

Д. Н. БОЛОТИН

(Новосибирск)

### О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ГРАФОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ

Рассматриваются некоторые методы анализа электрических схем с точки зрения их эффективности и приспособленности к расчету устройств или систем, находящихся в условиях действия мешающих факторов.

Сравнение методов как между собой, так и с методикой анализа, изложенной ниже, преследовало одну цель — обратить внимание на еще один метод исследования, известный под названием метода теории графов.

Заключительная часть статьи посвящена вычислению напряжения измерительной диагонали моста в случае действия на мост мешающих возмущений.

При анализе различных электрических цепей, как правило, используются либо классические (применение законов Кирхгофа), либо матричные методы расчета (метод четырехполюсника, обобщенные методы узловых напряжений и контурных токов). В последнее время для этих же целей стали все чаще и чаще привлекать методы расчета, основанные на использовании теории графов [1—7]. Эти методы в отличие от первых двух значительно упрощают получение конечного результата и, по существу, сводят расчет цепей к выполнению ряда простых вычислительных операций [1, 2, 5]. Интерес к этому виду анализа цепей не случаен и вызван, по справедливому замечанию авторов работы [7], тем, что классические методы расчета электрических цепей требуют сравнительно больших затрат труда. Например, определение картины распределения токов в мостовых цепях даже в простейшем случае использования одинарного четырехплечего моста уже представляет собой достаточно громоздкую задачу. Что же касается более сложных случаев токораспределения в многоплечих мостах, то для них обычные методы, базирующиеся на законах Кирхгофа, приводят к весьма громоздким системам уравнений [8].

Матричные же методы, имея несомненные преимущества перед классическими, не позволяют в нужной мере ускорить и упростить процесс вычислений, ибо при разложении определителей матрицы по ее элементам появляется большое число одинаковых членов, имеющих разные знаки. Хотя такие члены и сокращаются, но выявляются обычно в конце преобразований [7]. Таким образом, ни матричные, ни тем более классические методы расчета нельзя считать удовлетворительными. Это одна из причин, заставляющая использовать другие, более перспективные методы.

На практике часты случаи, когда на работу системы оказывают влияние мешающие воздействия. Причем эти воздействия могут быть

приложены не только к условному входу системы, соответствующему, скажем, точке приложения сигнала. Они могут действовать в общем случае во всех точках системы. При этом эффект дестабилизирующего воздействия может проявляться в такой форме, при которой появляется необходимость использовать фактор различия между точками введения полезного сигнала и точками приложения мешающих воздействий. Возникающая в связи с этим проблема введения в систему мешающих факторов по признаку их локального действия на систему не получила не только удовлетворительного освещения в опубликованной литературе [9], но и не может быть эффективно решена ни матричным, ни тем более классическим методом. Классический метод неприемлем из-за своей громоздкости. При использовании матричного метода трудно, а может быть, и невозможно определить те элементы матрицы, в которые нужно ввести мешающие воздействия. Сейчас можно только высказать некоторые догадки на сей счет. По-видимому, с учетом возмущений матрица системы должна повысить свой порядок. Но в этом случае резко увеличится и без того большой объем вычислений, необходимых для получения конечных соотношений как функций входящих в систему параметров и действующих возмущений. При этом гарантировать достоверность полученных результатов нельзя. В случае же, если для расчета применяются численные методы (скажем, метод расчета на вычислительной машине), объем вычислений не играет существенной роли, но тогда полученные результаты будут представлены в виде чисел. А числа, как известно, не показывают общего характера зависимости конечного результата от каждого возмущения в отдельности. В этом случае исключается всякая возможность создания эффективных способов защиты систем от действующих на них вредных возмущений и получение таких систем, которые были бы инвариантны не к одному или нескольким видам возмущений, а по возможности к большому и широкому их классу. Поэтому без привлечения методов, отличающихся от описанных, такую задачу решить весьма и весьма трудно. Причем трудность эта обусловлена еще и тем обстоятельством, что принципиальные схемы системы зачастую не соответствуют их блок-схемам. На блок-схемах теряются некоторые внутренние точки системы. Хорошим примером в этом смысле является наипростейшая схема однокаскадного лампового усилителя с обратной связью, в котором эта связь осуществляется сопротивлением, находящимся в катодной цепи. Такая схема, как известно, имеет два самостоятельных выхода [6] (один выход — анод лампы, а другой — ее катод). Если усилитель представить его обычной блок-схемой (схема блока, охваченного обратной связью), то можно видеть, что на ней отсутствует один из выходов усилителя. Поэтому, если теперь на анод и катод лампы усилителя будут действовать возмущения, то действие одного из них нельзя будет учесть на блок-схеме.

Таким образом, проблема введения в систему мешающих факторов наталкивается, с одной стороны, на плохую приспособленность существующих и тем не менее широко используемых методов расчета, с другой стороны — на отсутствие полного изоморфизма между принципиальными схемами систем и их блок-схемами.

В связи с рассмотренными трудностями, по-видимому, следует перейти к расчету систем, основанному на использовании теории графов. Однако здесь сразу же нужно оговориться. Использовать эту теорию в том виде, в каком она до сих пор применяется, нельзя, ибо в этом случае опять-таки невозможно добиться полного изоморфизма схем. Эту теорию необходимо использовать с учетом специфики схем. Но

для этих случаев ее нужно приспособить. Попытки сделать это были предприняты в [5, 6]. В [6], например, рассматривается возможность перехода при расчете электронных устройств от принципиальных схем к их геометрическим образам. Такой подход позволяет представить электронные устройства или системы в виде таких графов, веса дуг которых являются некоторыми безразмерными коэффициентами передачи, весовые коэффициенты всех петель графа равны  $-1$ , а количество вершин графа равно числу узлов схемы (исходный граф схемы).

Кроме того, не составляет особого труда показать, что в виде точно таких же графов можно представлять и блок-схемы различных систем [5]. Таким образом, использование предлагаемых графов становится выгодным, ибо

- 1) позволяет обеспечить требуемый изоморфизм схем;
- 2) дает возможность обращаться с принципиальными схемами так, как если бы они были блок-схемами;
- 3) ускоряет по сравнению с другими методами вычислительный процесс и сводит объем затрат на вычисления к минимуму;
- 4) помогает наглядно представить совершаемые операции (что дает возможность проверки правильности результатов в ходе вычислений);
- 5) позволяет наиболее быстро определить зависимость любой переменной величины от остальных переменных из конфигурации графа независимо от того, действуют на систему возмущения или нет.

Список достоинств представления систем в виде графов, имеющих единичные петли, можно было бы продолжить. Выше перечислены только некоторые из них.

В доказательство удобства использования предлагаемого вида графов рассмотрим случай простейшей мостовой цепи. Выбор для рассмотрения именно этой цепи обусловлен прежде всего тем, что граф схемы четырехплечего моста достаточно прост по своей конфигурации. Это дает возможность, не перегружая содержание статьи излишним материалом, обратить внимание на те достоинства графов, о которых говорилось выше. Кроме того, использование моста в качестве примера

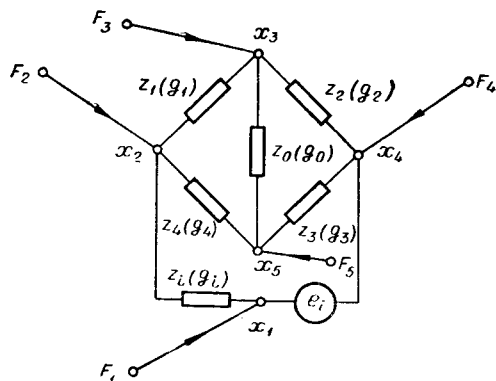


Рис. 1.

не нарушает общности рассуждений и позволяет с помощью изложенной здесь методики составлять граф и для более сложных цепей, например, для цепей, содержащих неавтономные многополюсники [10], что и было сделано в [6]. Таким образом, выбор мостовой схемы позволяет продемонстрировать предлагаемую методику составления графа и показывает, что этот пример не следует считать тривиальным.

Итак, рассчитаем схему четырехплечего моста, изображенного на рис. 1 ( $F$  — некоторые

возмущающие воздействия, которые временно исключим из рассмотрения). На схеме рис. 1 цифрами, стоящими возле  $x$ , обозначены точки моста, в которых возникают напряжения  $x_1, x_2, \dots, x_5$ . В случае, если бы таких точек было не 5, а больше, например  $n$ , необходимо было бы рассмотреть ряд из  $n$  элементов, т. е.  $x_1, x_2, \dots, x_5, \dots, x_n$ . Этот ряд должен обладать следующими свойствами. Во-первых, каждый элемент ряда в общем случае должен находиться во взаимодействии

с оставшимися элементами; во-вторых, все элементы ряда должны быть равноправными. Это означает, что ни одному из элементов не отдается предпочтение. В этом случае (при  $n=5$ ) взаимодействие элементов ряда  $x_1, x_2, \dots, x_5$  может быть представлено в виде объемного графа (рис. 2, а). Каждая вершина этого графа связана с остальными вершинами парой дуг (на рис. 2, а, чтобы не затемнять чертеж, пара дуг заменена одним ребром). Наличие между вершинами пары дуг означает, что вершинам объемного графа присуще двухстороннее взаимодействие.

Для того, чтобы подойти к одновременному рассмотрению схемы рис. 1 и графа рис. 2, а, необходимо последний развернуть на плоскости. Это, очевидно, можно легко сделать, если разорвать в графе рис. 2, а вершину  $x_1$ . Результирующий граф показан на рис. 2, б. Граф рис. 2, б эквивалентен графу рис. 2, а (эквивалентность графов доказывается на основании правила объединения начальных вершин графа [6]).

Таким образом, имея граф рис. 2, б и схему рис. 1, можно сделать вывод, что как граф, так и схема, им описываемая, имеют одинаковое число точек ( $x_1, x_2, \dots, x_5$ ). Это дает право поставить в соответствие графу рис. 2, б схему рис. 1, если принять во внимание, что вершины графа — это напряжения, возникающие во всех точках моста рис. 1. Далее, рассматривая схему рис. 1, можно существенно упростить граф рис. 2, б. Действительно, на схеме не существует непосредственной связи между точкой 1 и точками 3 и 5, между точками 2 и 4. С учетом этих особенностей граф рис. 2, б переходит в более простой граф рис. 2, в. С целью еще большего упрощения графа рис. 2, в выберем в схеме рис. 1 точку 4 в качестве базисной (опорной). Тогда граф рис. 2, в может быть представлен рис. 2, г. На этом рисунке точка  $x_1$  представляет собой напряжение  $e_i$ , а остальные точки — это напряжения, возникающие в соответствующих точках рис. 1 и измеренные относительно точки 4.

Таким образом, руководствуясь правилом составления графа по его электрической схеме [6], найдем, что граф рис. 2, г всецело соответствует графу рис. 3, а, а при  $x_1$ , выбранном в качестве входного напряжения, — графу рис. 3, б.

Теперь для того, чтобы перейти к рассмотрению графа, весовые дуги которого соответствуют некоторым передаточным коэффициентам  $k_0, k_1, \dots, k_{N-1}$  (в общем случае их может быть  $(n-1)n$ ), а петли имеют вес, равный  $-1$ , нужно в графе рис. 3, б каждый весовой коэффициент дуги разделить на абсолютное значение весового коэффициента петли той вершины, для которой дуга является входящей. Весовой коэффициент петли при этом становится равным  $-1$ , а коэффициенты каждой дуги графа соответствуют некоторым передаточным коэффициентам:

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{g_i}{g_i + g_1 + g_4}; & k_3 &= \frac{g_0}{g_3 + g_4 + g_0}; \\ k_1 &= \frac{g_1}{g_1 + g_2 + g_0}; & k_4 &= \frac{g_0}{g_1 + g_2 + g_0}; \\ k_2 &= \frac{g_1}{g_i + g_1 + g_4}; & k_5 &= \frac{g_4}{g_i + g_1 + g_4}; \\ k_6 &= \frac{g_4}{g_3 + g_4 + g_0}. \end{aligned} \quad (1)$$

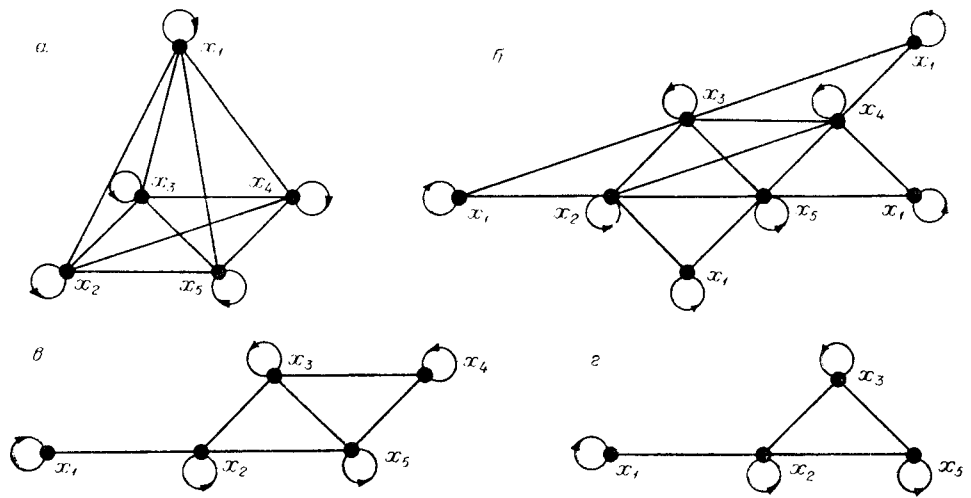


Рис. 2.

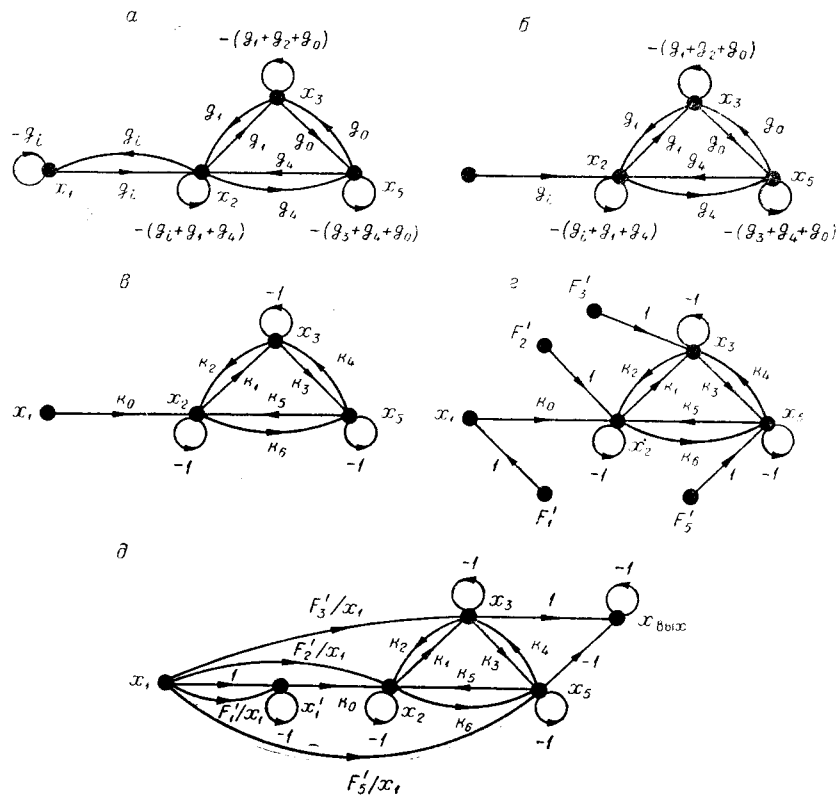


Рис. 3.

При выполнении указанных действий получается граф (рис. 3, в), в котором весовые коэффициенты петель равны  $-1$ , а дуги графа — это передаточные коэффициенты  $k$ . Из рассмотрения графа рис. 3, в заключаем, что такой граф ничем не отличается от того, который можно было бы получить, имея любую другую структурную схему. На этот граф можно налагать различные ограничения. Весовые коэффициенты дуг графа могут менять свои значения. Кроме того, в каждой точке этого графа могут действовать возмущения  $F$ .

Поэтому с учетом действия этих возмущений вычислим напряжение, возникающее в измерительной диагонали моста. Воздействия  $F$  должны быть приложены к точкам графа рис. 3, в так, как и в схеме рис. 1 (см. граф рис. 3, з). Исключение составляет воздействие  $F_4$ , которое на рис. 3, з отсутствует, так как точка 4 выбрана в качестве опорной. По этой же самой причине оставшиеся возмущения  $F$  приобрели сверху индексы (штрихи).

Рассматривая теперь вершину  $x_1$  графа рис. 3, з как промежуточную ( $x_1'$ ) с петлевым коэффициентом, равным  $-1$ , добавим к графу рис. 3, з вершину  $x_1$  и соединим ее с  $x_1'$  дугой, весовой коэффициент которой равен 1. Объединим вершины  $F_1', F_2', F_3'$  и  $F_5'$  с вершиной  $x_1 (e_i)$  по правилам, изложенным в [5], и примем эту вершину в качестве входной. Далее, в связи с тем, что напряжение в измерительной диагонали моста равно разности напряжений  $x_3$  и  $x_5$ , в качестве выходной вершины графа можем принять вершину  $x_{\text{вых}} (e_{\text{изм}})$ , весовой коэффициент которой равен

$$x_{\text{вых}} = x_3 - x_5, \quad (2)$$

В графе условие (2) учитывается весьма и весьма просто. К нему добавляется вершина  $x_{\text{вых}}$ , соединенная с вершинами  $x_3$  и  $x_5$  дугами, весовые коэффициенты которых соответственно равны 1 и  $-1$ . К вершине  $x_{\text{вых}}$  добавляется петля с весовым коэффициентом, равным  $-1$ .

Граф с внесенными добавлениями и объединенными вершинами изображен на рис. 3, д. Применяя к этому графу правило исключения вершин графа [2, 5] или правило Мэйсона [1], найдем, что

$$\frac{x_{\text{вых}}}{x_1} = \frac{[(1 + F_1'/x_1)k_0 + F_2'/x_1](k_1 - k_6) + F_3'/x_1(1 - k_5k_6) - F_5'/x_1(1 - k_1k_2)}{1 - k_1k_2 - k_3k_4 - k_5k_6 - k_1k_3k_5 - k_2k_4k_6}. \quad (3)$$

(При использовании правила Мэйсона нужно помнить, что мэйсоновские графы отличаются от нормализованных тем, что не содержат петель при вершинах).

Используя равенство (3) и принимая во внимание, что  $x_{\text{вых}} = e_{\text{изм}}$ , а  $x_1 = e_i$ , найдем напряжение измерительной диагонали моста при  $g_i \rightarrow \infty$  и  $g_0 = 0$ :

$$e_{\text{изм}} = (k_1 - k_6)e_i + (k_1 - k_6)(k_0F_1' + F_2') + F_3' - F_5', \quad (4)$$

где  $k_0, k_1$  и  $k_6$  из (1) при  $g_i \rightarrow \infty$  и  $g_0 = 0$  соответственно равны:

$$k_0 = 1; \quad k_1 = \frac{g_1}{g_1 + g_2}; \quad k_6 = \frac{g_4}{g_3 + g_4} \quad (5)$$

(остальные передаточные коэффициенты равны нулю).

