

**АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЦИФРАТОРОВ
(АНАЛОГО-ЦИФРОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ)**

УДК 621.374.088

**М. А. ЗЕМЕЛЬМАН,
А. П. КНЮПФЕР, В. А. КУЛИКОВ**
(Москва)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ МАЛЫХ ДИСПЕРСИЯХ
ПО ВЫХОДНЫМ СИГНАЛАМ
АНАЛОГО-ЦИФРОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ***

Рассмотрены теоретические основы методики экспериментального определения приведенных ко входу инструментальных шумов АЦП в случае независимых одиночных измерений.

При определении связи между статистическими характеристиками измеряемой случайной величины и выходного сигнала аналого-цифрового преобразователя (АЦП) необходимо учитывать собственные случайные погрешности АЦП. Последние можно подразделить на методические и инструментальные. К методическим, в частности, относятся погрешности, вызываемые шумом квантования по уровню, обуславливающим искажение сигнала при его прохождении через идеальный, т. е. не обладающий никакими другими погрешностями, АЦП любого типа. Однако в общем случае методические случайные погрешности АЦП не исчерпываются шумом квантования. Учитывая эти погрешности, АЦП можно разделить на две группы. К первой группе относятся АЦП, в которых смещение между началом отсчета кода (нулевым значением выходного цифрового сигнала) и нулевым значением кодируемой величины постоянно (в частном случае может быть равно нулю) и известно. Этому условию удовлетворяют, например, АЦП поразрядного уравнивания и те из развертывающих АЦП, в которых первый счетный импульс синхронизирован импульсом начала временного интервала, заполняемого счетными импульсами. Подобные АЦП будем называть синхронизированными (АЦПс).

Ко второй группе относятся развертывающие АЦП, в которых отсутствует синхронизация счетных импульсов импульсом начала временного интервала, заполняемого счетными импульсами. Такие АЦП будем называть несинхронизированными (АЦПн).

В АЦП указанных групп шум квантования по уровню проявляется по-разному. Это особенно очевидно, если предположить, что инструментальные погрешности АЦП отсутствуют. Например, если измеряемая

* Материал доложен на VII Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений в сентябре 1965 г. в Новосибирске.

величина постоянна, то погрешность АЦПС, обусловленную шумом квантования, уменьшить нельзя. Погрешность АЦПн, обусловленную шумом квантования, можно уменьшить путем усреднения результатов измерений. При наличии инструментальных погрешностей и при измерениях случайных величин шум квантования в погрешностях преобразования АЦПС и АЦПн тоже проявляется неодинаково.

Связь между статистическими характеристиками измеряемых сигналов и выходных сигналов АЦП в литературе рассмотрена, например, применительно к случайным процессам с большой (относительно единицы наименьшего разряда кода АЦП) дисперсией [1].

Нас интересует указанная связь при измерениях не случайного процесса, а случайной величины, обладающей малой дисперсией. Весьма близкий вопрос освещен в [2], где анализируется зависимость статистических характеристик результатов измерений аналоговым прибором, зарегистрированных в некоторых целых единицах (т. е. квантованных), от статистических характеристик измеряемой величины и размера единицы отсчета (кванта); предполагается, что плотность распределения — четная функция, убывающая до нуля в обе стороны от математического ожидания входной величины. Из [2] видно, что начало отсчета считается постоянным и совпадающим с нулевым значением входного сигнала.

Такая задача соответствует задаче определения связи между статистическими характеристиками случайной величины, измеряемой с помощью АЦП, и выходного сигнала (кода) АЦП в случае применения АЦПС.

Допущение о характере функции плотности распределения вероятности измеряемой величины [2] в большинстве случаев может быть приемлемо и для АЦП. Однако при рассмотрении АЦП необходимо учитывать их внутренние шумы, являющиеся источником случайных погрешностей АЦП. Как известно, для оценки случайных погрешностей любого преобразователя или прибора, вызванных его внутренними шумами, целесообразно последние привести ко входу преобразователя и выразить в масштабе преобразуемой величины.

Внутренние шумы АЦПС, кроме шума квантования, являются инструментальными и состоят из многих независимых составляющих (шум уровня срабатывания нуля-органа, шум напряжения питания измерительных цепей, шумы параметров элементов схемы АЦП). Поэтому естественно полагать, что внутренние шумы АЦПС, приведенные ко входу, т. е. не квантованные, имеют закон распределения, близкий к нормальному. Если внутренние шумы АЦПС приведены ко входу, то их можно рассматривать как составляющие входного сигнала. Таким образом, и при учете случайных погрешностей АЦПС, если они известны, для определения зависимости статистических характеристик выходного сигнала (кода) АЦПС от статистических характеристик входной величины можно воспользоваться результатами [2].

Что же касается АЦПн, то здесь дело обстоит несколько иначе. Выше отмечено, что в АЦПн смещение между началом отсчета кода и нулевым значением измеряемой величины не является постоянным, в результате чего возникает специфический методический внутренний шум. Этот шум, приведенный ко входу АЦПн, имеет функцию плотности распределения вероятностей, не удовлетворяющую условиям, принятым в [2].

Рассматривая методические случайные погрешности АЦП и факторы, их вызывающие, надо в АЦПС учитывать шум квантования, а в АЦПн, кроме того, шум, обусловленный отсутствием синхронизации счетных импульсов импульсом начала временного интервала. Наличие в АЦПн этого специфического для них шума позволяет при многократных

измерениях существенно снизить погрешности, обусловленные шумом квантования по уровню.

Определив методический специфический внутренний шум АЦПн, можно АЦПн рассматривать как АЦПс, на вход которого воздействует шум, равный специфическому шуму, приведенному ко входу АЦПн.

Рассмотрим сначала этот специфический шум АЦПн, считая, что его инструментальный шум отсутствует. Пусть на вход АЦПн включен неизменный сигнал $y_0 = n_0 + \Delta n_0$, где n_0 — целое число единиц наименьшего разряда; $1 > \Delta n_0 > 0$. Тогда выходной код АЦПн может принимать два значения: $N_1 = n_0$ и $N_2 = n_0 + 1$. Вероятности показаний N_1 и N_2 соответственно равны [3]:

$$\begin{aligned} P(N_1) &= 1 - \Delta n_0; \\ P(N_2) &= \Delta n_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Определим теперь, какой сигнал y_c надо было бы подать на вход АЦПс, чтобы получить такие же вероятностные характеристики выходного сигнала АЦПн. Очевидно, что вероятностные характеристики сигнала y_c являются характеристиками специфического собственного шума АЦПн, приведенного к его входу.

На рис. 1 изображена диаграмма взаимного расположения счетных импульсов (0, 1, 2, ..., n_0 , $n_0 + 1$, ...) и импульсов начала и конца временного интервала [А, Б], соответствующая работе развертывающего АЦП. При отсутствии синхронизации импульс А может занимать с равной вероятностью любое положение между импульсами 0 и 1. Координата среднего положения импульса А равна 0,5.

Эквивалентное расположение импульсов А и Б при наличии синхронизации является следующим: импульс А расположен на некотором расстоянии α от импульса 0 (α следует определить); импульс Б может находиться с равной вероятностью в любой точке в пределах $\pm 0,5$ около своего среднего положения, отстоящего от импульса 0 на расстоянии $\alpha + n_0 + \Delta n_0$. Распределение импульса Б должно быть таким, чтобы выходной код мог принимать значения только n_0 и $n_0 + 1$ (см. рис. 1).

Это характерно и для АЦПс поразрядного уравнивания, если считать, что отрезком АБ изображено значение измеряемой величины, а отметки 1, 2, ..., n_0 , ... соответствуют границам квантов, из которых набрана компенсирующая величина.

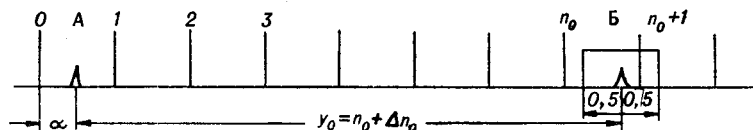


Рис. 1.

Таким образом, эквивалентный сигнал y_c распределен с плотностью вероятности $f(y_c) = 1$ в пределах от $\alpha + n_0 + \Delta n_0 - 0,5$ до $\alpha + n_0 + \Delta n_0 + 0,5$.

Выходной код АЦП будет иметь значение $N_1 = n_0$, если сигнал y_c находится в пределах от $y_1 = \alpha + n_0 + \Delta n_0 - 0,5$ до $y_2 = n_0 + 1$. Следовательно, вероятность показания N_1 равна

$$P'(N_1) = \int_{y_1}^{y_2} f(y_c) dy_c = 1,5 - \alpha - \Delta n_0.$$

По условиям определения сигнала u_c должно иметь место равенство $P'(N_1) = P(N_1)$ (см. (1)). Отсюда

$$a = 0,5; y_1 = n_0 + \Delta n_0; y_2 = n_0 + 1. \quad (2)$$

Специфический внутренний шум АЦПн, приведенный ко входу, равен $u_c - y_0 = u_c - (n_0 + \Delta n_0)$, т. е. имеет постоянную плотность вероятности, равную единице в пределах от 0 до 1; вне этих пределов плотность вероятности специфического собственного шума, приведенного ко входу, равна нулю.

