

## АНАЛОГОВЫЕ ЭЛЕКТРОИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ, КОНТРОЛЬНЫЕ И ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ И УСТРОЙСТВА

УДК 621.317.757.3

В. П. ГЕРАСИМЕНКО, Н. Т. НИКИФОРОВ, Р. Р. ХАРЧЕНКО  
 (Москва)

### О ВОЗМОЖНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА СИГНАЛОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДЕЛИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА

При исследовании электрических сигналов возникает необходимость в определении амплитуд их частотных составляющих. Задача решается при помощи анализаторов спектра [1]. Важнейшим узлом последнего является частотоизбирательный фильтр (собственно узкополосный фильтр, резонатор, избирательный усилитель и т. п.) или бесфильтровое устройство (сочетание умножителя с интегратором, когерентный накопитель и др.). В приборе первого типа используется свойство фильтра резко реагировать на сигнал, частота которого совпадает с его собственной частотой. Работа бесфильтрового анализатора чаще всего сводится к аппаратурному моделированию математического выражения ряда Фурье

$$u_1(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1)$$

где  $C_0$  — постоянная составляющая;

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(x) \cos kx \, dx; \quad b_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(x) \sin kx \, dx$$

— соответственно косинусная и синусная составляющие  $k$ -й гармоники, или коэффициент ряда Фурье. Основными операциями при определении  $a_k$  и  $b_k$  являются умножение и интегрирование. Ниже будет показано, что операцию умножения можно заменить операцией деления. В результате этого получается совершенно новый тип анализатора, который до настоящего времени в литературе не описывался. Этот вопрос и рассматривается в данной работе.

Пусть анализируемая функция задана рядом (1). Введем некоторую вспомогательную функцию

$$u_2(x) = D_0 + A_n \cos nx, \quad (2)$$

где  $D_0$  — постоянная составляющая;  $A_n$  — амплитуда переменной составляющей с частотой кратности  $n$  по отношению к основной частоте

функции (1). Выбрав  $D_0 > A_n$  (для того чтобы значение  $U_2(x)$  нигде не обращалось в нуль), разделим (1) на (2) и найдем среднее значение частного за период основной гармоники функции (1)

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)}{D_0 + A_n \cos nx} dx. \quad (3)$$

Полученное выражение можно заменить суммой трех интегралов

$$U = I_1 + I_2 + I_3, \quad (4)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{C_0 + a_n \cos nx}{D_0 + A_n \cos nx} dx;$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{a_k \cos kx}{D_0 + A_n \cos nx} dx;$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k \sin kx}{D_0 + A_n \cos nx} dx.$$

Анализ выражения (4) показывает, что интегралы  $I_2$  и  $I_3$  при  $D_0 \gg A_n$  стремятся к нулю (см. приложение), а интеграл  $I_1$  приводится к виду

$$I_1 = \frac{\beta}{\gamma} \frac{C_0}{D_0} \frac{2\beta^2 - (\gamma - 2\beta) \sqrt{\beta^2 - 1} - \beta\gamma - 1}{\beta^2 - \beta \sqrt{\beta^2 - 1} - 1}. \quad (5)$$

где

$$\beta = \frac{D_0}{A_n}; \quad \gamma = \frac{C_0}{a_n}.$$

Решая (5) относительно  $a_n$  и учитывая, что  $U = I_1$ , находим

$$a_n = \frac{(D_0 U + C_0) (\beta^2 - \beta \sqrt{\beta^2 - 1} - 1) - C_0}{\beta (2\beta^2 - 2\beta \sqrt{\beta^2 - 1} - 1)}. \quad (6)$$

Отсюда видно, что искомая величина  $a_n$  является однозначной функцией  $U$ , которая может быть измерена анализатором.

Выражение (5) можно существенно упростить, если подобрать такое значение  $a_n$ , при котором будет выполнено условие  $\beta = \gamma$ . Тогда

$$I_{1\beta=\gamma} = \frac{C_0}{D_0}. \quad (7)$$

При этом, согласно (4),  $I_1 = U_0 = \text{const}$ , поскольку в (7)  $C_0 = \text{const}$ ,  $D_0 = \text{const}$ . Учитывая условие  $\beta = \gamma$ , находим

$$a_n = \frac{C_0}{D_0} A_n = U_0 A_n. \quad (8)$$

Итак, для аппаратной реализации могут быть предложены два способа определения искомого  $A_n$ : 1) по выходной величине  $U$  из выражения (6) при низких значениях  $A_n$ , 2) по величине  $A_n$  при фиксированном значении  $U=U_0$  из выражения (8).

