

А. Н. КАСПЕРОВИЧ, Н. В. ЛИТВИНОВ

(Новосибирск)

К ВОПРОСУ О ДИНАМИЧЕСКОЙ ОШИБКЕ ЦИФРОВОГО ПРИБОРА ПОРАЗРЯДНОГО УРАВНОВЕШИВАНИЯ*

Анализируются статистические характеристики динамической ошибки цифровых приборов поразрядного уравнивания, вызываемой изменением измеряемой величины за время измерения. Строится осредненный по шкале закон плотности распределения этой ошибки для шестиразрядного прибора при равномерных законах распределения измеряемой величины и ее производной.

В работе [1] была проанализирована ошибка цифровых приборов поразрядного уравнивания, вызываемая конечностью времени измерения. Было показано, что функция ошибки $\delta = \delta[U(t), \dot{U}(t)]$, зависящая лишь от значения измеряемой величины $U(t)$ и ее производной $\dot{U}(t)$, может быть использована только для конкретно заданных законов $U(t)$ и $\dot{U}(t)$. Там же в качестве характеристики прибора была рассмотрена максимальная динамическая ошибка (максимальное значение функции ошибки при заданном классе измеряемых напряжений).

При обработке результатов измерений, помимо максимальных динамических ошибок отдельных результатов, желательно знать статистические характеристики динамической ошибки. Кроме того, знание статистических характеристик динамической ошибки позволит более детально сравнивать между собой цифровые приборы различных типов. Поэтому установление связи между статистическими характеристиками измеряемого сигнала и ошибки для приборов различных типов и в первую очередь для приборов поразрядного уравнивания является необходимым и правомочным.

Наиболее полно статистические характеристики динамической ошибки описываются осредненным по шкале законом плотности ее распределения и законом плотности распределения динамической ошибки для данного результата измерения E_i . Статистический подход к анализу погрешности измерения с учетом динамической ошибки был использован в [2]. В данной работе динамическая ошибка характеризуется лишь средним квадратом, который определяется формулой

$$\sigma_{\delta}^2 = \delta_U^2 t_{\text{изм}} + \frac{q^2}{12}, \quad (1)$$

где σ_U^2 — дисперсия производной измеряемой величины;
 $t_{\text{изм}}$ — время измерения.

* Материал доложен на VIII Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений в сентябре 1966 года в Новосибирске.

По сути дела эта формула определяет дисперсию изменения измеряемой величины за время измерения. Ясно, что средний квадрат динамической ошибки, подсчитанный по выражению (1), будет завышенным. В связи с этим была поставлена задача анализа статистических свойств динамической ошибки прибора поразрядного уравнивания с учетом его структуры.

Пусть измеряемый сигнал $U(t)$ на интервале времени измерения с достаточной степенью точности представим в виде

$$U(t) = U(t_n) + \dot{U}(t_n)(t - t_n); \quad 0 \leq t \leq t_n, \quad (2)$$

где t_n — момент окончания измерения.

Предположим также, что совместная плотность распределения вероятностей $p[U(t_n), \dot{U}(t_n)]$ известна. Для нахождения осредненного по шкале закона плотности распределения вероятностей ошибки $p(\delta)$ можно воспользоваться формулой полной вероятности [3]

$$p(\delta) = \sum_{i=1}^{2^n} P(E_i) P(\delta/E_i), \quad (3)$$

где $P(E_i)$ — вероятность получения результата E_i ;
 $P(\delta/E_i)$ — условная вероятность появления ошибки δ при получении результата E_i .

Вероятность получения результата E_i можно определить по формуле

$$P(E_i) = \int \int_{D_i} p[U(t_n), \dot{U}(t_n)] dU d\dot{U}, \quad (4)$$

где область интегрирования D_i — область значений $U(t_n)$ и $\dot{U}(t_n)$, при которых результат измерения равен E_i .

Для приборов поразрядного уравнивания область D_i задается системой n неравенств, которые определяются результатами n сравнений при получении данного E_i . Например, если для шестиразрядного прибора $E_i = 29q$ (q — шаг квантования по уровню), то область D_{29} определяется следующей системой шести неравенств:

$$\begin{aligned} U(t_1) - 32q < 0; \quad U(t_4) - 28q > 0; \\ U(t_2) - 16q > 0; \quad U(t_5) - 30q < 0; \\ U(t_3) - 24q > 0; \quad U(t_6) - 29q \leq 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где t_1, t_2, \dots, t_n — моменты сравнения измеряемой и компенсационной величин.

На рис. 1 показан вид области D_i для случая, когда результат измерения равен 29 единицам. При этом результате область ограничивается лишь тремя прямыми. Цифры, стоящие около прямых, указывают на номер сравнения, которым определяется данная прямая, а стрелки показывают, выше или ниже этой прямой располагаются возможные

значения $U(t)$. Вообще говоря, эти области могут быть и незамкнутыми (т. е. быть областями открытого типа).