Таким образом, при анализе АЦПн приходится учитывать, что на его входе действует эквивалентный шум, закон распределения которого представляет собой композицию равномерного в указанных пределах (методическая составляющая) и близкого к нормальному (инструментальная составляющая) законов распределения. При малых инструментальных шумах преобладающей составляющей входного шума является шум, равномерно распределенный в пределах кванта.

Определим теперь, как связаны между собой вероятностные характеристики измеряемой величины y , имеющей нормальный закон распределения при среднеквадратическом отклонении σ и математическом ожидании $M[y] = n_0 + \Delta n_0$ и выходного сигнала АЦПн при наличии методической и отсутствии инструментальной составляющих собственного шума.

Можно считать (см. рис. 1), что на вход эквивалентного АЦПс, не имеющего собственных шумов, кроме шума квантования по уровню, и синхронизированного при $a = 0,5$, подана сумма двух сигналов $z = u_c + x$, где u_c и x характеризуются следующими соотношениями.

Математическое ожидание u_c определяется $M[u_c] = n_0 + \Delta n_0 + 0,5$, а плотность вероятности $u_c - f_1(u_c) = 1$ в пределах от $n_0 + \Delta n_0$ до $1 + n_0 + \Delta n_0$. Математическое ожидание x равно $M[x] = 0$, а плотность вероятности x —

$$f_2(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Тогда плотность вероятности сигнала z можно представить [4] как

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y_c) f_2(z - y_c) dy_c = \int_{n_0 + \Delta n_0}^{1 + n_0 + \Delta n_0} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_c - z)^2}{2\sigma^2}} dy_c.$$

Учитывая, что математическое ожидание измеряемой величины y выражается $M[y] = n_0 + \Delta n_0$, окончательно можно записать

$$g(z) = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{1 + M[y] - z}{\sigma \sqrt{2}} \right) - \Phi \left(\frac{M[y] - z}{\sigma \sqrt{2}} \right) \right], \quad (3)$$

где Φ — символ интеграла вероятности.

* Если измеряемая величина имеет закон распределения, отличающийся от нормального, $f_2(x)$ должно выражать плотность вероятности соответствующего закона распределения.

Выходной код АЦП будет иметь некоторое значение k в том случае, если сигнал z находится в диапазоне от k до $k+1$. Следовательно, вероятность $P(k)$ показания, равного k , определяется

$$P(k) = \int_k^{k+1} g(z) dz,$$

или

$$P(k) = \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \left[\Phi \left(\frac{1 + M[y] - z}{\sigma \sqrt{2}} \right) - \Phi \left(\frac{M[y] - z}{\sigma \sqrt{2}} \right) \right] dz. \quad (4)$$

Для математического ожидания выходного кода АЦП справедливо выражение

$$M[N] = \sum_{k=0}^{k=n_{\max}} kP(k), \quad (5)$$

где N и n_{\max} — соответственно текущее и максимальное значение выходного кода АЦП.

Дисперсия показаний имеет вид:

$$D[N] = M[N] - M[N]^2,$$

т. е.

$$D[N] = \sum_{i=0}^{i=n_{\max}} \left(i - \sum_{k=0}^{k=n_{\max}} kP(k) \right)^2 P(i). \quad (6)$$

$P(i)$ находится по формуле (4) при замене в ней k на i .

Соотношения (4) — (6) определяют связь математического ожидания $M[N]$ и дисперсии $D[N]$ показаний с математическим ожиданием $M[y]$ и среднеквадратическим отклонением σ измеряемой величины. Зная $M[y]$ и σ , можно определить $M[N]$ и $D[N]$. Однако нас интересует обратная задача: по известным $M[N]$ и $D[N]$ требуется определить $M[y]$ и σ .