Предположим теперь, что переменная составляющая вспомогательной функции  $U_2(x)$  с амплитудой  $B_n$  сдвинута по фазе на  $\pi/2$  относительно первоначальной, т. е.

$$u_3(t) = D_0 + B_n \sin nx. \quad (9)$$

Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, получим выражение, подобное уравнению (3):

$$U' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)}{D_0 + B_n \sin nx} dx. \quad (10)$$

Перепишем уравнение (10) в виде суммы трех интегралов

$$U' = I'_1 + I'_2 + I'_3,$$

где

$$I'_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{C_0 + b_n \sin nx}{D_0 + B_n \sin nx} dx;$$

$$I'_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{b_k \sin kx}{D_0 + B_n \sin nx} dx;$$

$$I'_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kx}{D_0 + B_n \sin nx} dx.$$

Можно показать, что при  $D_0 \gg B_n$  интегралы  $I'_2$  и  $I'_3$  стремятся к нулю, а интеграл  $I'_1$  приводится к виду, аналогичному (5):

$$U' = I'_1 = \frac{p}{q} \frac{C_0}{D_0} \frac{2p^2 + (q - 2p) \sqrt{p^2 + 1} - pq + 1}{p^2 - p \sqrt{p^2 + 1} + 1}, \quad (11)$$

где

$$p = \frac{D_0}{B_n}; \quad q = \frac{C_0}{b_n}.$$

Из полученного выражения находим

$$b_n = \frac{(D_0 U' + C_0) (p^2 - p \sqrt{p^2 + 1} + 1) - C_0}{p (2p^2 - 2p \sqrt{p^2 + 1} + 1)}. \quad (12)$$

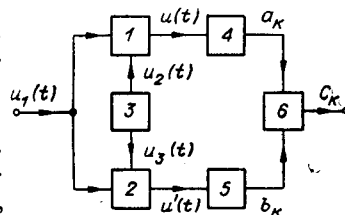
Видно, что  $b_n$  является однозначной функцией  $U'$ , измеряемой анали-

заторм. Упрощая (11) при условии  $p=q$  (выполняется подбором значения  $B_n$ ), получим

$$b_n = \frac{C_0}{D_0} B_n = U_0 B_n. \quad (13)$$

Итак, коэффициент ряда Фурье  $b_n$  может быть определен двумя способами (подобно коэффициенту  $a_n$ ): по величине  $U'$  или по величине  $B_n$ .

Таким образом, доказана принципиальная возможность определения спектрального состава исследуемой функции путем деления ее на вспомогательную функцию, имеющую постоянную и переменную составляющие. Спектральному анализу посредством делительных устройств могут быть подвергнуты и текущие физические процессы, представленные в виде электрических сигналов. В этом случае анализатор должен содержать логотрический преобразователь, выполняющий операцию деления, интегратор и генератор вспомогательной функции (вспомогательного сигнала).



На рисунке представлена блок-схема одного из вариантов анализатора [2] для случая, когда коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  являются функциями  $U$  и  $U'$  и определяются из выражений (6) и (12). В логотрических преобразователях 1 и 2 исследуемый сигнал  $U_1(t)$  делится на вспомогательные сигналы  $U_2(t) = D_0 + A_n \cos k\omega t$  и соответственно  $U_3(t) = D_0 + B_n \sin k\omega t$ , вырабатываемые генератором 3. Получаемые частные  $U(t)$  и  $U'(t)$  поступают на интеграторы 4 и 5. При этом с выхода блока 4 снимается сигнал, пропорциональный  $a_k$ , а с выхода блока 5 — сигнал, пропорциональный  $b_k$ . Модуль амплитуды  $k$ -й гармоники  $C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$  определяется на выходе вычислительного устройства 6. Для нахождения амплитуд остальных гармоник исследуемого спектра необходимо перестраивать частоту генератора 3.

Нетрудно составить блок-схему и второго варианта анализатора, реализующего выражения (8) и (13). При этом амплитуда  $k$ -й гармоники определяется по регулируемым величинам амплитуд  $A_k$  и  $B_k$  переменных составляющих вспомогательных сигналов. Однако такая схема, с точки зрения автоматизации измерений, будет сложнее, поскольку при измерении необходимо изменять как частоту, так и амплитуды вспомогательных сигналов.

Приведенная на рисунке схема имеет большое сходство с бесфильтровым анализатором с перемножением сигналов, описанным в [1]. Отличие состоит в том, что в последнем случае блоки 1 и 2 выполняют операцию умножения, а не деления, и сигналы генератора 3 не содержат постоянных составляющих. Представляет интерес сравнить основные характеристики этих анализаторов.

Важнейшей характеристикой анализаторов является разрешающая способность по частоте — минимальный частотный интервал между соседними компонентами спектра, при котором последние могут быть еще выявлены анализатором. На разрешающую способность в общем случае оказывает влияние неидеальное выполнение операций умножения или деления, интегрирования, а также несинусоидальность переменной составляющей, генерируемой блоком 3. В основном же влияние оказывает интегратор, и разрешающая способность зависит от постоянной времени интегратора  $\tau$  и определяется величиной  $1/\tau$  [3]. По точности операция деления может выполняться не хуже операции умножения.

Несинусоидальность переменного сигнала генераторов в обоих анализаторах тоже одного порядка. Следовательно, по разрешающей способности оба анализатора равноценны.

Уместно напомнить, что в смысле разрешающей способности оба бесфильтровых анализатора имеют преимущество по сравнению с фильтровым. Их разрешающую способность можно сделать весьма высокой за счет практически неограниченного увеличения  $\tau = RC$  (пределом будет служить несовершенство блоков деления или умножения и блока  $\mathcal{Z}$ ). Выполнить же качественный (высокой добротности) фильтр, особенно в области низких (НЧ) и инфранизких (ИНЧ) частот довольно трудно, а иногда и невозможно. Поэтому анализаторы на умножителях, а также на делителях можно применять для детального анализа отдельных участков спектра, особенно в области НЧ и ИНЧ.

Однако увеличение постоянной времени  $\tau$  не может происходить «безнаказанно». С ростом  $\tau$  увеличивается время анализа (вторая существенная характеристика анализатора), что во многих случаях является нежелательным. Этот недостаток в равной мере присущ приборам обоих типов.

Анализатор с логометрическим преобразователем позволяет анализировать спектры в более широком диапазоне частот, чем анализатор с перемножителем. Это преимущество обеспечивается неодинаковым влиянием спада амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) множительного и делительного устройств на результат выполняемых ими операций. При этом выходной сигнал умножителя резко уменьшается по мере увеличения частоты исследуемого сигнала (из-за искажения обоих сомножителей), что в конечном счете искажает результат анализа. Сигнал же на выходе делительного устройства остается практически постоянным, поскольку частотные искажения исследуемого и вспомогательного сигнала получаются одинаковыми (при идентичных частотных характеристиках входов устройства). В случае анализа спектров в неширокой полосе частот указанное преимущество может быть использовано для снижения требования к равномерности АЧХ делительного устройства.

Рассмотрение других характеристик (точность, динамический диапазон, чувствительность и др.) в задачу настоящей работы не входило.

По ряду соображений перспектива построения анализаторов с делительными устройствами авторам кажется заманчивой.

## Приложение

Вычислим интеграл

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)}{D_0 + A_n \cos nx} dx. \quad (1\Pi)$$

Перепишем (1) в виде суммы трех интегралов

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{C_0 + a_n \cos nx}{D_0 + A_n \cos nx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{a_k \cos kx}{D_0 + A_n \cos nx} dx + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k \sin kx}{D_0 + A_n \cos nx} dx = I_1 + I_2 + I_3. \quad (2\Pi)$$

Находим отдельно каждый интеграл. Первый интеграл определяется

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{C_0 + a_n \cos nx}{D_0 + A_n \cos nx} dx = \frac{n}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{C_0 + a_n \cos nx}{D_0 + A_n \cos nx} dx. \quad (3\Pi)$$

После замены переменных

$$e^{jnx} = z, \quad dx = \frac{dz}{jn z}, \quad \cos nx = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad (4\Pi)$$