Сложный вид области D_i не позволяет выразить пределы интегрирования через результат измерения. Особенным является случай малых $\dot{U}(t)$, когда $p \left\{ |\dot{U}(t)| \leq \frac{q}{(n-1)\tau} \right\} \approx 1$.

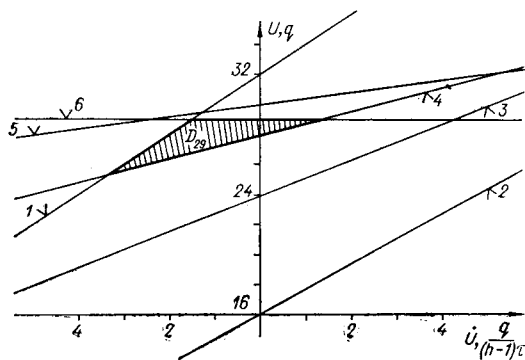


Рис. 1.

При этом область D_i определяется всего лишь двумя прямыми (т. е. двумя сравнениями). Одна прямая определяется результатом последнего сравнения, вторая — результатом некоторого промежуточного сравнения, которое при данном измерении последний раз дает команду «мало» или «много» [1].

Вероятность $P(\delta/E_i)$ может быть выражена через совместную плотность вероятности $p(U, \dot{U})$:

$$P(\delta/E_i) = \frac{1}{P(E_i)} \int_{\alpha} p(U, \dot{U}) d\dot{U}, \quad (6)$$

где $\alpha = \alpha(E_i, \delta)$ — одномерная область, определяемая значениями E_i и δ .

Тогда формула (3) может быть записана так:

$$p(\delta) = \sum_{i=1}^{2^n} \int_{\alpha} p(U, \dot{U}) d\dot{U}. \quad (7)$$

Отсюда осредненный по шкале средний квадрат динамической ошибки $\bar{\delta}^2$ при отнесении результата измерения к моменту t_n равен

$$\bar{\delta}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{2^n} \int_{\alpha} p(U, \dot{U}) d\dot{U} \right\} \delta^2 d\delta. \quad (8)$$

Несложные преобразования (перемена мест интегрирования и суммирования, а также подстановка ошибки в виде $\delta = U - E$) позволяют получить

$$\bar{\delta}^2 = \sum_i \int_{D_i} \int p(U, \dot{U}) [U - E]^2 dU d\dot{U}. \quad (9)$$

Из (6) можно найти одну из важных характеристик цифрового прибора — условный средний квадрат ошибки $\bar{\delta}_i^2$ при получении результата E_i :

$$\bar{\delta}_i^2 = \frac{1}{p(E_i)} \int_{D_i} \int p(U, \dot{U}) (U - E_i)^2 dU d\dot{U}. \quad (10)$$

Более удобным оказался другой путь построения осредненного по шкале закона плотности распределения ошибки — использование следующего равенства:

$$P(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} P[U(t_n)] P[\delta/U(t_n)] dU(t_n), \quad (11)$$

где $P[U(t_n)]$ — вероятность того, что измеряемая величина в момент окончания измерения t_n примет значение $U(t_n)$;

$P[\delta/U(t_n)]$ — условная вероятность ошибки δ в том случае, когда измеряемая величина принимает значение $U(t_n)$;

$$P[\delta/U(t_n)] = \frac{1}{P[U(t_n)]} \int_{\beta} P[U(t_n), \dot{U}(t_n)] d\dot{U}, \quad (12)$$

где $\beta = \beta[U(t_n), \delta]$ — одномерная область.

Использование выражения (11) затруднено тем, что условная вероятность $P[\delta/U(t_n)]$ сложным образом зависит от $U(t_n)$. В связи с этим осредненный закон плотности распределения динамической ошибки прибора поразрядного уравнивания, имеющего 6 двоичных разрядов, в соответствии с (11) находится графическим способом. Вычисления производились в предположении, что случайные величины $U(t_n)$ и $\dot{U}(t_n)$ независимы и распределены равномерно: $U(t_n)$ в пределах шкалы, а $\dot{U}(t_n)$ в пределах $|\dot{U}(t_n)| < \frac{q}{\tau}$. Это условие позволило свести вычисление $P[\delta/U(t_n)]$ к вычислению площадей S_k . Площади S_k , заключенные каждая между двумя крайними прямыми $U(t)$, для которых выполняется условие $U(t_n) - E(t_n) = \delta_k$, пропорциональны условной вероятности получения ошибки

$$P[\delta/U(t_n)] = \begin{cases} P[\delta_1/U(t_n)] \sim S_1; \\ \dots \\ P[\delta_k/U(t_n)] \sim S_k. \end{cases} \quad (13)$$

(Если производная $\dot{U}(t)$ распределена неравномерно, то в первом приближении это можно учесть, умножая площадь S_k на вероятность попадания значений производной в диапазон, при котором $U(t)$ находится в этой площади.)

На рис. 2 представлен участок диаграммы состояний шестиразрядного прибора поразрядного уравнивания, поясняющий метод вычисления $P[\delta/U(t)]$ для случая, когда измеряемая величина в момент последнего сравнения попадает в 29-й квант. При этом параметр λ характеризует расположение $U(t_n)$ в кванте. На диаграмме жирными линиями представлена последовательность изменения компенсацион-

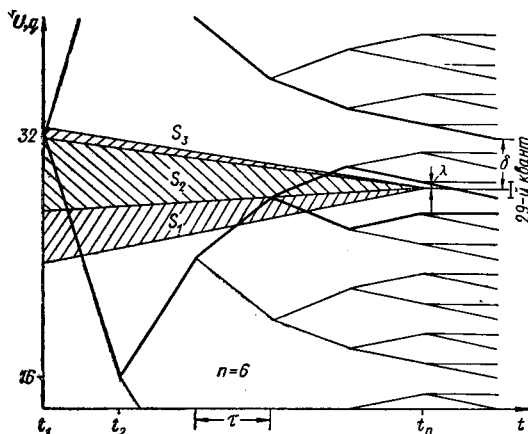


Рис. 2.

ной величины $E(t)$, которая может иметь место при вышеуказанных предположениях. В данном случае возможны следующие значения $E(t_n)$: $27q$, $28q$ и $32q$. При этом ошибка будет принимать соответственно значения $(1+\lambda)q$, λq и $(\lambda-4)q$. Площади S_1 , S_2 и S_3 , пропорциональные вероятностям этих ошибок, отделяются друг от друга линиями, проходящими через узловые точки диаграммы состояний $[32q, t_1]$ и $[28q, t_4]$. Вычисление этих площадей показало, что

$$P[(1+\lambda)q/(29+\lambda)q] \sim \frac{2-\lambda}{4};$$

$$P[\lambda q/(29+\lambda)q] \sim \frac{8+3\lambda}{20}; \quad (14)$$

$$P[(\lambda-4)q/(29+\lambda)q] \sim \frac{1+\lambda}{10}.$$

В связи с тем, что ошибки при попадании $U(t)$ в разные кванты будут различными, для получения осредненного по шкале закона плотности распределения ошибки необходимо осреднение провести сначала в пределах каждого кванта. На рис. 3

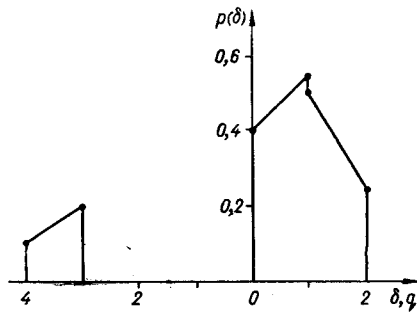


Рис. 3.

приведена такая зависимость вероятности ошибки от ее значения, когда $U(t)$ попадает в 29-й квант. Подобные графики были получены для всех квантов шкалы. Число вычисляемых распределений этого типа не равно числу квантов ввиду того, что распределения для некоторых квантов либо одинаковы, либо являются зеркально-симметричными по отношению друг к другу. (Так, например, в рассматриваемом случае зеркально-симметричными будут законы распределения для 29 и 36-го квантов.) Количество таких однородных квантов связано с максимальным значением модуля производной измеряемой величины. С увеличением $|\dot{U}(t_n)|$ число однородных квантов уменьшается.

Затем для получения осредненного по шкале закона плотности распределения ошибки $p(\delta)$ ординаты всех этих графиков были просуммированы с весовыми коэффициентами, определяемыми распределением $U(t_n)$. Полученный график плотности распределения ошибки представлен на рис. 4. По этому графику было найдено, что математическое ожидание ошибки равно $0,5q$, а дисперсия ошибки составляет $0,571q^2$. (Для сравнения на рис. 4 штриховой линией нанесен график нормального закона с теми же параметрами.) Неравенство математического ожидания нулю объясняется тем, что результат квантования относится к началу кванта. Отметим, что дисперсия ошибки, вычисленная по формуле (1) при тех же предположениях, равна $12q^2$.