С этой целью, используя (4) — (6), можно построить вспомогательные семейства графиков следующих функций:

$$M[N] = f_1(M[y], \sigma), \quad D[N] = f_2(M[y], \sigma); \quad (7)$$

затем по этим графикам можно построить семейства графиков функций вида:

$$M[y] = \varphi_1(M[N], D[N]), \quad \sigma = \varphi_2(M[N], D[N]). \quad (8)$$

Для синхронизированного АЦПн соблюдается равенство $M[y] = M[N]$ независимо от $D[N]$ и σ . При данном σ измеряемой величины значение $D[N]$ зависит как от σ , так и от дробной части значения $M[N] = M[y]^*$. Поэтому значение σ , определяемое по выходным сигналам

* Это аналогично тому, как на случайную погрешность отсчета по шкале аналогового прибора влияет не количество отсчитанных целых делений, а только дробная часть деления, соответствующая значению измеряемой величины. В [2] показано, что математическое ожидание этой погрешности есть периодическая функция с периодом, равным кванту.

АЦПн, оказывается зависящим от σ_N и Δn_N , где $\sigma_N = \sqrt{D[N]}$; Δn_N — дробная часть значения $M[N]$.

На основании графиков функции (7) построены графики функций $\sigma = \psi(\sigma_N, \Delta n_N)$ (рис. 2).

После серии измерений и обработки результатов можно определить оценки $M[y]$ и $D[M]$ с соответствующими доверительными интервалами и доверительными вероятностями, а затем по графикам рис. 2

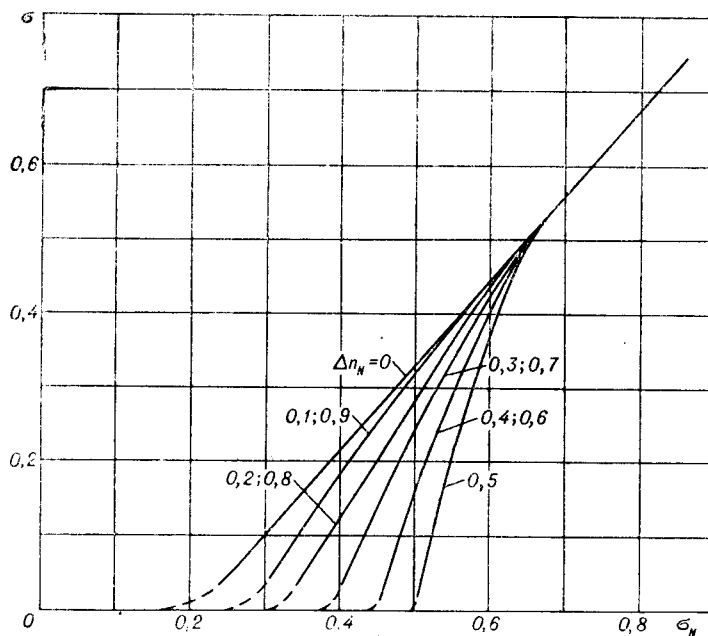


Рис. 2.

найти оценку σ с соответствующим доверительным интервалом и доверительной вероятностью.

Пусть с вероятностью 0,99 определено: $M[N] = 857,7 \pm 0,1$, т. е. $\Delta n_N = 0,7 \pm 0,1$ и $\sigma_N = 0,35 \pm 0,05$. Тогда по графику рис. 2 с той же вероятностью можно определить, что $\sigma = 0,4 \pm 0,12$.

Если значение σ_c приведенной ко входу инструментальной составляющей собственного шума, возникающего при измерениях АЦПн, соизмеримо с полученным значением σ , то действительное значение σ_y измеряемой величины должно определяться по формуле

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_c^2}.$$

Значения σ_c должно быть найдено заранее.

Как отмечалось, закон распределения инструментальной составляющей собственного шума АЦП близок к нормальному. Очевидно, что, проведя указанную выше серию измерений при подаче на вход АЦПн неизменного (нефлюктуирующего) сигнала, можно по графикам рис. 2 определить среднеквадратическое значение σ_c инструментальной составляющей собственного шума АЦПн, приведенной к его входу.

Данная методика позволяет определить σ_c в единицах входного сигнала (в отличие от методики [3], позволяющей найти σ_c , не приведенную ко входу) и, кроме того, является более строгой.

Задача определения инструментальной составляющей собственного шума, приведенного ко входу АЦПС, может быть решена так же, как в [2]. Однако непосредственно воспользоваться результатами [2], по-видимому, нельзя: во-первых, в [2] приведены зависимости $M[N] - M[y] = f(\Delta n_0)$ для разных σ , а при экспериментальном определении собственного шума АЦП, приведенного ко входу, нужно знать зависимость $M[N] - M[y] = f(\Delta n_N)$ для разных σ_N ; во-вторых, там же окончательная зависимость $\sigma_N = f(\sigma)$ приведена для значений $\sigma = 0,5$, а нас интересуют малые шумы.

Задача определения инструментальной составляющей собственного шума АЦПС может быть решена и с помощью методики, изложенной выше. Расчетные соотношения, начиная с (5), можно использовать без изменений, а значения $P(k)$ следует рассчитывать по формуле

$$P(k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - M[x])^2}{2\sigma^2}} dx,$$

или

$$P(k) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{k+1 - M[x]}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{k - M[x]}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right], \quad (9)$$

где x — сигнал на входе АЦП, имеющий нормальный закон распределения, который характеризуется параметрами $M[x]$ и σ .

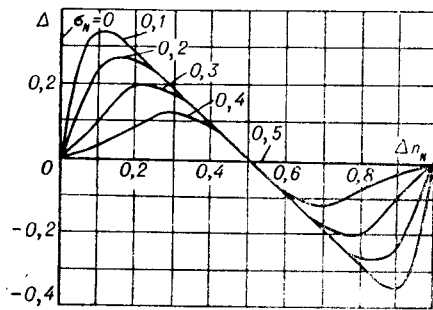


Рис. 3.

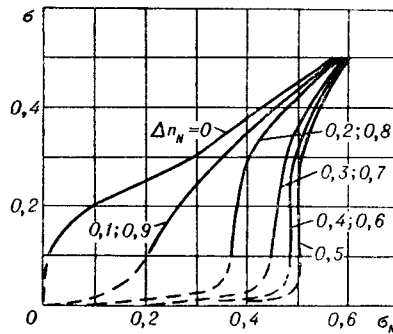


Рис. 4.

Аналогично графику рис. 2 построены графики рис. 3 и 4, с помощью которых можно определить $M[y]$ и σ измеряемой величины, подсчитав по показаниям АЦП $M[N]$, σ_N и $\Delta n_N = M[N] - |N|$ ($|N|$ — целая часть $M[N]$). Значения σ находим непосредственно по графику рис. 4, а значение $M[y]$ по формуле

$$M[y] = M[N] + \Delta.$$

Для определения приведенной ко входу инструментальной составляющей собственного шума АЦПС удобнее пользоваться графиками рис. 5, поскольку можно установить входной сигнал с произвольно выбранным значением Δn_0 . Наиболее целесообразно определять собственный шум АЦПС при $\Delta n_0 = 0$ (см. рис. 5).

Точность определения σ существенно зависит от Δn_N : при Δn_N близком к 0,5, точность определения σ весьма мала (см. рис. 4). Графи-

ками рис. 3 и 4 можно воспользоваться для определения $M[y]$ и σ по выходным сигналам АЦПС так же, как графиками рис. 2 при применении АЦПн.

Из изложенного видно, что погрешности, обусловленные шумом квантования, проявляются в АЦПн значительно меньше, чем в АЦПС.

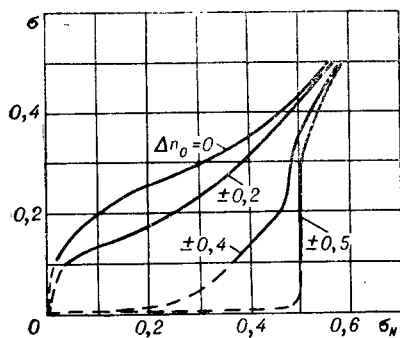


Рис. 5.

В частности, разность $M[N] - M[y]$ при использовании АЦПн вообще отсутствует, а для АЦПС она при малых дисперсиях измеряемой величины не равна нулю и существенно зависит от σ_N . При σ_N , близких к нулю, разность $M[N] - M[y]$ вообще не может быть определена (см. рис. 3). Сравнение графиков рис. 2 и 4 показывает, что дисперсию измеряемой величины значительно целесообразнее находить, пользуясь АЦПн, а не АЦПС. При Δn_N , близких к 0,5, дисперсия измеряемой величины с помощью АЦПС определяется тоже менее точно, чем с помощью АЦПн. Если значение σ велико ($\sigma \gg 0,5$), то его можно получить, пользуясь АЦПС и учитывая поправку Шеппарда [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Немировский. Вероятностные методы в измерительной технике. М., Изд-во стандартов, 1964.
2. И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть), § 8.4.3. М., Гостехиздат, 1955.
3. М. А. Земельман. Методы экспериментального исследования электронного преобразователя напряжения в интервал времени.— Измерительная техника, 1961, № 4.
4. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1958.

Поступила в редакцию
16 сентября 1965 г.,
окончательный вариант —
15 ноября 1965 г.