

## ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

УДК 519.281.2+535.317.9

А. ПАЗМАН

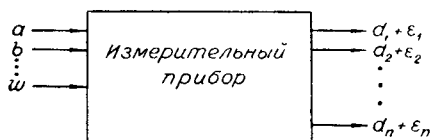
(Братислава, ЧССР)

### АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ

Определена величина погрешности, возникающей при линейном приближении уравнений, описывающих измерительный прибор. Полученные результаты применены для случая измерения асферических оптических поверхностей.

Рассмотрим кратко основную схему так называемых косвенных измерений [1, 2].

Исследуем общий случай измерения нескольких разных величин  $a, b, \dots, w$  (рис. 1). Измерительные приборы дают нам относительно большую совокупность цифровых данных  $d_1, \dots, d_n$ , которые каким-то образом (известным из самой конструкции данных измерительных приборов) функционально связаны с измеряемыми величинами, т. е. можем написать:



$$\begin{aligned} d_1 &= f_1(a, b, \dots, w); \\ &\dots \dots \dots \\ d_n &= f_n(a, b, \dots, w). \end{aligned} \quad (1)$$

Рис. 1.

Данные  $d_1, \dots, d_n$  в действительности соответствуют этим уравнениям только с какой-то точностью из-за наличия случайных ошибок измерения (флуктуации в измерительном приборе, субъективные ошибки наблюдения). Если количество полученных данных ( $n$ ) намного больше количества измеряемых величин, то можно, как известно из статистического анализа, ослабить влияние случайных ошибок.

Если предположить, что  $f_1(\dots), \dots, f_n(\dots)$  — линейные функции своих параметров  $a, b, \dots, w$ , то компенсацию можно произвести с помощью так называемых нормальных уравнений [1, 2]. В случае, если  $f_1(\dots), \dots, f_n(\dots)$  — нелинейные функции и ошибки измерения незначительны, то данную задачу можно решить путем аппроксимации. На основе полученных данных  $d_1, \dots, d_n$  предварительно оценим значения измеряемых величин, обозначив оценки  $a_0, b_0, \dots, w_0$ . Систему уравнений (1) заменим линейной частью ряда Тейлора для



где

$$\begin{aligned} \Delta a &= a - a_0; \Delta e = e - e_0; i = 1, 2, \dots, n, \\ e' &= e_0 + \lambda_i \Delta e, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — какие-то числа интервала  $\langle 0, 1 \rangle$ .

Если квадратические члены в (3) существенно малы, то случайные ошибки измерения можно уменьшить, выбрав в качестве оценок  $a, e$  величины  $a_0 + \widetilde{\Delta a}, e_0 + \widetilde{\Delta e}$ . Величины  $\widetilde{\Delta a}, \widetilde{\Delta e}$  найдем из следующих нормальных уравнений [2]:

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial a} \right)_0^2 \right] \widetilde{\Delta a} + \left[ \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial a} \right)_0 \left( \frac{\partial f_i}{\partial e} \right)_0 \right] \widetilde{\Delta e} &= \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial a} \right)_0 (d_i - f_{i0}); \\ \left[ \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial a} \right)_0 \left( \frac{\partial f_i}{\partial e} \right)_0 \right] \widetilde{\Delta a} + \left[ \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial e} \right)_0^2 \right] \widetilde{\Delta e} &= \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial e} \right)_0 (d_i - f_{i0}). \end{aligned} \quad (5)$$

Для получения решения в явном виде перепишем уравнение (5) с помощью матриц, вводя для этого следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta A &= \begin{Bmatrix} \Delta a \\ \Delta e \end{Bmatrix} & \widetilde{\Delta A} &= \begin{Bmatrix} \widetilde{\Delta a} \\ \widetilde{\Delta e} \end{Bmatrix} \\ X &= \begin{Bmatrix} \left( \frac{\partial f_1}{\partial a} \right)_0 \left( \frac{\partial f_1}{\partial e} \right)_0 \\ \dots \\ \left( \frac{\partial f_n}{\partial a} \right)_0 \left( \frac{\partial f_n}{\partial e} \right)_0 \end{Bmatrix} & P &= \begin{Bmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_n \end{Bmatrix} \\ D &= \begin{Bmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_n \end{Bmatrix} & F_0 &= \begin{Bmatrix} f_{10} \\ \dots \\ f_{n0} \end{Bmatrix} & E &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, уравнения (5) принимают вид:

$$X^T P X \widetilde{\Delta A} = X^T P (D - F_0), \quad (7)$$

или

$$\widetilde{\Delta A} = (X^T P X)^{-1} X^T P (D - F_0), \quad (8)$$

где  $T$  обозначает транспонированную матрицу, а  $-1$  — обратную матрицу.

