

Г. А. АКСЕНОВ, Р. Д. БАГЛАