

Г. Е. ПУХОВ  
 (Киев)

### НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ УРАВНОВЕШИВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ\*

Рассматриваются методы, имеющие значение при проектировании и эксплуатации измерительных и вычислительных устройств. Эти методы позволяют производить автоматический и ручной подбор напряжений или токов некоторых источников или же пассивных параметров электрической цепи так, чтобы в результате определенные точки ее стали потенциально-нулевыми или эквипотенциальными. Особое внимание уделяется специальным методам, учитывающим характерные свойства электрических цепей и позволяющим обеспечить неизбежную сходимость процессов уравнивания.

Под уравниванием электрической цепи понимают автоматический или ручной процесс подбора напряжений или токов некоторых источников или же пассивных параметров, в результате которого определенные точки ее становятся потенциально-нулевыми или эквипотенциальными.

С задачами уравнивания постоянно приходится иметь дело при проектировании и эксплуатации различных измерительных, вычислительных и управляющих устройств. Для решения их могут быть применены как известные общие методы теории управления, так и некоторые специальные методы, учитывающие определенные свойства электрических цепей.

Рассмотрим некоторые методы уравнивания электрических цепей.

На рис. 1 изображена электрическая цепь в виде многополюсника. Внутренняя схема его может быть произвольной. Многополюсник может содержать независимые источники напряжения и тока, т. е. быть активным, что отмечено на рисунке буквой А.



Рис. 1. Электрическая цепь.

Напряжения  $u_{a1}$  и токи  $i_{a1}$  будем считать уравнивающими (управляющими). Подбирать их можно или путем включения на стороне  $a$  регулируемых сопротивлений, или источников напряжения и тока. Напряжения  $u_{b1}$  и токи  $i_{b1}$  на стороне  $b$  многополюсника являются уравниваемыми. Задача уравнивания заключается в том, чтобы получить нулевые значения  $u_{b1}$  и  $i_{b1}$  путем соответствующего

\* Материал доложен на VI Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений в сентябре 1964 г. в Новосибирске.

подбора  $u_{a_i}$  или  $i_{a_i}$ . Элементы многополюсника могут быть в общем случае нелинейными. Этот случай, однако, далее будет отмечаться особо, а в остальных — будет предполагаться, что многополюсник  $A$  линейный. Связи между его напряжениями и токами при учете выбранных положительных направлений тогда могут быть представлены в следующем виде:

$$i_a = g_{aa} u_a - g_{ab} u_b + \bar{i}_a, \quad (1)$$

$$i_b = -g_{ba} u_a + g_{bb} u_b + \bar{i}_b. \quad (2)$$

Здесь  $g_{aa}$  и  $g_{bb}$  — неособенные симметрические квадратные матрицы собственных и взаимных проводимостей полюсов на сторонах  $a$  и  $b$ ;

$g_{ab}$  и  $g_{ba}$  — произвольные квадратные матрицы взаимных проводимостей с неотрицательными компонентами, причем  $g_{ba} = g_{ab}^*$ , где знак\* означает переход к транспонированной матрице;

$i_a$  и  $i_b$  — векторы токов;

$u_a$  и  $u_b$  — векторы напряжений на сторонах  $a$  и  $b$ ;

$\bar{i}_a$  и  $\bar{i}_b$  — значения векторов  $i_a$  и  $i_b$  при  $u_a = 0$  и  $u_b = 0$ , т. е. при коротких замыканиях всех полюсов многополюсника на «землю».

В практических задачах матрицы  $g_{ab}$  и  $g_{ba}$  являются неособенными, что далее и будет предполагаться. Поскольку в уравновешенном состоянии цепи напряжения  $u_b$  и токи  $i_b$  должны иметь нулевые значения, то из (2) видно, что целью уравновешивания в сущности является такое распределение напряжений, при котором будет иметь место уравнение

$$g_{ba} u_a = \bar{i}_b. \quad (3)$$

Из этого, в частности, следует, что схема многополюсника может выбираться так, чтобы матрицы  $g_{aa}$  и  $g_{bb}$ , так как они не входят в выражение (3), были диагональными и равными произведениям некоторых чисел  $g_a$  и  $g_b$  на единичную матрицу  $E$ , т. е.

$$g_{aa} = g_a E \text{ и } g_{bb} = g_b E. \quad (4)$$

Эта возможность в дальнейшем будет, естественно, учитываться. Элементы матриц уравнений (1) и (2) в зависимости от режима работы цепи и характера ее элементов являются омическими, комплексными или операторными проводимостями. В дальнейшем будем иметь в виду первый случай.

Как уже упоминалось, для уравновешивания цепи могут привлекаться общие методы, известные в теории управления, а также некоторые специальные методы. Ниже рассмотрим: метод уравновешивания при помощи пропорциональных усилителей; уравновешивание по методу минимизации суммы квадратов уклонений, т. е. суммы квадратов напряжений  $u_{b_i}$ ; уравновешивание при помощи добавочной цепи для преобразования уклонений; уравновешивание по методу обратных операторов; амплитудно-импульсный, фазовый и параметрический методы. Первые два метода хорошо известны. Поэтому основное внимание будет уделено последним пяти методам.

Необходимыми условиями практической применимости различных методов уравновешивания являются неизбежная сходимость и точность уравновешивания при любой неособенной матрице взаимных проводи-

ностей  $g_{ba}$ , т. е. точность реализации зависимостей (3) в уравновешенном состоянии. К дополнительным условиям относятся требования простоты уравнивающих устройств, достаточная скорость сходимости процесса уравнивания, особенно при ручном уравнивании и др.

Названные методы уравнивания исследуются лишь в отношении возможности получения неизбежной сходимости процессов уравнивания.

Простейшим методом уравнивания является хорошо известный в вычислительной технике метод, основанный на преобразовании напряжений  $u_b$  и  $u_a$  при помощи пропорциональных усилителей (рис. 2), когда

$$u_a = -k u_b, \quad i_b = 0, \quad (5)$$

где  $k$  — коэффициент усиления усилителей.

Подставляя (5) в (2), получим

$$\left(\frac{g_{bb}}{k} - g_{ba}\right) u_b + \frac{i_b}{k} = 0. \quad (6)$$

Отсюда видно, что при  $k \rightarrow \infty$  напряжение  $u_b \rightarrow 0$ , т. е. становится потенциально-нулевым.

Этот так называемый альфа-метод [1, 2], к сожалению, не всегда может быть применим, так как не обладает неизбежной сходимостью. Действительно, связь между уравниваемыми и уравнивающими напряжениями определяется, как это видно из уравнения

$$u_b = -g_{bb}^{-1} g_{ba} u_a - g_{bb}^{-1} \bar{i}_b, \quad (7)$$

матрицей

$$P_a = -g_{bb}^{-1} g_{ba}. \quad (8)$$

Неизбежная сходимость имела бы место, если бы матрица  $P_a$  могла быть представлена в виде [2]

$$P = SW, \quad (9)$$

где  $S$  — некоторая неособенная диагональная матрица;

$W$  — симметрическая положительно определенная матрица.

При произвольной матрице проводимостей  $g_{ba}$  представить  $P_a$  в виде (9), очевидно, нельзя, и поэтому процесс уравнивания цепи (см. рис. 2) **необязательно сходится**.

Стремление получить обязательно сходящийся процесс уравнивания для любых объектов, включая и объекты типа «черный ящик», привело в теории управления к появлению различных градиентных методов. К простейшим из них относится метод минимизации суммы квадратов уклонений, или квадрата длины вектора  $u_b$ :

$$\mu = u_b \cdot u_b = \sum_{i=1}^{i=n} u_{b_i}^2. \quad (10)$$

Принципиальная схема уравнивания приведена на рис. 3. Логическое устройство ЛУ поочередно воздействует на регулируемые источники  $u_{a_i}$  или включаемые вместо них сопротивления так, чтобы величина  $\mu$  все время уменьшалась, т. е. чтобы  $\frac{\partial \mu}{\partial t} < 0$ .

