

П. Е. ТВЕРДОХЛЕБ, Г. Д. УМАНЦЕВ, М. П. ЦАПЕНКО
(Новосибирск)

О ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫХ СХЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИГНАЛОВ

В последнее время получают развитие контрольно-измерительные устройства параллельного действия, в которых компоненты входного пространственного сигнала, воспринятые одновременно во многих точках, подвергаются одновременной и параллельной обработке для получения количественных или качественных характеристик этого сигнала. Одной из распространенных операций, которую следует выполнять в такого рода устройствах, является операция дифференцирования входного сигнала по пространственным переменным. Эта операция реализуется, например, с целью нахождения местоположения экстремальных значений сигнала, выделения его контурных границ и т. п.

Рассматривая далее случай задания сигнала $f(x)$ по одной геометрической координате x , отметим, что принципиально работа дифференцирующего устройства может быть основана на известной формальной схеме конечных разностей. Согласно этой схеме, первые разности

$$\Delta_i^{(1)} = f(x_{i+1}) - f(x_i) \quad (1)$$

могут быть приняты в качестве аналогов первой производной в точке x_i ; вторые разности

$$\Delta_i^{(2)} = f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i) \quad (2)$$

— в качестве аналогов второй производной и т. д. Однако эта схема имеет существенный недостаток: даже одиночная ошибка в значениях $f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$ оказывает существенное влияние на значения разностей $\Delta_i^{(s)}$. Ясно, что ее использование в технических устройствах, работающих, как правило, в условиях действия внешних и внутренних помех, окажется по меньшей мере затруднительным.

Улучшения помехоустойчивости схемы конечных разностей можно достичь, если вычисление $\Delta_i^{(s)}$ вести не по значениям отдельных компонент сигнала, а по некоторым его усредненным (сглаженным) значениям. Для этого компоненты $f(x_i)$ следует разбить на k перекрывающихся или неперекрывающихся групп с последующим нахождением взвешенной суммы компонент внутри каждой группы. Если теперь сглаженные значения использовать в выражениях (1), (2), то получим видоизмененную разностную схему, которую назовем модифицированной (рис. 1).

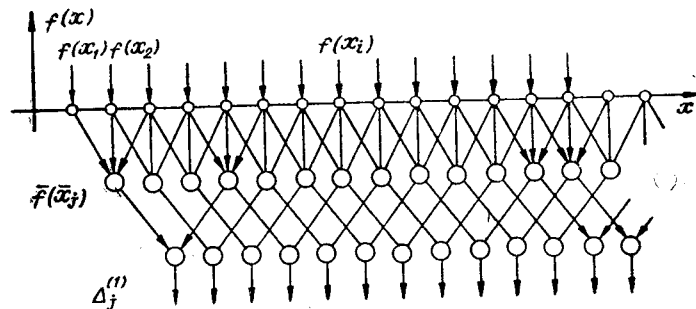


Рис. 1.

Задача настоящей работы состоит в том, чтобы провести сравнительный анализ выходных реакций и мер помехоустойчивости модифицированных разностных схем (МРС) и их обычных аналогов. Результат такого сравнения позволит судить о целесообразности использования МРС при нахождении приближенных значений производных первого и второго порядков.

Пусть компоненты сигнала $f(x_i)$ разбиты на k групп по n компонент в каждой. Условие равенства числа компонент в группах не является обязательным. Таким оно выбрано лишь для простоты дальнейшего изложения. Тогда

* К. Л а н ц о ш. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.

$$\bar{f}(x_j) = \sum_{p=1}^n w_p f(x_{jp}), \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (3)$$

полученное при условии

$$\sum_{p=1}^n w_p = 1 \quad (4)$$

и приложенное в точке

сказать и о координате x_j , для которой справедливо соотношение

$$x_{j1} \leq \bar{x}_j \leq x_{jn}.$$

Подставляя теперь (3) в (1), получим значение первой производной в точке \bar{x}_j

$$\Delta_{jM}^{(1)} = - \sum_{p=1}^n w_p f(x_{jp}) + \sum_{p=1}^n w_p f(x_{(j+1)p}), \quad (6)$$

или

$$\Delta_{jM}^{(1)} = \sum_{l=1}^{2n} w_l f(x_{jl}), \quad (7)$$

где компоненты сигнала j -й и $(j+1)$ -й групп и значения соответствующих им весов (с учетом знаков) перенумерованы от 1 до $2n$ с текущим индексом l . На рис. 1 и 2 представлены эквивалентные МРС, отвечающие выражениям (6) и (7), а на рис. 3 указан характер распределения весов.

Значения второй производной с учетом (3) вычисляются по формуле

$$\Delta_{jM}^{(2)} = \sum_{l=1}^{3n} w_l f(x_{jl}). \quad (8)$$

Здесь, как и ранее, компоненты сигнала j , $(j+1)$, $(j+2)$ -й групп и соответствующие им веса перенумерованы от 1 до $3n$.

Ясно, что схема получения $\Delta_{jM}^{(2)}$ будет аналогичной схеме рис. 2. Однако в этом случае распределение весов будет иметь характер, указанный на рис. 4.

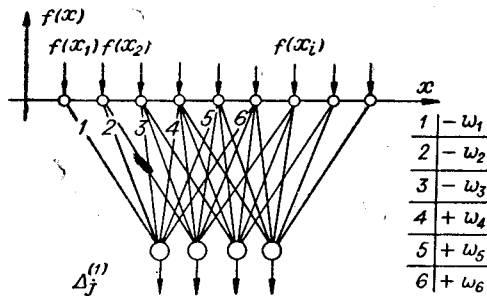


Рис. 2.

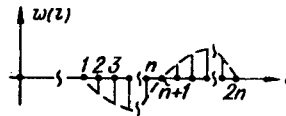


Рис. 3.

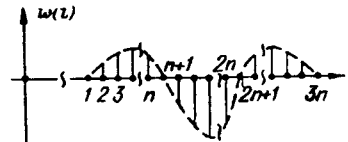


Рис. 4.

Из схем получения значений первых и вторых производных можно видеть, что: а) элементами схем являются перекрывающиеся «воронки», сходящиеся на выходных узлах; б) значения весов в ветвях воронок (при переходе от схем рис. 1 к эквивалентным схемам рис. 2) получаются путем перемножения весов тех ветвей, по которым соответствующая компонента сигнала передается на выходной узел схемы.

Будем различать следующие характеристики воронок:

1) число входов N , а следовательно, число ветвей, по которым N компонент сигнала параллельно и одновременно поступают на выходной узел;

2) расстояние h между входами, определяющее шаг отсчета компонент сигнала (при этом Nh определяет ширину воронки);

3) весовую функцию $w(l)$, характеризующую распределение весов в ветвях воронки.

Кроме того, следует учитывать коэффициент перекрытия воронок в схемах вычисления значений производных, под которым будем понимать число общих компонент сигнала для двух соседних воронок.

Теперь покажем, что реакции МРС, предназначенной для вычисления (8), качественно соответствуют реакциям обычной разностной схемы (ОРС) и что степень этого соответствия зависит от характеристик воронок.

В качестве входного воздействия для схемы примем сигнал, имеющий экспоненциальное распределение компонент по координате x с единичной амплитудой, т. е.

$$f(x_i) = e^{-\alpha_0(x_i - x_0)^2} = e^{-\alpha i^2}, \quad (9)$$

где $\alpha = \alpha_0(h)^2$ (α_0 — параметр экспоненциального воздействия, характеризующий крутизну его убывания). Такое распределение представляется удобным для качественного и количественного анализа разностных схем, поскольку:

а) распределение (9) имеет такие характерные точки, как точки максимума и перегиба, что дает дополнительные «ориентиры» при сравнении реакций модифицированных и обычных разностных схем;

б) распределение (9) является положительно определенным на интервале $(-\infty, +\infty)$, что позволяет изучать реакции разностных схем при произвольной ширине воронок.

