

М. Г. МАРКАТУН,
А. М. МЕЛИК-ШАХНАЗАРОВ, И. Л. ШАЙН
(Баку)

О ВЛИЯНИИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ Порогового устройства на погрешность цифровых прямоугольно-координатных компенсаторов

Одним из основных параметров, характеризующих качество измерительной системы, является погрешность измерения. Чаще всего измерительные системы характеризуются максимально возможными погрешностями. Однако знание максимальной погрешности не всегда является достаточным для сравнения измерительных приборов, отдельных блоков и элементов, принятых алгоритмов уравнивания, и поэтому вводятся статистические значения погрешностей: математическое ожидание и дисперсия.

Известно, что погрешность следящих цифровых измерительных систем в значительной степени определяется порогом чувствительности нуль-индикатора (δU), который в первую очередь выбирается исходя из условий устойчивой работы прибора. В одноканальных следящих системах или в двухканальных системах с пороговыми устройствами в каждом канале порог чувствительности δU превышает половину ступени уравнивания [1, 2]. В двухканальных следящих системах с об-

щим пороговым устройством, к которым относятся, в частности, компенсаторы с экстремальным уравниванием [3], условия устойчивой работы определяются выражением $\delta U \geq 0,707 \Delta$, где Δ — величина ступени уравнивания.

Состояние равновесия компенсаторов определяется тем, что конец вектора разностного напряжения U_p попадает в область нечувствительности порогового устройства. В одноканальных системах эта область представляет собой отрезок прямой, симметричный относительно начала вектора U_p и равный удвоенному порогу чувствительности δU порогового устройства. В двухканальных

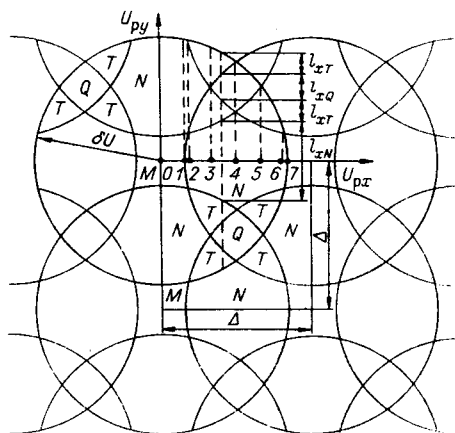


Рис. 1.

зования пороговых устройств в каждом канале уравнивания).

Для прямоугольно-координатных компенсаторов наиболее характерными являются погрешности x , y определения составляющих измеряемого напряжения $U_{иx}$, $U_{иy}$; они определяются значениями составляющих разностного напряжения $U_{рх}$, $U_{рy}$ в конце процессов уравнивания (т. е. при вхождении в область нечувствительности).

Среднеарифметические погрешности определения составляющих $U_{иx}$, $U_{иy}$ равны математическим ожиданиям абсолютных значений $|x|$, $|y|$ и определяются выражениями [4]:

$$M(|x|) = \int_{-\delta U}^{+\delta U} |x| f(x) dx; \quad M(|y|) = \int_{-\delta U}^{+\delta U} |y| f(y) dy, \quad (1)$$

где x , y — составляющие вектора разностного напряжения в конце процесса уравнивания; $f(x)$, $f(y)$ — плотности распределения погрешностей x , y .

Задача определения математического ожидания сводится к определению плотности распределения погрешностей $f(x)$ и $f(y)$, чему в основном и посвящена данная работа.

В дискретных системах уравнивания каждому значению измеряемого напряжения соответствует вполне определенная точка области нечувствительности, если, конечно, система сходящаяся. Исходя из этого, можно всю область значений измеряемого параметра разбить на участки, соответствующие определенным зонам области нечувствительности, и получить численные значения вероятности попадания в те или иные зоны.

Авторами предлагается простой способ разбиения области нечувствительности на характерные зоны и определения вероятности попадания в эти зоны. Достоверность предлагаемого способа ясна из геометрических построений, поэтому нет необходимости в его строгом обосновании. Сущность способа заключается в том, что область изменения разностного напряжения $U_{рх} - U_{рy}$ разбивается на квадраты со стороной, равной одной ступени уравнивания Δ , и вокруг каждой вершины квадрата строится область нечувствительности. В результате перекрытия границ областей каждый квадрат и область нечувствительности разбиваются на характерные зоны, вероятности попадания в которые носят вполне определенные значения. В частности, у автоматических компенсаторов с общим пороговым устройством при $\Delta > \delta U > 0,707 \Delta$ область нечувствительности имеет четыре характерные зоны (см. рис. 1), которые условно обозначаются буквами M , N , T и Q .

Из рис. 1 ясно, что при дискретном уравнивании ступенями Δ (или кратными Δ) из зон типа M любого квадрата можно попасть только в зону типа M области нечувствительности порогового устройства (если в процессе уравнивания измеряемое напряжение остается неизменным, т. е. при статических измерениях); аналогичное относится и к другим зонам. Это свойство данного разбиения инвариантно способу и алгоритму уравнивания, справедливо для компенсаторов со ступенями уравнивания, кратными наименьшей ступени, и поэтому применимо при любом числе декад и секций в декаде.

Определим вероятность попадания начального вектора U_{p_0} в любую из характерных зон всей плоскости $U_{px} - U_{py}$ (эта величина одновременно является вероятностью попадания конечного вектора U_p в любую из характерных зон области нечувствительности согласно сформулированному выше свойству данного разбиения):

$$p_i = \int_{S_i} f(U_{px_0}; U_{py_0}) dU_{px} dU_{py}, \quad (2)$$

где S_i — суммарная площадь соответствующих характерных зон по всей плоскости $U_{px} - U_{py}$; $f(U_{px_0}; U_{py_0})$ — плотность вероятности составляющих начального разностного напряжения.

Рассмотрим сначала вариант с равномерным распределением $f(U_{px_0}; U_{py_0}) = \text{const}$. Это предположение в известной степени приближенно и справедливо лишь при однократных измерениях, однако при отсутствии априорных данных об $f(U_{px_0}; U_{py_0})$ оно может быть использовано. При этом

$$p_i = \frac{S_i}{S_{\text{общ}}} = \frac{S'_i}{\Delta}, \quad (3)$$

где $S_{\text{общ}} = \Delta^2 n_{\text{кв}}$; $n_{\text{кв}}$ — число элементарных квадратов разбиения; S'_i — площадь характерных зон i -го типа, расположенных в одном квадрате.

В нашем случае (см. рис. 1)

$$p_M = \frac{S_M}{\Delta^2}; \quad p_N = \frac{2S_N}{\Delta^2}; \quad p_T = \frac{4S_T}{\Delta^2}; \quad p_Q = \frac{S_Q}{\Delta^2}. \quad (4)$$

Так как одноименные зоны расположены симметрично относительно координатных осей, то вероятность попадания в каждую из зон типа N (или другого типа) области нечувствительности одинакова, а из принятого условия равномерного распределения $f(U_{px_0}; U_{py_0}) = \text{const}$ следует, что распределение плотности вероятности внутри каждой зоны также равномерно. Поэтому плотности вероятности попадания U_p в любую зону области нечувствительности порогового устройства определяются выражением

$$f(x, y)_i = \frac{p_i}{S_{i_0}}, \quad (5)$$

где S_{i_0} — площадь характерных зон i -го типа, расположенных в области нечувствительности.

Из (3)–(5) получим:

$$f(x, y)_i = \frac{S'_i}{S_{i_0}} \frac{1}{\Delta^2}; \quad f(x, y)_M = \frac{1}{\Delta^2}; \quad f(x, y)_N = \frac{1}{2\Delta^2}; \\ f(x, y)_T = \frac{1}{3\Delta^2}; \quad f(x, y)_Q = \frac{1}{4\Delta^2}. \quad (6)$$

Хотя предыдущий анализ проводился для равномерной плотности $f(U_{px_0}; U_{py_0}) = \text{const}$, можно вывести условия, при которых результаты анализа справедливы для неравномерного распределения.