Теория этого метода и доказательство неизбежной сходимости приводятся в [3]. В СССР метод был использован, например, при создании

математической машины МН 11 [4]. Несмотря на простоту и универсальность, методу присуща слишком медленная сходимость, особенно в области малых значений  $\mu$ . Поэтому практически его целесообразно применять в сочетании с другими методами.

Рассмотрим теперь методы уравнивания при помощи дополнительной цепи для преобразования вектора напряжений  $u_b$  — сигма-метод и ро-метод.

Схема уравнивания по сигма-методу приведена на рис. 4. Она отличается от уравнивания по обычному альфа-методу тем, что между входами пропорциональных усилителей и выходами линейного многополюсника А включается точно такой же по конфигурации многополюсник П, но пассивный. Назначение этого многополюсника — преоб-

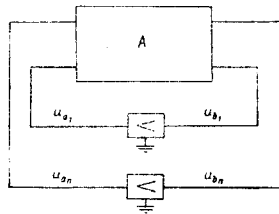


Рис. 2. Альфа-метод уравнивания

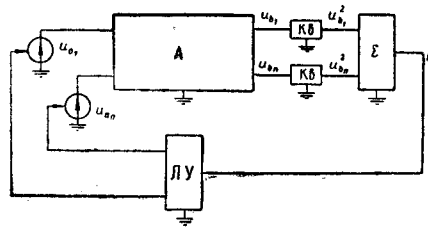


Рис. 3. Уравнивание по методу минимизации суммы квадратов отклонений.

разовывать напряжения  $u_b$  в напряжения  $u_c$ , а последнее уже использовать для получения управляющих напряжений  $u_a$ . Легко показать, что при уравнивании по сигма-методу можно получить неизбежную сходимость. Для выяснения этого установим связь между векторами  $u_a$  и  $u_c$ . При принятых условиях справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 0 &= g_{aa} u_c - g_{ab} u_b, \\ -i_b &= -g_{ba} u_c + g_{bb} u_b. \end{aligned} \quad (11)$$

Исключая вектор  $i_b$  при помощи уравнения (2), получаем

$$u_c = (E - 2g_{ba}^{-1} g_{bb} g_{ab}^{-1} g_{aa})^{-1} (-u_a + g_{ba}^{-1} i_b). \quad (12)$$

Отсюда матрица  $P_\sigma$ , определяющая сходимость процесса уравнивания, оказывается равной

$$P_\sigma = -(E - 2g_{ba}^{-1} g_{bb} g_{ab}^{-1} g_{aa})^{-1}.$$

Учитывая теперь, что матрицы  $g_{aa}$  и  $g_{bb}$  практически могут выбираться так, чтобы имели место равенства (4), можем записать

$$P_\sigma = -(E - 2g_a g_b g_{ba}^{-1} g_{ab}^{-1})^{-1}. \quad (13)$$

При достаточно больших  $g_a$  и  $g_b$ , что легко достижимо, матрица  $P_\sigma$ , очевидно, может быть представлена в виде (9), и, следовательно, сигма-метод уравнивания является сходящимся.

Схема уравнивания по ро-методу отличается от рассмотренной (сигма-метод) лишь местом включения усилителей (рис. 5). Можно показать, что в отношении сходимости оба они равноценны. С другой стороны, ро-метод интересен тем, что позволяет создавать так называемые обратимые вычислительные устройства [2] и получать потенциалы



В данном варианте метод обладает и свойством автономности. Действительно, записывая при помощи якобиана  $\frac{\partial f}{\partial u_a}$  (17) и (18) в виде

$$u_b + \frac{\partial f}{\partial u_a} \delta u_a = 0, \quad \tau \frac{\partial u_a}{\partial t} = \delta u_a \quad (19)$$

и учитывая, что

$$\begin{aligned} u_{a_1} &= f_1(u_{a_1}, \dots, u_{a_n}), \\ &\dots \dots \dots \\ u_{a_n} &= f_n(u_{a_1}, \dots, u_{a_n}), \end{aligned} \quad (20)$$

или сокращенно

$$u_b = f(u_a), \quad (21)$$

легко видеть, что

$$f + \frac{\partial f}{\partial u_a} \frac{\partial u_a}{\partial t} = 0. \quad (22)$$

Отсюда

$$f = f(0) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (23)$$

Таким образом, каждая невязка  $f_i$  изменяется во времени независимо (автономно) от других. Оба рассмотренных варианта уравнивания по методу обратных операторов уже нашли применение [5, 6] при создании различных вычислительных устройств (установка «Итератор» АН УССР, французская машина «Аналак»). Имеются сведения об использовании метода в некоторых измерительных системах.

