

В. П. ЖИВОГЛЯДОВ, В. Х. КАИПОВ

(Фрунзе)

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОБЪЕКТАХ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ

Рассматривается задача автоматического измерения величины запаздывания с позиций оценки параметров распределенных объектов. Предлагаются возможные варианты блок-схем вычислительных устройств. Дается сравнительный анализ различных алгоритмов. Предложенная методика обобщается на случай оценки скорости (запаздывания) в некоторых технологических объектах с использованием метода стохастических аппроксимаций.

ОЦЕНКА ЧИСТОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Задача автоматического измерения времени запаздывания сигнала возникает при построении оптимальных и адаптивных систем автоматического управления, содержащих элементы с чистым (транспортным) запаздыванием, величина которого не известна или может изменяться в широких пределах, и работающих в условиях случайных помех. В реальных условиях измерение запаздывания должно производиться без нарушения нормальной работы системы в целом.

В качестве примера устройств, обладающих чистым запаздыванием, можно указать на гидравлические или пневматические каналы связи между различными частями автоматической системы, прямо- и противоточные технологические аппараты [1], в которых рабочее вещество перемещается с конечной скоростью, зависящей от давления и некоторых других факторов.

Если подходить к проблеме оценки запаздывания как к оценке параметров сосредоточенных объектов [2], описываемых уравнениями с запаздывающим аргументом, т. е. измеряя выходной и входной сигналы, определить τ , то даже постановка задачи вызывает значительные трудности.

В [3] излагается методика определения задержки сигнала специального вида с помощью метода наибольшего правдоподобия. Полученное выражение для функции правдоподобия имеет настолько сложный вид, что выражение для оценки в явном виде получить не удастся.

В [4] предлагается для оценки запаздывания при измерении сигнала с шумом избавиться от функции с запаздывающим аргументом путем разложения последней в ряд Тейлора и использовать конечное число членов ряда; полезный сигнал предполагается полностью извест-

ным, включая момент его возникновения. Оценка при этом получается смещенной. С увеличением числа используемых членов ряда Тейлора смещение уменьшается, но растет дисперсия оценки. Два метода определения величины запаздывания в объекте первого порядка, не подверженном действию помех, освещаются в [5]. Идея методов заключается в том, что в результате длительного наблюдения набирается совокупность входных и выходных величин, измеренных в моменты времени, когда производная по времени выходной величины равна нулю. Обработав определенным образом полученную совокупность, можно с некоторой погрешностью определить величину запаздывания. В [6] предлагается использовать тот же подход для объектов, работающих в условиях помех. Непрерывное автоматическое определение неизвестного запаздывания с помощью этих методов неосуществимо.

Задачу оценки величины запаздывания удастся поставить и решить, если рассматривать элемент запаздывания как элемент с распределенными параметрами [7].

Для простоты выкладок рассмотрим сначала объект, описываемый дифференциальным уравнением с частными производными типа

$$\tau_n \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial q(x, t)}{\partial x}. \quad (1)$$

Решение уравнения (1) имеет вид

$$q(1, t) = q(0, t - \tau_n). \quad (2)$$

Длина объекта принята за единицу. Для вычисления оценки запаздывания воспользуемся обобщенной методикой Калмана [8]. Заменим уравнение с частными производными уравнением в «частных» разностях, причем измерять разности будем в дискретные моменты времени s в k точках объекта. Тогда уравнение (1) преобразуется*:

$$\tau (q_{k, s} - q_{k, s-1}) = - (q_{k, s} - q_{k-1, s}) = (q_{k-1, s} - q_{k, s}), \quad (3)$$

где

$$\tau = \frac{\tau_n \Delta x}{\Delta t}.$$

В измерительных устройствах действуют аддитивные помехи $h_{i, j}$, представляющие собой последовательности независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями. Величины $q_{i, j}$, измеренные с помехами, обозначим как

$$y_{i, j} = q_{i, j} + h_{i, j}. \quad (4)$$

Подставим, далее, в (3) значения $y_{i, j}$ и найдем оценку τ^* , минимизируя по τ возникающую при этом ошибку: а) в соответствии с методом наименьших квадратов, б) по методу стохастических аппроксимаций.

Рассмотрим первый случай. Мера ошибки зависит от текущего момента времени $s=N$ и равна

* Доказательство того, что уравнение (3) описывает дискретный элемент запаздывания, приведено в приложениях 1, 2.

$$E(N) = \sum_k \sum_{s=1}^N [\tau^* (y_{k,s} - y_{k,s-1}) - (y_{k-1,s} - y_{k,s})]^2 W(N-s), \quad (5)$$

где $W(N-s)$ — монотонно убывающая функция времени, взвешивающая наблюдения во времени и учитывающая возможную нестационарность объекта.

Если τ постоянно в течение интервала наблюдения и процессы стационарны, то $W(N-s) = 1$. Вначале будем считать, что измерения производятся лишь в двух соседних точках объекта. Тогда в формуле (5) суммирование необходимо производить только по s . Вычислим производную функцию $E(N)$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{dE(N)}{d\tau} = \sum_{s=1}^N \{ [\tau^* (y_{k,s} - y_{k,s-1}) - (y_{k-1,s} - y_{k,s})] \times \\ \times (y_{k,s} - y_{k,s-1}) \} = 0. \quad (6)$$

Отсюда найдем оценку τ_1^* для запаздывания τ :

$$\tau_1^* = \frac{\sum_{s=1}^N (y_{k,s} - y_{k,s-1}) (y_{k-1,s} - y_{k,s})}{\sum_{s=1}^N (y_{k,s} - y_{k,s-1})^2}. \quad (7)$$

Легко видеть, что при отсутствии помех полученная оценка совпадает с величиной запаздывания τ , фигурирующей в разностном уравнении (3). Покажем, что оценка (7) является смещенной. Для этого разделим числитель и знаменатель выражения (7) на число измерений N и устремим N к бесконечности. Предполагая эргодичность процессов и ограниченность $q_{k,s}$, получим

$$\tau_1^* = \frac{\frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (q_{k,s} - q_{k,s-1} + h_{k,s} - h_{k,s-1}) (q_{k-1,s} - q_{k,s} + h_{k-1,s} - h_{k,s})}{\frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (q_{k,s} - q_{k,s-1} + h_{k,s} - h_{k,s-1})^2}. \quad (8)$$

Рассмотрим сначала числитель выражения (8)

$$\frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (q_{k,s} - q_{k,s-1} + h_{k,s} - h_{k,s-1}) (q_{k-1,s} - q_{k,s} + h_{k-1,s} - h_{k,s}) = \\ = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (q_{k,s} - q_{k,s-1}) (q_{k-1,s} - q_{k,s}) + \\ + \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (q_{k,s} - q_{k,s-1}) (h_{k-1,s} - h_{k,s}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (q_{k-1,s} - q_{k,s}) (h_{k,s} - h_{k,s-1}) + \\
& + \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (h_{k,s} - h_{k,s-1}) (h_{k-1,s} - h_{k,s}). \quad (9)
\end{aligned}$$

При стремлении N к бесконечности вторая и третья суммы в (9) стремятся к нулю, а четвертая — к дисперсии σ_h^2 помехи $h_{k,s}$. Таким образом, при $N \rightarrow \infty$ из (9) определим

$$\frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (q_{k,s} - q_{k,s-1}) (q_{k-1,s} - q_{k,s}) = \sigma_h^2. \quad (10)$$

Рассуждая совершенно аналогично, для знаменателя (8) найдем следующее выражение:

$$\frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (q_{k,s} - q_{k,s-1})^2 + 2\sigma_h^2. \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в (8), убеждаемся, что оценка τ_1^* асимптотически смещена.

Для устранения смещения оценки необходимо, следуя Е. П. Маслову, ввести в числитель и знаменатель выражения (7) величины смещений с обратным знаком. Тогда асимптотически не смещенная оценка запаздывания примет вид

$$\tau^* = \frac{\sum_{s=1}^N [(y_{k,s} - y_{k,s-1}) (y_{k-1,s} - y_{k,s}) + \sigma_h^2]}{\sum_{s=1}^N [(y_{k,s} - y_{k,s-1})^2 - 2\sigma_h^2]}. \quad (12)$$

Покажем теперь, что полученная оценка является состоятельной, т. е. покажем, что $M\{(\tau^* - \tau)^2\} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Здесь M — знак математического ожидания.