Принятое воздействие являлось входным для сети, составленной из одинаковых воронок с коэффициентом перекрытия $N=1$. Веса в ветвях воронок выбирались в соответствии с весовой функцией

$$W(l) = \begin{cases} \frac{8(-m+3l)}{m(m+2)}, & l = 0, 1, \dots, \frac{m}{2} - 1; \\ \frac{8(m-l)}{m(m+2)}, & l = \frac{m}{2}, \frac{m}{2} + 1, \dots, m-1; \end{cases} \quad (10)$$

$$N = 2m - 1.$$

При N нечетном (зависимость (10) справедлива только для такого N) максимальное отрицательное значение весовой функции совпадает с центром симметрии воронки. Функция (10) нормирована таким образом, что сумма положительных и отрицательных весов равна соответственно 2 и -2 . Легко проверить, что при таком нормировании условие (4) выполняется.

Реакции сети на воздействие (9) при $\alpha=0,01$ и $m=4, 12, 16, 24$, вычисленные с помощью ЭВМ, приведены на рис. 5. Для сравнения там же указаны реакции обычной разностной схемы (штриховые кривые). Последние получены по значениям входного воздействия (9) в точках \bar{x}_j , $j = 1, 2, \dots, k$, где k определялось по формуле (5).

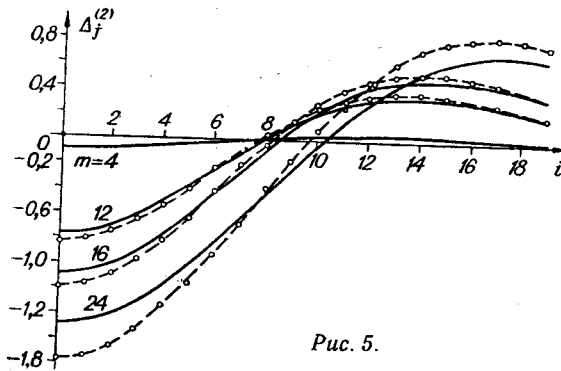


Рис. 5.

Можно видеть, что характер реакций МРС соответствует характеру реакций ОРС. Подобное соответствие наблюдалось и при других значениях параметра α и иных весовых функциях. Отсутствие точного совпадения сплошных и штриховых кривых (см. рис. 5) объясняется различием в значениях $\bar{f}(x_j)$ и $f(\bar{x}_j)$, которые являются исходными при вычислении значений производных. Отметим, что расхождение реакций МРС и ОРС увеличивается с увеличением ширины воронок.

Сравним теперь меры помехоустойчивости воронок МРС и ОРС в случае, когда входной сигнал представляет из себя сумму полезного сигнала $f(x)$ и помехи $\xi(x)$, являющейся стационарным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 . Полагаем, что дисперсия помехи одинакова для всех точек x_l восприятия суммарного сигнала.

Под мерой помехоустойчивости η воронки будем понимать отношение значения сигнал/шум на ее входе к значению сигнал/шум на ее выходе, т. е.

$$\eta = \frac{q_{\text{ВМХ}}}{q_{\text{ВХ}}}, \quad (11)$$

где

$$q_{\text{ВМХ}} = \frac{(\Delta_j^{(s)})^2}{\sigma_{\text{ВМХ}}^2}; \quad q_{\text{ВХ}} = \frac{(\bar{f}(x_j))^2}{\sigma^2}, \quad (12)$$

а $(\Delta_j^{(s)})^2$, $(\bar{f}(x_j))^2$ — интенсивности полезного сигнала в точке x_j на выходе и входе.