получим

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \frac{a_n}{A_n} \int_{|z|=1} \frac{z^2 + \frac{C_0}{a_n} 2z + 1}{\left( z^2 + \frac{D_0}{A_n} 2z + 1 \right) z} dz. \quad (5\Pi)$$

Решение интеграла (5\Pi) произведем по теореме Коши о вычетах. Окончательным результатом будет выражение

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{a_n}{A_n} \frac{2 \left( \frac{D_0}{A_n} \right)^2 + \left( \frac{C_0}{a_n} - 2 \frac{D_0}{A_n} \right) \sqrt{\left( \frac{D_0}{A_n} \right)^2 - 1} - \frac{C_0 D_0}{a_n A_n} - 1}{\left( \frac{D_0}{A_n} \right)^2 - \frac{D_0}{A_n} \sqrt{\left( \frac{D_0}{A_n} \right)^2 - 1} - 1} = \\ &= \frac{\beta}{\gamma} \frac{C_0}{D_0} \frac{2\beta^2 + (\gamma - 2\beta) \sqrt{\beta^2 - 1} - \beta\gamma - 1}{\beta^2 - \beta \sqrt{\beta^2 - 1} - 1}, \end{aligned} \quad (6\Pi)$$

где  $\beta = \frac{D_0}{A_n}$  и  $\gamma = \frac{C_0}{a_n}$  введены для упрощения записи. Второй интеграл суммы (2\Pi) определяется

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{a_k \cos kx}{D_0 + A_n \cos nx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{a_k \cos kx}{D_0 + A_n \cos nx} dx. \quad (7\Pi)$$

Для решения (7\Pi) вычислим вспомогательный интеграл

$$I_B = \int_0^{2\pi} \frac{a_k e^{jkx}}{D_0 + A_n \cos nx} dx; \quad (8\Pi)$$

вводя при этом замену переменных, согласно (4\Pi), получим

$$\begin{aligned} I_B &= \frac{2a_k}{jn A_n} \int_{|z|=1} \frac{z^{\frac{k}{n}}}{z^2 + \frac{2D_0}{A_n} z + 1} dz = \frac{2\pi k}{n} \frac{a_k}{A_n} \times \\ &\times \frac{\left[ \sqrt{\left( \frac{D_0}{A_n} \right)^2 - 1} - \frac{D_0}{A_n} \right]^{\frac{k}{n}}}{\sqrt{\left( \frac{D_0}{A_n} \right)^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (9\Pi)$$

Заметим, что подынтегральное выражение в (7П) является вещественной частью подынтегральной функции в (8П). Тогда, используя (9П), найдем

$$I_2 = \frac{1}{A_n} \operatorname{Re} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} a_k \frac{\left[ \sqrt{\left(\frac{D_0}{A_n}\right)^2 - 1} - \frac{D_0}{A_n} \right]^{\frac{k}{n}}}{\sqrt{\left(\frac{D_0}{A_n}\right)^2 - 1}}. \quad (10П)$$

При  $D_0 \gg A_n$   $I_2 \rightarrow 0$ . Рассуждая аналогично, выражение для третьего интеграла представим в виде

$$I_3 = \frac{1}{A_n} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\left[ \sqrt{\left(\frac{D_0}{A_n}\right)^2 - 1} - \frac{D_0}{A_n} \right]^{\frac{k}{n}}}{\sqrt{\left(\frac{D_0}{A_n}\right)^2 - 1}}. \quad (11П)$$

При  $D_0 \gg A_n$   $I_3 \rightarrow 0$ .

Итак, доказано, что функция  $U$  при определенном условии ( $D_0 \gg A_n$ ) оказывается равной первому интегралу (2П), развернутое решение которого записывается уравнением (6П). Аналогично можно показать, что при условии  $D_0 \gg B_n$  интегралы  $I_2$  и  $I_3$  стремятся к нулю, и функция  $U'$  будет равна интегралу  $I_1'$ , развернутое решение которого дано в виде (11).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Харкевич. Спектры и анализ. М., Физматгиз, 1962.
2. В. П. Герасименко. Устройство для безрезонаторного анализа спектра. Авторское свидетельство № 210255.— ИПОТЗ, 1968, № 8.
3. Н. Т. Никифоров, Р. Р. Харченко. Методы анализа спектров электрических сигналов в реальном времени.— Автометрия, 1967, № 6.

Поступила в редакцию  
15 июля 1967 г.