$$\begin{aligned}
M\{(\tau^* - \tau)^2\} &= M \left\{ \left[\frac{\sum_{s=1}^N [(y_{k,s} - y_{k,s-1}) (y_{k-1,s} - y_{k,s}) + \sigma_h^2]}{\sum_{s=1}^N [(y_{k,s} - y_{k,s-1})^2 - 2\sigma_h^2]} - \tau \right]^2 \right\} = \\
&= M \left\{ \left[\frac{\sum_{s=1}^N [(y_{k,s} - y_{k,s-1}) (y_{k-1,s} - y_{k,s} - \tau (y_{k,s} - y_{k,s-1})) + \sigma_h^2 - 2\sigma_h^2 \tau]}{\sum_{s=1}^N [(y_{k,s} - y_{k,s-1})^2 - 2\sigma_h^2]} \right]^2 \right\}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Разделим числитель и знаменатель выражения в квадратных скобках на N и рассмотрим числитель при стремлении N к бесконечности:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N [(q_{k,s} - q_{k,s-1} + h_{k,s} - h_{k,s-1})(q_{k-1,s} - q_{k,s} - \tau(q_{k,s} - q_{k,s-1}) + h_{k-1,s} - h_{k,s} - \tau(h_{k,s} - h_{k,s-1})) + \sigma_h^2 - 2\tau\sigma_h^2] =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (h_{k,s}^2 \tau - h_{k,s}^2 + h_{k,s-1}^2 \tau + \sigma_h^2 - 2\tau\sigma_h^2) = 0.$$

Таким образом, если знаменатель (13) отличается от нуля, то $M\{(\tau^* - \tau)^2\} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, т. е. оценка запаздывания τ^* , определяемая выражением (12), является асимптотически не смещенной и состоятельной.

Если измерения сигнала q производятся в k точках объекта, то, используя (6) и изложенную методику, получим следующее выражение для вычисления асимптотически не смещенной и состоятельной оценки запаздывания:

$$\tau^* = \frac{\sum_k \sum_{s=1}^N [(y_{k,s} - y_{k,s-1})(y_{k-1,s} - y_{k,s}) + \sigma_h^2]}{\sum_k \sum_{s=1}^N [(y_{k,s} - y_{k,s-1})^2 - 2\sigma_h^2]} \quad (14)$$

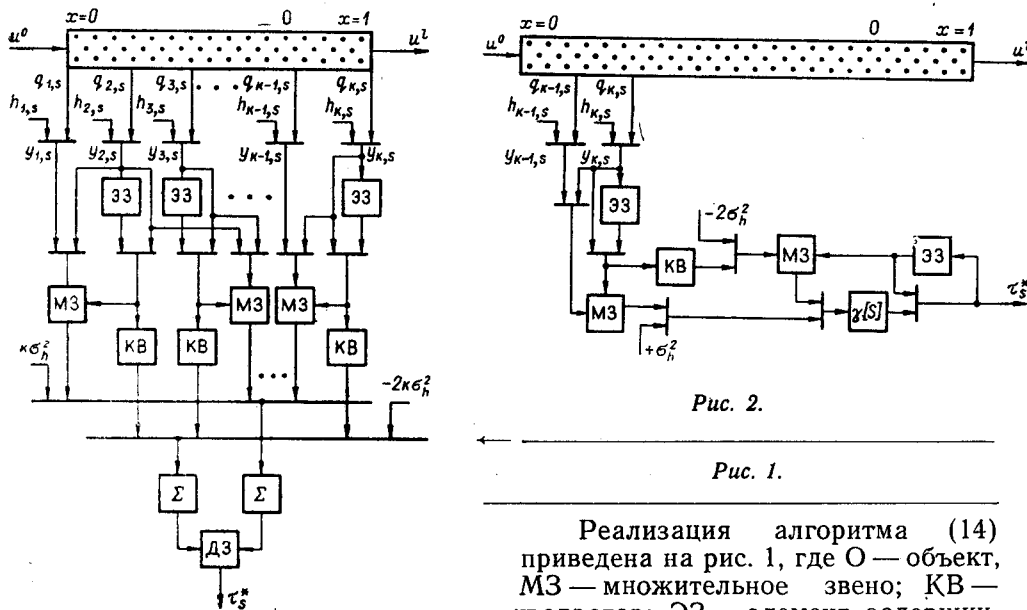


Рис. 2.