Рассмотрим теперь последние три метода. Все они объединены общей идеей о возможности использования самой уравниваемой цепи А в качестве дополнительной преобразующей цепи с целью получения неизбежной сходимости процесса уравнивания. Сначала опишем метод, который нами ранее был назван амплитудно-импульсным [7].

Пассивный омический многополюсник R вместе с амплитудно-импульсными источниками  $u_{c_1}, \dots, u_{c_m}$  образуют активный многополюсник А, который необходимо уравновесить (рис. 7). Уравнивание производится при помощи переключаемых запоминающих усилителей с емкостями С в обратной связи и дополнительных емкостей  $C_0$ , включаемых в точки, которые требуется уравновесить.

В правом положении ключей К конденсаторы  $C_0$  заряжаются за счет действия напряжений  $u_{c_1}$  и  $u_{a_1}$

на выходах усилителей. В левом положении ключей они разряжаются через многополюсник R на конденсаторы С, изменяя соответствующим образом их заряды. В [7] было показано, что при достаточно малом отношении  $C_0/C$  процесс подбора напряжений  $u_a$  сходится неизбежно при любой структуре омического многополюсника R. К недостатку этого метода следует отнести сравнительно малую точность при большом числе точек уравнивания.

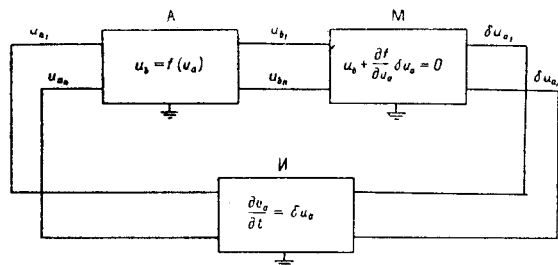


Рис. 6. Уравнивание по методу обратного якобиана.

На рис. 8 приведена схема уравнивания фазовым методом. Достоинства и недостатки этого метода пока еще не совсем ясны. Сущность его заключается в том, что амплитуды переменных напряжений  $u_{a1}$  поочередно изменяются так, чтобы сдвиги по фазе между ними и токами  $i_{a1}$  были нулевыми. Многополюсник А омический. В уравновешенном состоянии, когда  $u_{b1}$  имеют нулевые значения, напряжения  $u_{a1}$  и токи  $i_{a1}$ , действительно, должны быть в фазе. Сходимость процес-

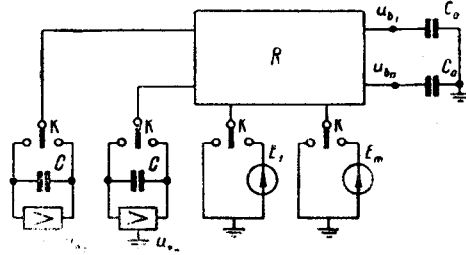


Рис. 7. Амплитудно-импульсный метод уравнивания цепи.

са уравнивания в данном случае должна быть неизбежной при любой структуре многополюсника. Точность уравнивания цепей при применении этого метода, вероятно, может быть лучше, чем при использовании предыдущего.

На рис. 9 изображена схема уравнивания цепи по методу, который может быть назван параметрическим. Из последних трех методов он, по-видимому, наиболее перспективен в отношении достижимой точности уравнивания.

В точки, которые подлежат уравниванию, включаются контактные или бесконтактные синхронно управляемые вибраторы  $B_1, \dots, B_n$ . Уравнивание цепи заключается в таком поочередном изменении напряжений  $u_{a1}$ , чтобы напряжения  $e_i$  на вторичных обмотках трансформаторов обращались в нули. При нулевых значениях  $e_i$  напряжения  $u_{b1}$ , очевидно, тоже должны быть нулевыми. Процесс уравнивания неизбежно сходится, если элементами многополюсника являются омические или емкостные проводимости. Лучшие результаты

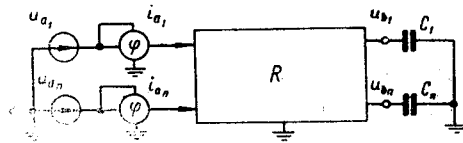


Рис. 8. Фазовый метод уравнивания цепи.

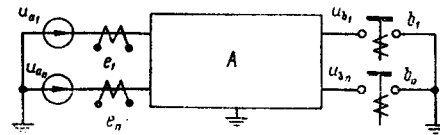


Рис. 9. Параметрический метод уравнивания цепи.

получаются в последнем случае. Доказательство сходимости процесса при этом оказывается, однако, более сложным. Поэтому приведем его в предположении, что многополюсник А является омическим.

Рассматривая вибраторы как переменные проводимости  $g=g(t)$ , можем записать:

$$i_a = g_{aa} u_a - g_{ab} u_b + i_a, \quad (24)$$

$$-g u_b = -g_{ba} u_a + g_{bb} u_b + i_b, \quad (25)$$

$$e = m \frac{di_a}{dt}, \quad (26)$$

где  $e$  — вектор напряжений на вторичных обмотках трансформаторов;  $m$  — взаимная индуктивность обмоток.

Исключая векторы  $i_a$  и  $u_b$ , получаем  $e = P_n u_a + \bar{e}$ ,

$$\text{где } P_n = m g_{ab} g^{-1} \frac{dg}{dt} (g + g_{bb})^{-1} g_{ba}, \quad (27)$$

$$\bar{e} = - m g_{ab} g^{-1} \frac{dg}{dt} (g + g_{bb}) i_b. \quad (28)$$

Матрица  $P_n$ , определяющая сходимость процесса уравнивания, очевидно, симметрическая и, кроме того, может быть представлена в виде (9). Поэтому процесс уравнивания должен иметь неизбежную сходимость.

Применение настроенных контуров во вторичных цепях трансформаторов и использование источников переменных напряжений, как показывает опыт, может обеспечить высокую точность уравнивания, если, как уже указывалось, взять многополюсник  $A$  емкостным.

Приведенный далеко не полный обзор методов уравнивания показывает, что имеются определенные возможности строить качественные системы уравнивания электрических цепей. В этом отношении нам кажутся перспективными методы уравнивания посредством регулирования напряжений, полученных при помощи дополнительных цепей и являющихся преобразованными напряжениями, которые нужно уравновесить. В частности, мы имеем в виду различные варианты метода обратных операторов, сигма- и ро-методы, параметрический метод.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Коган. Электронные моделирующие устройства. М., Физматгиз, 1959.
2. Г. Е. Пухов. Избранные вопросы теории математических машин. Киев, Изд-во АН УССР, 1964.
3. Ф. Муррей. Теория математических машин. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
4. И. М. Витенберг, Е. А. Ерохин. Об использовании усредненной оценки при поиске методом минимизации в аналоговой машине МН-11.— В сб. «Комбинированные вычислительные машины». М., Изд-во АН СССР, 1962.
5. Г. Е. Пухов, Г. И. Грездов. Электронный прибор «Итератор».— В сб. трудов КИ ГВФ «Электрическое моделирование». Киев, 1962.
6. Г. Юффлер. Новый тип универсальной вычислительной машины.— Труды I Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению (ИФАК), т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1961.
7. Г. Е. Пухов. Методы синтеза амплитудно-импульсных электронных моделей алгебраических объектов.— В сб. «Математическое моделирование и электрические цепи». Киев, Изд-во АН УССР, 1964.

Поступила в редакцию  
12 сентября 1964 г.