Через $\sigma_{\text{ВМХ}}^2$ обозначена дисперсия помехи на выходе, определяемая из выражения

$$\sigma_{\text{ВМХ}}^2 = E \{ [\Delta_j^{(s)} - E \Delta_j^{(s)}]^2 \} = \sigma^2 \left(\sum_{l=1}^L w_l^2 + \sum_{l=1}^L \sum_{\substack{q=1 \\ l \neq q}}^L w_l w_q r_{lq} \right), \quad (13)$$

где E — знак математического ожидания; s — порядок определяемой производной;

$$L = \begin{cases} 2n & \text{при } s = 1; \\ 3n & \text{при } s = 2; \end{cases}$$

r_{lq} — коэффициент корреляции между сигналами в узлах l и q воронки.

Подставляя (12), (13) в (11), получим

$$\eta = \left(\frac{\Delta_j^{(s)}}{\bar{f}(x_j)} \right)^2 \frac{1}{\sum_{l=1}^L w_l^2 + \sum_{l=1}^L \sum_{\substack{q=1 \\ l \neq q}}^L w_l w_q r_{lq}}; \quad l \neq q. \quad (14)$$

Из (14) видно, что мера помехоустойчивости воронки определяется характером входного сигнала, свойствами помехи и видом весовой функции. Для получения зависимости (14) в более наглядном виде примем, что при $s=1$

$$w_l = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{когда } l = 1, 2, \dots, n; \\ \frac{1}{n}, & \text{когда } l = n+1, n+2, \dots, 2n; \end{cases}$$

а при $s=2$

$$w_l = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{когда } l = 1, 2, \dots, n; \\ -\frac{2}{n}, & \text{когда } l = n+1, n+2, \dots, 2n; \\ \frac{1}{n}, & \text{когда } l = 2n+1, 2n+2, \dots, 3n. \end{cases} \quad (15)$$

Кроме того, примем $r_{lq} = r$ для всех l и q , т. е. допускаем, что коэффициент корреляции не зависит от расстояния между узлами l и q . Практически это условие выполняется при малой ширине воронки.

Тогда (14) для МРС с $s=1$ может быть представлена в виде

$$\eta_M = \left(\frac{\Delta_{jM}^{(1)}}{\bar{f}(x_j)} \right)^2 \frac{n}{2(1-r)}. \quad (16)$$

При тех же условиях мера помехоустойчивости ОРС равна

$$\eta_0 = \left(\frac{\Delta_{j0}^{(1)}}{f(x_j)} \right)^2 \frac{1}{2(1-r)}. \quad (17)$$

Сравнивая (16) и (17), можно видеть, что при оговоренных выше условиях помехоустойчивость воронок МРС может быть примерно в n раз выше помехоустойчивости воронок ОРС. При этом n — число усредняемых компонент сигнала одной группы. К аналогичному выводу можно прийти, если сравнить меры помехоустойчивости воро-

нок МРС и ОРС при $s=2$. Действительно, принимая во внимание (15), а также то, что $r_{1q} = r$, из (14) получим:

$$\eta_M = \left(\frac{\Delta_{jM}^{(2)}}{\bar{f}(\bar{x}_j)} \right)^2 \frac{n}{6(1-r)},$$

а

$$\eta_0 = \left(\frac{\Delta_{j0}^{(2)}}{f(\bar{x}_j)} \right)^2 \frac{1}{6(1-r)}.$$

Таким образом, на основании проведенного анализа можно сделать вывод о том, что повышение помехоустойчивости разностных схем к внешним и внутренним шумам может быть достигнуто за счет сглаживания компонент воспринимаемого сигнала. Процедура сглаживания в элементах таких схем (воронках) производится одновременно с процедурой вычисления аналогов производных. При этом выходные реакции модифицированных разностных схем лишь качественно соответствуют реакциям обычных. Появляющееся количественное расхождение реакций является следствием сглаживания компонент сигнала. Расхождение повышается по мере увеличения числа усредняемых компонент в пределах воронки. Поэтому использование модифицированных разностных схем возможно в случаях, когда требования к точности воспроизведения производной по координате x ослаблены.

*Поступило в редакцию
8 августа 1968 г.*