Рис. 1.

Реализация алгоритма (14) приведена на рис. 1, где O — объект, $MЗ$ — множительное звено; $КВ$ — квадрат; $ЭЗ$ — элемент задержки

на один такт; $ДЗ$ — делительное звено; Σ — накапливающий сумматор. Поскольку полученная оценка учитывает значение сигналов не в двух лишь точках объекта, а по всей его длине, следует ожидать, что она точнее оценки (12).

Рассмотрим теперь второй случай — минимизацию ошибки по методу стохастических аппроксимаций [9, 10]. В качестве меры ошибки I выберем математическое ожидание квадрата отклонения измеряемого значения сигнала от предсказываемого. Оценку запаздывания будем выбирать таким образом, чтобы минимизировать ошибку.

$$I = M \{(y_{k,s} - \overset{\Delta}{y}_{k,s})^2\} = M \{[y_{k,s} - y_{k-1,s} + \tau (y_{k,s} - y_{k,s-1})]^2\} \quad (15)$$

Следуя [10], найдем производную I по оцениваемому параметру и приравняем ее нулю:

$$\frac{dI}{d\tau} = M \{2 [y_{k,s} - y_{k-1,s} + \tau (y_{k,s} - y_{k,s-1})] (y_{k,s} - y_{k,s-1})\} = 0. \quad (16)$$

Далее, запишем рекуррентное соотношение, связывающее величину оценки τ в момент s с оценкой, полученной в предыдущем такте:

$$\tau_{1,s}^* = \tau_{1,s-1}^* + \gamma_s [y_{k,s} - y_{k-1,s} + \tau_{1,s-1}^* (y_{k,s} - y_{k,s-1})] \times \\ \times (y_{k,s} - y_{k,s-1}), \quad (17)$$

где γ_s — функция времени типа $\frac{1}{s}$.

Величина τ_0^* выбирается произвольно.

Одним из достаточных условий несмещенности полученной оценки является равенство нулю математического ожидания градиента функции потерь I . Это условие для алгоритма (7) не выполняется, т. е. оценка (17) смещена. Вычисляя $M \left\{ \frac{dI}{d\tau} \mid \tau_{s-1}^*, q_{i,j} \right\}$, можно определить величину смещения и способом, аналогичным изложенному выше, устранить смещенность. Получим алгоритм

$$\tau_s^* = \tau_{s-1}^* + \gamma_s \{ [(y_{k,s} - y_{k-1,s}) (y_{k,s} - y_{k,s-1}) + \sigma_h^2] + \\ + \tau_{s-1}^* [(y_{k,s} - y_{k,s-1})^2 - 2\sigma_h^2] \}. \quad (18)$$

Можно показать, что оценка τ сходится к истинному значению τ с вероятностью, равной единице.

Возможный вариант реализации алгоритма (18) приведен на рис. 2. Обобщение на случай, когда выходная величина измеряется в k точках объекта, расположенных друг от друга на расстоянии Δx по всей его длине, не представляет затруднений.

Если уровень помех, действующих в каналах измерений, пренебрежимо мал, то можно предложить такой способ оценки τ . Проинтегрируем левую и правую части (1) по t в пределах от нуля до t . Получим:

$$\tau_n \int_0^t \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} dt = - \int_0^t \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} dt,$$

или

$$\tau_n q(x,t) = - \int_0^t \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} dt. \quad (19)$$

Из (19) определим

$$\tau_n = \frac{\int_0^t \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} dt}{q(x,t)}. \quad (20)$$

Для построения алгоритма вычисления τ заменим производную по координате конечной разностью. Шаг квантования будем считать равным единице. Тогда из (20) найдем

$$\tau = \frac{\int_0^1 [q_{k-1}(t) - q_k(t)] dt}{q_k(t)}. \quad (21)$$

ОЦЕНКА «РАСПРЕДЕЛЕННОГО» ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Объектом с «распределенным» запаздыванием называют объект [7], описываемый уравнением диффузии

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2}, \quad (22)$$

где коэффициент κ характеризует величину «распределенного» запаздывания.

