.
- [104] Blasiak P. *et al.*, Heisenberg–Weyl algebra revisited: combinatorics of words and paths// J. Phys. A: Math. Theor. - 2008. - V.41. - p. 415204.
- [105] Schrödinger E., Die gegenwertige Situation in der Quantenmechanik// Naturwissenschaften. - 1935. - V.23. - p. 807, 823, 844.

- [106] Nielsen M. A., Chuang I. I., Quantum Computation and Quantum Information/ Cambridge: Cambridge University Press. - 2010.
- [107] Yurke B., Stoler D., Generating quantum mechanical superpositions of macroscopically distinguishable states via amplitude dispersion// Phys. Rev. Lett. - 1986. - V.57. - p.13.
- [108] Nieto M. M., Displaced and Squeezed Number States// Phys. Lett. A. - 1997. - V.229. - p. 135.
- [109] Senitzky I. R., Harmonic Oscillator Wave Functions// Phys. Rev. - 1954. - V.95. - p. 1115.
- [110] Glancy S., de Vasconcelos H. M., Methods for producing optical coherent state superpositions// JOSA B. - 2008. - V.25. - p.12.
- [111] Gerry C.C., Generation of optical macroscopic quantum superposition states via state reduction with a Mach-Zehnder interferometer containing a Kerr medium// Phys. Rev. A. - 1999. - V.59. - p. 4095.
- [112] Neergaard-Nielsen J. S. *et al.*, Generation of a Superposition of Odd Photon Number States for Quantum Information Networks// Phys. Rev. Lett. - 2006. - V.97. - p. 083604.
- [113] Jeong H., Kim. M. S., Lee J., Quantum-information processing for a coherent superposition state via a mixed entangled coherent channel// Phys. Rev. A. - 2001. - V.64. - p. 052308.
- [114] Dotsenko I. *et al.*, Quantum feedback by discrete quantum nondemolition measurements: Towards on-demand generation of photon-number states// Phys. Rev. A. - 2009. - V.80. - p. 013805.
- [115] Vitali D., Tombesi P., Grangier P., Conditional Schrodinger cats generation and detection by quantum non-demolition measurements// App. Phys. B. - 1997. - V.64. - p. 249.
- [116] Sayrin C. *et al.*, Real-time quantum feedback prepares and stabilizes photon number states// Nature. - 2011. - V.477. - p. 73.
- [117] Schleich W. P., Quantum optics in phase space/ Berlin: Wiley-VCH. - 2001.

- [118] Peres A., Separability Criterion for Density Matrices// Phys. Rev. Lett. - 1996. - V.77. - p. 1413.
- [119] Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R., Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions// Phys. Rev. A. - 1996. - V.223. - p. 1.
- [120] Biedenharn L. C., Louck J. D., Angular Momentum in Quantum Physics - Theory and Application/ Massachusetts: Addison-Wesley. - 1981.
- [121] Варшалович Д. А., Москалёв А. Н., Херсонский В. К., Квантовая теория углового момента/ Ленинград: Наука. - 1975.
- [122] Knight J. C. *et al.*, All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding// Opt. Lett. - 1996. - V.21. - p. 1547.
- [123] Желтиков А. М., Дырчатые волноводы// УФН . - 2000. - Т. 170. - С. 1203-1215.
- [124] Fini J. M. *et al.*, Low-loss hollow-core fibers with improved single-modedness// Opt. Express. - 2013. - V.21(5). - p. 6233.

## Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах ВАК:

1. Томилин В.А., Ильичёв Л.В., Резонансная флуоресценция двухуровневого атома в цепи обратной связи// Письма в ЖЭТФ. - 2011. - Т. 94. - вып. 9.- С.734-737.
2. Томилин В.А., Ильичёв Л.В., Статистика резонансной флуоресценции пары атомов в цепи обратной связи// ЖЭТФ. - 2013. - Т.143. - вып. 2. - С.211-215.
3. Томилин В.А., Ильичёв Л.В., Статистика резонансной флуоресценции двухуровневого атома в цепи обратной связи// Доклады Академии Наук. - 2013. - Т.452. - вып.4. - С.282-284.
4. Tomilin V.A., Il'ichov L.V., Peculiarities of resonance fluorescence statistics for a two-level atom in frequency selective feedback loop// Ann. Phys. (Berlin). - 2014. - V.526. - issue 11-12. - pp.520-526.
5. Томилин В.А., Ильичёв Л.В., Квантованная оптическая мода в цепи обратной связи с переключением фазы// Письма в ЖЭТФ. - 2014.- Т. 100. - вып. 11. - С.858-862.
6. Tomilin V.A., Il'ichov L.V., BEC Dynamics in a Double-Well with Interferometric Feedback// Ann. Phys. (Berlin). - 2016. - V.528. - issue 7-8. - pp.619-625.
7. Tomilin V.A., Il'ichov L.V., The stationary resonance fluorescence of a two-level atom in a cat-state field// Opt. Commun. - 2016. - V.375. - pp.38-42.
8. Tomilin V.A., Il'ichov L.V.,  $\Lambda$ -scheme feedback spectroscopy// Opt. Commun. - 2017. - V.391. - pp.57-62.

9. Томилин В.А., Ильичёв Л.В., Спектроскопия  $\Lambda$ -атома с использованием обратной связи// Квантовая Электроника. – 2017. – Т. 47. - С. 474–478.
10. Tomilin V.A., Il'ichov L.V., Correlations of photoemissions in a multi-atomic ensemble driven by a cat-state field// Phys. Rev. A. - 2017. - V.96 - p. 063805.

Тезисы конференций:

11. Томилин В.А., О спектре резонансной флуоресценции двухуровневого атома в цепи обратной связи/ Материалы XLIX Международной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс” - физика. - 2011. - С.134.
12. Tomilin V.A., Il'ichov L.V., Resonance Fluorescence of One and Two Atoms in Feedback Loop/ “ICONO/LAT 2013” technical digest – IFP2. - 2013. - p.114.
13. Tomilin V.A., Il'ichov L.V., Elementary spectroscopic effects in a cat-state field/ “MPLP-2016” technical digest. - 2016.
14. Tomilin V.A., Il'ichov L.V., Spectral and statistical properties of photo-emissions from multiatomic ensembles in a cat-state field/ “ICQOQI'2017” technical digest. - 2017.