При введении новой матрицы

$$Q_{\lambda_i} = \left\| \begin{array}{cc} \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial a^2} \right)_{\lambda_i} & \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial a \partial e} \right)_{\lambda_i} \\ \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial a \partial e} \right)_{\lambda_i} & \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial e^2} \right)_{\lambda_i} \end{array} \right\| \quad (9)$$

квадратические члены в уравнениях (3) можем записать следующим образом:

$$\frac{1}{2} (\Delta A)^T Q_{\lambda_i} (\Delta A), \quad (10)$$

а систему уравнений (3) с помощью матриц представить как

$$D = F_0 + X (\Delta A) + \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{c} (\Delta A)^T Q_{\lambda_1} (\Delta A) \\ \dots \dots \dots \\ (\Delta A)^T Q_{\lambda_n} (\Delta A) \end{array} \right\| + E. \quad (11)$$

Для простоты третий член правой части уравнения (11) обозначим  $\Phi_{\lambda, \Delta A}$  и, подставив (11) в (8), получим

$$\widetilde{\Delta A} = (X^T P X)^{-1} X^T P \{X (\Delta A) + \Phi_{\lambda, \Delta A} + E\}. \quad (12)$$

Вектор оценки  $\widetilde{\Delta A}$  является линейной векторной функцией гауссовского вектора случайных ошибок  $E$ , поэтому и сам он является случайной величиной с нормальным распределением вероятностей [2, 3]. Из уравнения (12) видно, что среднее значение вектора  $\widetilde{\Delta A}$  определяется выражением

$$E(\widetilde{\Delta A}) = \Delta A + (X^T P X)^{-1} X^T P \Phi_{\lambda, \Delta A} \quad (13)$$

и его матрица ковариации принимает вид

$$K_{\Delta A} = (X^T P X)^{-1}. \quad (14)$$

В случае, когда функции  $f_i(a, b, \dots, \omega)$  в (1) линейны (в (12) и (13) нужно подставить  $\Phi_{\lambda, \Delta A} = 0$ ), рассматриваемый вектор имеет ту же ковариационную матрицу, в то время как его среднее значение отличается от выражения (13) на величину

$$\delta A = (X^T P X)^{-1} X^T P \Phi_{\lambda, \Delta A}. \quad (15)$$

Это «смещение» представляет собой отыскиваемую погрешность аппроксимации, причем систематическую (неслучайную).

Еще несколько слов о полученном результате.

1. Формальным путем (15) можно получить из (8), если вектор  $D - F_0$  заменить вектором  $\Phi_{\lambda, \Delta A}$ . Практическое значение этого очевидно: коэффициенты, вычисленные в нормальных уравнениях, можно непосредственно использовать в (15).

2. Вектор  $\Phi_{\lambda, \Delta A}$  содержит неизвестные параметры  $\Delta a$ ,  $\Delta e$  и  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . В практике основным является оценка максимальной погрешности аппроксимации; порядок  $\Delta a$ ,  $\Delta e$  можно оценить из точности метода определения величин  $a_0$ ,  $e_0$ , приравняв  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  просто нулю. В выражении (4)  $\Delta a$ ,  $\Delta e$  значительно меньше  $a_0$  и  $e_0$ , т. е.  $a' \approx a_0$ ,  $e' \approx e_0$ . Значит, в дальнейшем будем использовать приближенное отношение

$$\left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial a^2} \right)_{\lambda_i} \approx \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial a^2} \right)_0.$$

Из (15), очевидно, получим равенство

$$(X^T P X) \delta A = X^T P \Phi_{\lambda, \Delta A},$$

или в развернутом виде (в соответствии с (6) и (9)):

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial a} \right)^2 \right] \delta a + \left[ \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial a} \right)_0 \left( \frac{\partial f_i}{\partial e} \right)_0 \right] \delta e = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial a} \right)_0 \left\{ \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial a^2} \right)_0 (\Delta a)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial a \partial e} \right)_0 \Delta a \Delta e + \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial e^2} \right)_0 (\Delta e)^2 \right\}; \\ & \left[ \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial a} \right)_0 \left( \frac{\partial f_i}{\partial e} \right)_0 \right] \delta a + \left[ \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial e} \right)_0 \right] \delta e = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial e} \right)_0 \left\{ \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial a^2} \right)_0 (\Delta a)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial a \partial e} \right)_0 \Delta a \Delta e + \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial e^2} \right)_0 (\Delta e)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь все производные от функций  $f_i(a, e)$ , вычисленные в точке  $a_0$ ,  $e_0$ , являются постоянными.

### Измерение на асферометре \*

Конкретный анализ и численный подсчет погрешностей аппроксимации был произведен для измерений на асферометре, разработанном в Институте теории измерения САН по предложению доктора И. Гайды [5—8]. Асферометром можно измерять параметры оптических квадратических поверхностей вращения (параболоид, эллипсоид, гиперболоид). Основной принцип измерения состоит в следующем (более подробно см. в [7]). Измеряемая асферическая оптическая поверхность помещается сначала в положение 1 (рис. 2). Луч света от источника  $S$ , про-

\* Редколлегия отмечает, что рассматриваемая автором методика анализа погрешностей может быть применена и для анализа электрических средств измерения.

ходя через систему призм, разделяется на два луча  $l_1$  и  $l_2$ . Луч  $l_1$  отражается от зеркала  $Z_1$  и под углом  $\alpha$  падает на вершину ротационной поверхности. После отражения падает на зеркало  $Z_2$ , отражается и после прохождения системы  $H$  опять вернется по направлению к источнику. Луч  $l_2$  совершает тот же путь, что и  $l_1$ , но в противоположном направлении. Поэтому от системы  $H$  по направлению к источнику  $S$  вернется единственный (нерасщепленный) луч.

Если переместим измеряемую поверхность на расстоя-

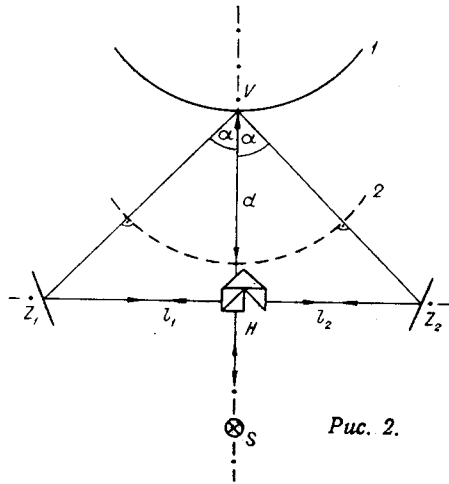


Рис. 2.

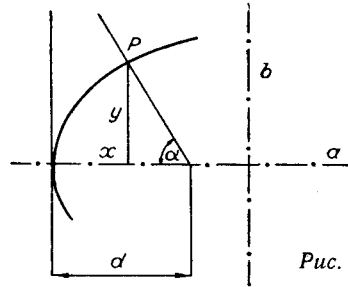


Рис. 3.

ние  $d$  по направлению оси поверхности в такое положение 2, в котором лучи  $l_1$  и  $l_2$  падают на поверхность перпендикулярно, то потом подобно тому, как и в положении 1, после возвращения в систему  $H$  оба луча соединяются в один луч. Смещение  $d$ , которое можно прямо измерить, зависит от угла  $\alpha$  и параметров оптической поверхности. На рис. 3 представлено плоское осевое сечение квадратической поверхности вращения. Из рисунка очевидно:

$$d = x + yy'; \quad (17)$$

$$y' = \operatorname{ctg} \alpha. \quad (18)$$

Следующим уравнением является само выражение осевого сечения поверхности. Если это эллипсоид, уравнение принимает вид

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (19)$$

Из трех независимых уравнений (17)–(19) исключим  $x$  и  $y$  и получим искомую зависимость

$$d_i = a - \frac{\frac{e^2}{a} \cos \alpha_i}{\sqrt{1 - \frac{e^2}{a^2} \sin^2 \alpha_i}}, \quad (20)$$

где  $a$  — большая полуось эллипсоида;

$$e = \sqrt{a^2 - b^2};$$

$i$  — номер употребленных пар зеркал.