Следуя Калману, дискретизируем уравнение (22) с шагом по координате и времени, равным единице:

$$q_{k, s} - q_{k, s-1} = \kappa (q_{k+1, s} - 2q_{k, s} + q_{k-1, s}). \quad (23)$$

Известно [11], что сеточная модель (23) является устойчивой при любых шагах дискретизации по t и по x и погрешность аппроксимации не превышает определенной конечной величины. Пусть сигналы q, i измеряются с помехами $h_{i, j}$ в трех точках объекта:

$$y_{i, j} = q_{i, j} + h_{i, j} \quad (i = k-1, k, k+1). \quad (24)$$

Минимизируя меру ошибки по методу наименьших квадратов и вычисляя величину смещения, получим выражение для несмещенной оценки

$$x^* = \frac{\sum_{s=1}^N [(y_{k, s} - y_{k, s-1})(y_{k+1, s} - 2y_{k, s} + y_{k-1, s}) + 2\sigma_h^2]}{\sum_{s=1}^N [(y_{k+1, s} - 2y_{k, s} + y_{k-1, s})^2 - 6\sigma_h^2]}. \quad (25)$$

Нетрудно показать, что полученная оценка состоятельна. Блок-схема вычислительного устройства, работающего по формуле (25), приведена на рис. 3. Если выходной сигнал измеряется в k точках объекта, то формула для вычисления оценки имеет вид

$$x^* = \frac{\sum_k \sum_{s=1}^N [(y_{k, s} - y_{k, s-1})(y_{k+1, s} - 2y_{k, s} + y_{k-1, s}) + 2\sigma_h^2]}{\sum_k \sum_{s=1}^N [(y_{k+1, s} - 2y_{k, s} + y_{k-1, s})^2 - 6\sigma_h^2]}. \quad (26)$$

Применение метода стохастических аппроксимаций дает следующий алгоритм вычисления оценки x^* , сходящейся к истинному значению x с вероятностью, равной единице:

$$x_s^* = x_{s-1}^* + \gamma_s \{ [(y_{k,s} - y_{k,s-1})(y_{k+1,s} - 2y_{k,s} + y_{k-1,s}) + 2\sigma_h^2 - x_{s-1}^* [(y_{k+1,s} - 2y_{k,s} + y_{k-1,s})^2 - 6\sigma_h^2]] \}. \quad (27)$$

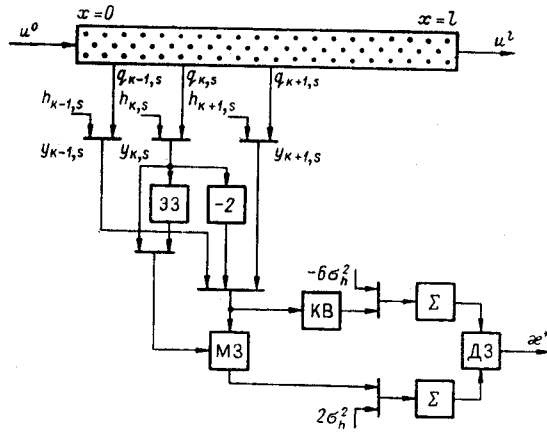


Рис. 3.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ПО ПЕРВОМУ И ВТОРОМУ МЕТОДАМ

Запишем алгоритм (18) оценки запаздывания, полученный по методу стохастических аппроксимаций, в виде, более удобном для анализа:

$$\tau_s^* = \tau_{s-1}^* + \gamma_s \{ [(y_{k,s} - y_{k-1,s})(y_{k,s} - y_{k,s-1}) + \sigma_h^2] + \tau_{s-1}^* [(y_{k,s} - y_{k,s-1})^2 - 2\sigma_h^2] \} = \tau_{s-1}^* \{ 1 - \gamma_s [(y_{k,s} - y_{k,s-1})^2 - 2\sigma_h^2] \} + \gamma_s [(y_{k,s} - y_{k,s-1})(y_{k-1,s} - y_{k,s}) + \sigma_h^2]. \quad (28)$$