Подставив равенства (5) в (4), определим  $e_{\text{изм}}$ , выраженное через проводимости ( $g$ ) моста:

$$e_{\text{изм}} = \frac{g_1g_3 - g_2g_4}{(g_1 + g_2)(g_3 + g_4)}e_i + \frac{g_1g_3 - g_2g_4}{(g_1 + g_2)(g_3 + g_4)}(F_1' + F_2') + F_3' - F_5'.$$

Заменяя проводимости сопротивлениями, окончательно найдем выражение для напряжения, возникающего в измерительной диагонали моста:

$$e_{\text{изм}} = \frac{z_2 z_4 - z_1 z_3}{(z_1 + z_2)(z_3 + z_4)} e_i + \frac{z_2 z_4 - z_1 z_3}{(z_1 + z_2)(z_3 + z_4)} (F'_1 + F'_2) + F'_3 - F'_5. \quad (6)$$

Если  $F'_1 = F'_2 = F'_3 = F'_5 = 0$ , то получим хорошо известную формулу:

$$e_{\text{изм}} = \frac{z_2 z_4 - z_1 z_3}{(z_1 + z_2)(z_3 + z_4)} e_i.$$

Таким образом, применение предлагаемого вида графов приводит к получению правильного результата, а вычисления, основанные на их использовании, не связаны с теми трудностями, которые встречаются при употреблении обычных методов расчета. Кроме того, такие графы позволяют обращаться с принципиальными схемами так, как если бы они были блок-схемами. Это дает возможность найти конечный результат даже в случае действия возмущений  $F$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предпринята попытка оценить некоторые методы анализа электрических схем с точки зрения их эффективности и приспособленности к расчету систем, находящихся в условиях действия мешающих факторов. При этом рассмотрение каждого из методов не сопровождалось подробным выяснением его сущности и области рационального применения. Предполагалось, что сильные и слабые стороны этих методов хорошо известны.

Сравнение методов как между собой, так и с методикой анализа, изложенной в настоящей работе и в [6], преследовало одну цель — обратить внимание на еще один метод исследования и притом наиболее эффективный.

Заключительная часть статьи посвящена получению требуемого результата непосредственно из конфигурации графа. Граф, описывающий устройство (четырехплечий мост), находится так же, как и мост, в условиях действия возмущений  $F$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. S. J. Mason. Topological analysis of linear nonreciprocal networks.— PIRE, 1957, v. 45, № 6.
2. C. L. Coates. Flow-graph solution of linear algebraic equations.— IRE Trans., 1959, CT-6, № 2.
3. П. А. Ионкин. Общие уравнения для расчета электрических цепей с помощью графов.— Электричество, 1964, № 8.
4. Д. Н. Болотин. О применении теории графов к анализу электронных схем.— Автоматический контроль и методы электрических измерений (Труды IV конференции, 1962 г.), т. II. Новосибирск, РИО СО АН СССР, 1964.
5. Д. Н. Болотин. Использование ориентированных нормализованных графов при вычислении коэффициентов передачи.— Радиотехника, 1964, т. 19, № 8.
6. Д. Н. Болотин. Обобщенный граф и его использование при расчете радиотехнических схем.— Радиотехника, 1965, т. 20, № 1.
7. П. А. Ионкин, А. А. Соколов. Топологический анализ электрических цепей.— Электричество, 1964, № 4.

8. К. Б. Карандеев. Специальные методы электрических измерений. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963.
9. А. А. Львович. О принципе ослабления параметрических воздействий в радиоэлектронных устройствах.— Вопросы радиоэлектроники, 1964, серия XI, Техника проводной связи, вып. 4.
10. Э. В. Зелях. Основы общей теории линейных электрических схем. М., Изд-во АН СССР, 1951.

*Поступила в редакцию  
29 мая 1965 г.*

---