Асферометр сконструирован так, что можно производить измерение с пятью различными углами  $\alpha$ .

Эксперименты показывают [7], что нестабильность при установке зеркал (угла  $\alpha$ ) незначительна. Напротив, неточность при измерении расстояния  $d$  значительно влияет на точность определения параметров эллипсоида. Поэтому измерения повторяются несколько раз и их результаты статистически обрабатываются. Для этого необходимо составить нормальные уравнения (5). Веса  $p_i$  всех измерений одинаковы. Приближенную оценку  $a_0$  и  $e_0$  произведем с помощью системы графика-

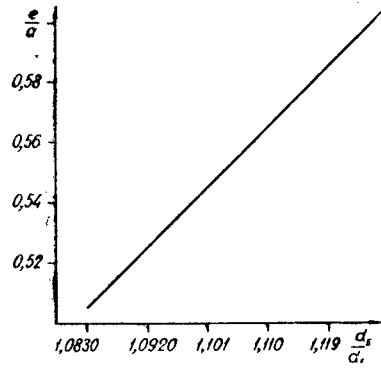


Рис. 4.

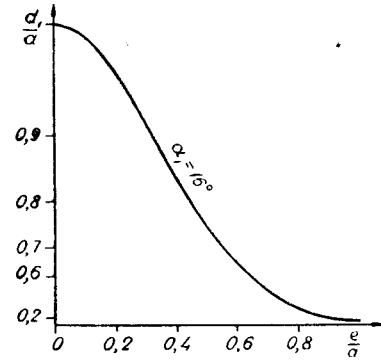


Рис. 5.

ков рис. 4 и 5 [7]. Пользование графиками очевидно: поделим смещение  $d_5$  на смещение  $d_1$  (смещения измеряются с помощью пятой и первой пары зеркал соответственно) и на рис. 4 отсчитаем отношение  $\frac{e_0}{a_0}$ . Потом по графику рис. 5 отсчитаем отношение  $\frac{d_i}{a_0}$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) (в целях простоты показан только график для угла  $\alpha_1 = 16^\circ$ ) и по известным значениям  $\alpha_i$  найдем среднее  $a_0$ , а с помощью  $\frac{e_0}{a_0} = e_0$ .

Функции  $f_i(\dots)$  из (1) в рассматриваемой задаче определяются выражением (20). После дифференцирования (20) получаем необходимые коэффициенты для уравнений (15). Как показывает расчет, вторые производные проще выразить следующими соотношениями:

$$\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial a^2}\right)_0 = -\frac{e_0}{a_0^2} \tau_i; \quad \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial a \partial e}\right)_0 = \frac{1}{a_0} \tau_i; \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial e^2}\right)_0 = -\frac{1}{e_0} \tau_i,$$

где

$$\tau_i = \frac{e_0}{a_0} \frac{\cos \alpha_i \left\{ 2 + \frac{e_0^2}{a_0^2} \sin^2 \alpha_i \right\}}{\left\{ 1 - \frac{e_0^2}{a_0^2} \sin^2 \alpha_i \right\}^{5/2}}. \quad (22)$$

Отношения (21) нам помогают привести уравнения (16) для расчета погрешности аппроксимации к виду:

$$\left[ \sum_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial a} \right)_0^2 \right] \delta a + \left[ \sum_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial a} \right)_0 \left( \frac{\partial f_i}{\partial e} \right)_0 \right] \delta e = R \sum_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial a} \right)_0 \tau_i; \quad (23)$$

$$\left[ \sum_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial a} \right)_0 \left( \frac{\partial f_i}{\partial e} \right)_0 \right] \delta a + \left[ \sum_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial e} \right)_0^2 \right] \delta e = R \sum_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial e} \right)_0 \tau_i,$$

где

$$R = -\frac{1}{2} e_0 \left[ \frac{\Delta a}{a_0} - \frac{\Delta e}{e_0} \right]^2. \quad (24)$$

Величину этого выражения можем приближенно вычислить из оценки точности графического отсчитывания  $a_0$  и  $e_0$  по рис. 4 и 5. Подстановкой (22), (24) и соответствующих производных в (23) и решением этой системы уравнений получим искомые погрешности  $\delta a$  и  $\delta e$ .