Алгоритм (12), полученный первым методом, преобразуем следующим образом. Оценка в $(N-1)$ -м такте равна

$$\tau_{N-1}^* = \frac{\sum_{s=1}^{N-1} [(y_{k,s} - y_{k,s-1})(y_{k-1,s} - y_{k,s}) + \sigma_h^2]}{\sum_{s=1}^{N-1} [(y_{k,s} - y_{k,s-1})^2 - 2\sigma_h^2]} = \frac{A}{B}, \quad (29)$$

а в N -м такте —

$$\begin{aligned} \tau_N^* &= \frac{A + [(y_{k,N} - y_{k,N-1})(y_{k-1,N} - y_{k,N}) + \sigma_h^2]}{B + [(y_{k,N} - y_{k,N-1})^2 - 2\sigma_h^2]} = \\ &= \frac{A}{B} \left(1 - \frac{(y_{k,N} - y_{k,N-1})^2 - 2\sigma_h^2}{B + [(y_{k,N} - y_{k,N-1})^2 - 2\sigma_h^2]} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{(y_{k,N} - y_{k,N-1})(y_{k-1,N} - y_{k,N}) + \sigma_h^2}{B + [(y_{k,N} - y_{k,N-1})^2 - 2\sigma_h^2]}. \quad (30)$$

Пусть

$$\frac{1}{B + [(y_{k,N} - y_{k,N-1})^2 - 2\sigma_h^2]} = \frac{1}{\sum_{s=1}^N [(y_{k,s} - y_{k,s-1})^2 - 2\sigma_h^2]} = a_N.$$

Из сравнения алгоритмов (28) и (31) следует интересный вывод: при выборе $\gamma_s = a_N$ алгоритмы (18) и (12) совпадают.

В [9] показано, что для выполнения условий сходимости по вероятности γ_s должна удовлетворять соотношениям:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s = \infty; \quad \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s^2 < \infty. \quad (32)$$

Условием (32) удовлетворяет такая последовательность, для которой существуют две такие положительные константы c' и c'' , что

$$\frac{c'}{s} \leq \gamma_s \leq \frac{c''}{s}. \quad (33)$$

Если предположить, что знаменатель a_N не обращается в нуль, то a удовлетворяет условию (33). В самом деле, при $(y_{k,s} - y_{k,s-1})^2 - 2\sigma_h^2 = \varphi_{\min}$

$$a_N = \frac{1}{N \varphi_{\min}} = \frac{c''}{N}, \quad \text{где } c'' = \frac{1}{\varphi_{\min}}, \quad \text{а при}$$

$$(y_{k,s} - y_{k,s-1})^2 - 2\sigma_h^2 = \varphi_{\max} \quad a_N = \frac{1}{N \varphi_{\max}} = \frac{c'}{N}, \quad \text{где}$$

$$c' = \frac{1}{\varphi_{\max}}, \quad \text{т. е. } \frac{c'}{N} \leq a_N \leq \frac{c''}{N}.$$

Аналогично можно показать идентичность алгоритмов (25) и (27).

Интересно отметить, что в случае, когда входной сигнал можно измерять точно, а возмущение действует лишь внутри объекта, оценка, получаемая первым, а при определенном выборе γ_s и вторым методами, совпадает с оценкой, оптимальной в смысле максимума правдоподобия. Этот факт позволяет надеяться, что полученные оценки имеют высокую эффективность.

Таким образом, полученные алгоритмы оценки различаются лишь структурами вычислительных устройств, и вопрос о том, какому алгоритму отдать предпочтение, сводится к вопросу удобства реализации.

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Во многих технологических объектах взаимодействие сред осуществляется по всему пути движения по принципу прямо- или противоточка. Динамику их можно описать [1] системой дифференциальных урав-

нений с частными производными

$$\begin{cases} \frac{\partial q^1}{\partial t} = -w_n^1 \frac{\partial q^1}{\partial x} + \alpha_1 (q^2 - q^1); \\ \frac{\partial q^2}{\partial t} = -w_n^2 \frac{\partial q^2}{\partial x} + \alpha_2 (q^1 - q^2), \end{cases} \quad (34)$$

где w — абсолютная величина линейной скорости среды;
 $q(x, t)$ — температура или концентрация среды;
 α_1 и α_2 — постоянные коэффициенты.

Таким образом, тепло- или массообменные противоточные аппараты характеризуются наличием запаздывания τ_n , связанного со скоростью w и длиной аппарата l соотношением $\tau_n = l/w$. Уравнения (34) модифицированы методом Калмана с минимизацией функции потерь по методу стохастических аппроксимаций. Рассмотрим дискретный аналог (34)

$$\begin{cases} q_{k,s}^1 - q_{k,s-1}^1 = -w^1 (q_{k,s}^1 - q_{k-1,s}^1) + \alpha_1 (q_{k,s}^2 - q_{k,s}^1); \\ q_{k,s}^2 - q_{k,s-1}^2 = -w^2 (q_{k,s}^2 - q_{k-i,s}^2) + \alpha_2 (q_{k,s}^1 - q_{k,s}^2). \end{cases} \quad (35)$$

Оценки v_s^1 и v_s^2 параметров w^1 и w^2 найдем следующим образом. Заменим в (35) значения q^i измеренными с помехами значениями y и минимизируем математическое ожидание суммы квадратов уклонений:

$$M \left\{ \sum_{i=1}^2 [y_{k,s}^i - y_{k,s-1}^i + w^i (y_{k,s}^i - y_{k-1,s}^i) - \alpha_i (y_{k,s}^j - y_{k,s}^i)]^2 \right\} = \min_{w^1, w^2}, \quad (36)$$

где $j=2$ при $i=1$; $j=1$ при $i=2$.

Применим к (36) процедуру стохастических аппроксимаций и получим алгоритм для определения оценок v_s^i

$$\begin{aligned} v_s^i &= v_{s-1}^i - \gamma_s [(y_{k,s}^i - y_{k,s-1}^i) (y_{k,s}^i - y_{k-1,s}^i) + \\ &+ v_{s-1}^i (y_{k,s}^i - y_{k-1,s}^i)^2 - \alpha_i (y_{k,s}^j - y_{k,s}^i) (y_{k,s}^i - y_{k-1,s}^i)]. \end{aligned} \quad (37)$$

Для получения несмещенной оценки алгоритм (37) может быть скорректирован так же, как это сделано выше.

Для случая распределенного контроля необходимо минимизировать следующее выражение:

$$\begin{aligned} M \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_k [y_{k,s}^i - y_{k,s-1}^i + w^i (y_{k,s}^i - y_{k-1,s}^i) + \right. \\ \left. + \alpha_i (y_{k,s}^j - y_{k,s}^i)]^2 \right\} = \min_{w^1, w^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Оценка v_s^i имеет вид

$$v_s^i = v_{s-1}^i - \gamma_s \sum_k [(y_{k,s}^i - y_{k,s-1}^i) - \alpha_i (y'_{k,s} - y_{k,s}^i)] \times \\ \times (y_{k,s}^i - y_{k-1,s}^i) - v_{s-1}^i \sum_k (y_{k,s}^i - y_{k-1,s}^i)^2. \quad (39)$$

Из (36) следует, что развитый метод применим к системе n уравнений типа (35).

ВЫВОДЫ

Подход к звену запаздывания как к объекту с распределенными параметрами, описываемому дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка, позволил поставить и решить задачу оценки параметра — времени запаздывания. Полученные алгоритмы оценок чистого и «распределенного» запаздывания и соответствующие им структуры вычислительных устройств достаточно просты.

Развитый метод, основанный на использовании способа стохастических аппроксимаций, даст возможность достаточно просто распространить процедуру оценки на случай сложных технологических объектов, описываемых системой n дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Предложенные методы позволяют осуществлять синтез систем дискретного распределенного контроля объекта для оценки параметров при наличии помех.

Приложение I

Покажем сходимость решения дискретной модели (3) к решению непрерывного уравнения в частных производных (1) при стремящихся к нулю интервалах квантования по координате и времени.

Легко видеть, что решение уравнения (1) в операторной форме имеет вид

$$q(t, p) = q(0, p) e^{-p\tau}, \quad (\text{П.1})$$

где p — оператор Лапласа.