Из формулы (2) следует $p_i = f(U_{px_0}; U_{py_0})_{\text{ср}} S_i$.

Из формулы (3) очевидно, что при равномерном распределении плотность вероятности $f(U_{px_0}; U_{py_0}) = \frac{1}{S_{\text{общ}}}$. Формула (3) и все последующие имеют место при неравномерном распределении в том случае, если средние значения плотности вероятности по всем типам зон одинаковы и равны плотности вероятности при равномерном распределении.

Отсюда вытекает следующее условие, при котором формулы (6) справедливы для неравномерного распределения начального вектора разностного напряжения

$$f(U_{p x_0}; U_{p y_0})_{M_{cp}} = f(U_{p x_0}; U_{p y_0})_{N_{cp}} = \dots = \frac{1}{S_{общ}}. \quad (7)$$

Это условие выполняется, в частности, в том случае, когда $f(U_{p x_0}; U_{p y_0})$ остается постоянной внутри каждого элементарного квадрата разбиения, что с достаточной точностью можно принять для большинства встречающихся на практике функций распределения.

Таким образом, неравномерность распределения начального разностного напряжения можно не учитывать при анализе погрешности, если плотность вероятности не изменяется существенно на участке, равном одной ступени уравнивания. Этот вывод аналогичен выводу, сделанному для аналоговых приборов в [5].

По полученным значениям плотности вероятности попадания вектора U_p в зоны области нечувствительности порогового устройства $f(x, y)_i$ (6) можно найти плотность распределения погрешностей $f(x), f(y)$, которая определяется формулой [4]

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy. \quad (8)$$

В нашем случае $f(x, y)$ остается постоянной внутри каждой характерной зоны и равна нулю вне области нечувствительности, поэтому формула (8) принимает вид

$$f(x) = \sum_i l_{xi} f(x, y)_i, \quad (9)$$

где l_{xi} — отрезок ординаты, отстоящий от начала координат на x и находящийся в характерной зоне i -го типа, плотность вероятности попадания в которую равна $f(x, y)_i$.

Например, при $x_4 > x > x_3$ функция $f(x)$ выражается следующей формулой (см. рис. 1):

$$f(x) = l_{xN} \frac{1}{2\Delta^2} + 4l_{xT} \frac{1}{3\Delta^2} + 2l_{xQ} \frac{1}{4\Delta^2}. \quad (10)$$

Очевидно, что для различных участков оси x в формуле (9) участвует различное число зон, поэтому изменение плотности вероятности $f(x)$ вдоль оси x имеет немонотонный характер, вызванный изломами в точках с координатами $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ (см. рис. 1). В таблице приводятся выражения плотности вероятности $f(x)$ для всех участков.

x	$f(x)$
0-1	$\frac{1}{\Delta}$
1-2	$\frac{1}{\Delta} - \frac{\sqrt{\delta U^2 - (x-\Delta)^2}}{\Delta^2}$
2-3	$\frac{2}{3\Delta} + \frac{\sqrt{\delta U^2 - x^2}}{3\Delta^2} - \frac{2\sqrt{\delta U^2 - (x-\Delta)^2}}{3\Delta^2}$
3-5	$\frac{1}{2\Delta} + \frac{\sqrt{\delta U^2 - x^2}}{3\Delta^2} - \frac{\sqrt{\delta U^2 - (x-\Delta)^2}}{3\Delta^2}$
5-6	$\frac{1}{3\Delta} + \frac{2\sqrt{\delta U^2 - x^2}}{3\Delta^2} - \frac{\sqrt{\delta U^2 - (x-\Delta)^2}}{3\Delta^2}$
6-7	$\frac{\sqrt{\delta U^2 - x^2}}{\Delta^2}$