### Краткое обсуждение численных результатов

На рис. 6 показана зависимость вычисленной погрешности аппроксимации от различных значений  $\frac{e}{a}$ . Видно, что значения погрешностей растут, если эллипсоид становится более вытянутым. Погрешность повышается также, если эллипсоид приближается к шару. Из (24) следует, что величина погрешностей  $\delta a$  и  $\delta e$  быстро возрастает с уменьшением точности оценок  $a_0$  и  $e_0$ .

В рассматриваемом случае, если принять неточность измерения смещения  $d_i$  равной  $10^{-2}$  мм, анализ графиков рис. 4 и 5 показывает, что относительная неточность определения  $a_0$  и  $e_0$  в интервале  $0,2 \leq \frac{e}{a} \leq 0,6$  не превышает  $10^{-2}$  мм. Из расчета соответствующей погрешности аппроксимации очевидно, что в указанном интервале  $|\delta a| < 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $|\delta e| < 4 \cdot 10^{-4}$ . Этой погрешностью можно пренебречь, так как требуемая точность измерения параметров эллипсоида равна  $5 \cdot 10^{-3}$  мм.

Приведем пример большой погрешности аппроксимации. Пусть графическая оценка  $a_0$  и  $e_0$  проведена с погрешностью 2%, а  $a \approx 20$  мм,  $e \approx 16$  мм ( $R \approx 10^{-2}$  мм). Тогда расчет показывает, что  $|\delta a| \approx |\delta e| \approx 3 \cdot 10^{-1}$  мм. Значит, линеаризация соотношения (20) была сделана неправильно.

Указанным способом можно произвести расчеты погрешности аппроксимации при измерении параметров гиперболических поверхностей.

Выражаю благодарность Г. Штуллеру за предоставление материала о конструкции и работе асферометра, а Р. Бораршевой за помощь в проведении численных расчетов.

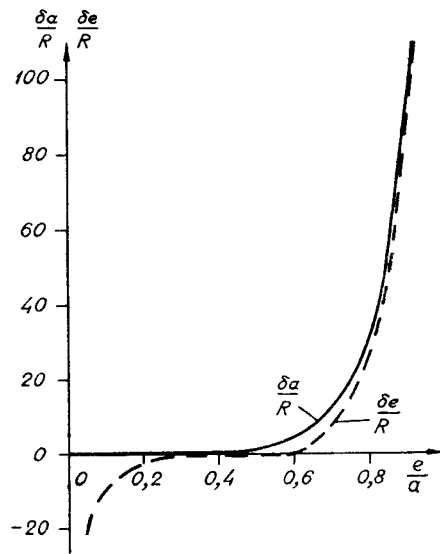


Рис. 6.



## ЛИТЕРАТУРА

1. J. Böh m. Vyrovnávací počet. Praha, SNTL, 1964.
2. Ю. В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
3. Н. Грамér. Mathematical Methods of Statistics. Princeton, 1946.
4. M. K. Grebenca, S. I. Novoselov. Ucebnice matematické analyzy. Nakl. OSAV, Praha, 1955.
5. J. Hajda. Ein Gerät zur Messung sphärischer Flächen.— Feingerätetechnik, 1957, № 9, S. 265.
6. J. Hajda. Ein Gerät zur Messung und Kontrolle sphärischer Flächen.— Monatschrift für Feinmechanik und Optik, 1958, № 1.
7. G. Stuller. Meracie metódy základných parametrov asférických optických plôch. Kandidátska disertačná práca, Ustav teórie merania SAV, Bratislava, 1965.
8. Б. А. Чунин, С. С. Качкин. Методы контроля асферических поверхностей.— В сб. «Формообразование оптических поверхностей». М., Оборонгиз, 1962.

*Поступила в редакцию  
1 ноября 1965 г.,  
окончательный вариант —  
27 декабря 1965 г.*