Пусть шаг дискретизации по координате есть Δx , а по времени — Δt . Тогда разностное уравнение будет иметь вид

$$\frac{1}{k\Delta x} \frac{\Delta q(k\Delta x, s\Delta t)}{\Delta t} = \frac{q((k-1)\Delta x, s\Delta t) - q(k\Delta x, s\Delta t)}{\Delta x}, \quad (\text{П.2})$$

где $k\Delta x = x$.

Применяя к (П.2) дискретное преобразование Лапласа [12] и считая начальные условия нулевыми, получим

$$\frac{\tau}{k\Delta x} (e^{\Delta tp} - 1) q(k\Delta x, p) = q((k-1)\Delta x, p) - q(k\Delta x, p); \quad (\text{П.3})$$

отсюда

$$q(k\Delta x, p) \Big|_{x=l} = \left[1 + \frac{\tau}{\Delta tk} (e^{\Delta tp} - 1) \right]^{-k} q(0, p). \quad (\text{П.4})$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ k стремится к бесконечности и выражение в квадратных скобках преобразуется:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{\tau}{\Delta t k} (e^{\Delta t p} - 1) \right]^{-k} = \exp \left\{ -\frac{\tau}{\Delta t} (e^{\Delta t p} - 1) \right\}. \quad (\text{П.5})$$

Теперь устремим к нулю Δt :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\tau}{\Delta t} (e^{\Delta t p} - 1) \right\} = -\tau p. \quad (\text{П.6})$$

Подставив (П. 6) в (П. 5), а (П. 5) в (П. 4), окончательно получим

$$q(x, p) |_{x=l} = q(0, p) e^{-p\tau} \quad (\text{П.7})$$

Приложение 2

Покажем, что разностное уравнение (3) описывает дискретный элемент запаздывания. Для простоты выкладок дискретизацию выполним таким образом, чтобы за один такт Δt по времени точка перемещалась на один шаг Δx по координате. Тогда при длине объекта $k\Delta x$ запаздывание составит $k\Delta t = \tau$ и разностное уравнение будет иметь вид

$$k \Delta t \frac{\Delta q(k \Delta x, s \Delta t)}{\Delta t} = \frac{q((k-1) \Delta x, s \Delta t) - q(k \Delta x, s \Delta t)}{\Delta x} k \Delta x. \quad (\text{П.8})$$

Используя дискретное преобразование Лапласа, получим

$$q(k \Delta x, p) |_{x=l} = q(0, p) e^{-k \Delta t p} = q(0, p) e^{-p\tau}. \quad (\text{П.9})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Девятков. Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления. Новосибирск, РИО СО АН СССР, 1964.
2. Е. П. Маслов. Применение теории статистических решений к задачам оценки параметров объекта.—Автоматика и телемеханика, 1963, т. XXIV, № 10.
3. I. Selin. Estimation of the Relative Delay of Two Similar Signals, of Unknown Phases, in White Gaussian Noise.—IEEE Trans. on Information Theory, 1964, v. IT—10, № 3.
4. P. Wintz. A Strategy for Obtaining Explicit Estimators of Signal Delay.—IEEE Trans. Space Electron, and Telemetry, 1965, v. II, № 1.
5. Л. А. Гиршов, И. В. Гельман, Л. А. Добрян. Некоторые инженерные методы анализа объектов регулирования с монотонными переходными функциями.—Автоматика и телемеханика, 1962, т. XXIII, № 9.
6. Я. Е. Гельфанд. Об одном методе определения статистических характеристик объектов регулирования.—Автоматика и телемеханика, 1965, т. XXVI, № 7.
7. I. K. Lubbock, H. A. Barker. Complex Frequency Response Diagrams and Their Use in the Design of Feedback Control Systems.—Process Control and Automation, 1962, v. 9, № 8.
8. R. E. Kalman. Design of Self-Optimizing Control System.—Trans. of the ASME, 1958, v. 80, № 2.
9. H. Robbins, S. Monro. A Stochastic Approximations Method.—Annals of Mathematical Statistics, 1951, v. 22, № 1.
10. Я. З. Цыпкин. Адаптация, обучение и самообучение в автоматических системах. (Итоги, проблемы, перспективы). М., ИАТ (ТК), 1965.
11. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений, т. 2. М., Физматгиз, 1962.
12. Я. З. Цыпкин. Теория импульсных систем. М., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
14 февраля 1966 г.