Так как область нечувствительности симметрична относительно осей координат, то математические ожидания погрешностей измерения по осям одинаковы и формула (1) принимает вид

$$M(|y|) = M(|x|) = 2 \sum_{j=1}^7 \int_{x_{j-1}}^{x_j} x f(x) dx. \quad (11)$$

Если подставить в (11) значения $f(x)$ из таблицы, то после интегрирования и упрощения выражений получим

$$\frac{M(|x|)}{\Delta} = 0,25 + \frac{k^2}{3} \left(\arcsin \frac{\sqrt{4k^2 - 1}}{2k} - 0,141 \right) - \frac{\sqrt{4k^2 - 1}}{12}, \quad (12)$$

где $k = \frac{\delta U}{\Delta}$.

На рис. 2 представлены зависимости $\frac{M(|x|)}{\Delta} = f\left(\frac{\delta U}{\Delta}\right)$ и $\frac{M(|x|)}{\delta U} = f\left(\frac{\delta U}{\Delta}\right)$, из которых видно, что последняя имеет минимум. При $\delta u > \Delta$ область нечувствительности порогового устройства

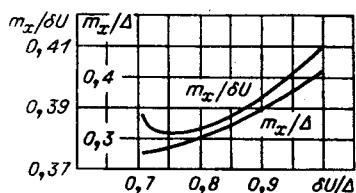


Рис. 2.

разбивается на большее число характерных зон; разница между плотностями попадания в различные зоны уменьшается и распределение приближается к равномерному. Математическое ожидание погрешности возрастает. При равномерной плотности вероятности попадания в область нечувствительности математическое ожидание погрешности составляет $M(|x|) = 0,425 \delta U$.

Аналогично можно определить математические ожидания абсолютных погрешностей и для компенсаторов с пороговыми устройствами в каждом канале уравнивания. Однако при этом надо учитывать, что математическое ожидание погрешности будет определяться не только отношением $\frac{\delta U_x}{\Delta}$ и $\frac{\delta U_y}{\Delta}$, но и положением векторов фазовой чувствительности.

Полученные значения плотности вероятности попадания U_p в область нечувствительности порогового устройства можно использовать для определения не только математического ожидания погрешности, но и других статистических характеристик автоматических цифровых компенсаторов, например дисперсии, среднего быстродействия и др. Дисперсия погрешности определяется следующей формулой [4]:

$$D(x) = \int_{-\frac{\delta U}{2}}^{+\frac{\delta U}{2}} x^2 f(x) dx. \quad (13)$$

После подстановки $f(x)$ из таблицы, интегрирования и упрощения выражений получим

$$\frac{D(x)}{\Delta^2} = \frac{1 - \sqrt{4k^2 - 1}}{12} + \frac{k^2}{3} \left(\arcsin \frac{\sqrt{4k^2 - 1}}{2k} - 0,141 \right). \quad (14)$$

Таким образом, используя предложенную авторами методику определения плотности вероятности попадания вектора разностного напря-

жения в область нечувствительности порогового устройства, можно определить статистические погрешности компенсаторов, вносимые пороговыми нуль-индикаторами и соответственно более объективно судить об общих погрешностях цифровых компенсаторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. П. Орнатский. Автоматические измерительные приборы. Киев, «Техника», 1965.
2. В. Б. Канторович, А. М. Мелик-Шахназаров, И. Л. Шайн. Исследование процесса уравнивания в цифровых автоматических компенсаторах переменного тока.— Автометрия, 1965, № 2.
3. А. М. Мелик-Шахназаров, И. Л. Шайн, М. Г. Маркатун. Некоторые вопросы построения цифровых автоматических компенсаторов переменного тока с экстремальным уравниванием.— Измерительная техника, 1966, № 10.
4. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., «Наука», 1964.
5. В. И. Соболев. Вероятностный метод оценки погрешности измерений при учете распределения измеряемой величины.— Измерительная техника, 1965, № 9.

*Поступила в редакцию
27 июня 1966 г.,
окончательный вариант —
19 января 1967 г.*