При уменьшении предельного значения производной измеряемой величины осредненный по шкале закон распределения ошибки вырождается в равномерный с математическим ожиданием $0,5q$ и дисперсией $\frac{q^2}{12}$. При увеличении предельного значения производной дисперсия ошибки будет увеличиваться, а форма закона плотности распределения ошибки приближаться к нормальной. Увеличение числа разрядов цифрового прибора при сохранении предельного значения производной так-

же будет иметь следствием приближение закона распределения к нормальному.

На практике удобно иметь аналитическое выражение, связывающее осредненную по шкале дисперсию ошибки σ_{δ}^2 и дисперсию производной измеряемой величины $\sigma_{\dot{U}}^2$ для приборов поразрядного уравнивания. С помощью графика рис. 4 было получено следующее аппроксимирующее выражение:

$$\sigma_{\delta}^2 = \frac{q^2}{12} + a \sigma_{\dot{U}}^2 \tau^2 (n - 1)^2, \quad (15)$$

где $a=0,06$.

Коэффициент a в общем случае будет зависеть от соотношения между числом разрядов и предельно допустимым значением производной измеряемой величины. Однако можно считать, что при увеличении числа разрядов и предельного значения производной изменения этого коэффициента будут незначительными.

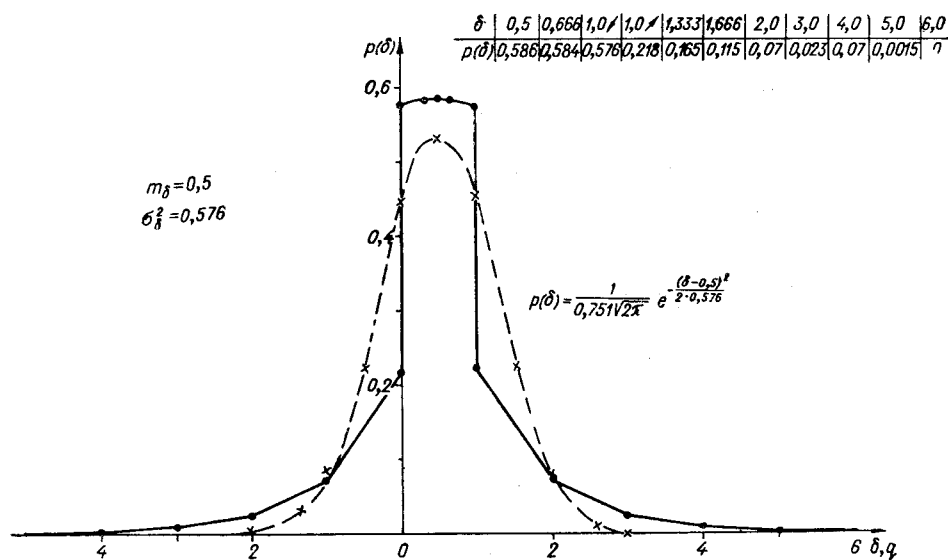


Рис. 4.

Рассмотренная методика получения закона плотности распределения ошибки может быть использована и в случае отличного от равномерного, например, нормального закона распределения $U(t)$ и $\dot{U}(t)$. Процесс вычислений при этом, особенно при большом числе разрядов, достаточно трудоемок, и поэтому его целесообразно проводить с помощью цифровых вычислительных машин.

Есть основания считать, что поскольку на шкале имеются однородные кванты, то, если распределение измеряемой величины охватывает достаточно большую часть шкалы, закон плотности распределения ошибки будет слабо зависеть от этого распределения. Можно также предполагать, что при достаточно большом максимальном значении производной закон плотности распределения ошибки в самом грубом приближении может быть получен путем перемножения соответствующих значений законов распределения плотности измеряемой величины

и плотности, представленной на рис. 4, и последующей затем нормировки.

В заключение отметим, что цифровой прибор поразрядного уравнивания обладает фильтрующими свойствами, если изменение измеряемой величины за время измерения рассматривать как своеобразную помеху, а динамическую ошибку как реакцию на эту помеху.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Касперович, Н. В. Литвинов. К анализу динамических ошибок, возникающих при измерениях цифровыми измерительными приборами поразрядного уравнивания.— *Автоматрия*, 1966, № 1.
2. Б. Г. Доступов. Некоторые вопросы теории точности преобразователей.— В сб. «Комбинированные вычислительные машины». М., Изд-во АН СССР, 1962.
3. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., Физматгиз, 1961.

*Поступила в редакцию
12 октября 1966 г.*

A. N. Kasperovich, N. V. Litvinov

ON THE SUBJECT OF DYNAMIC ERROR OF SUCCESSIVE APPROXIMATION DIGITAL INSTRUMENT

Statistical characteristics of dynamic error of successive approximation digital instrument are analysed, which arises from time variation of measured quantity. The error density distribution law is average for six-bit instrument when distribution laws of measured quantity and of its derivative are uniform.
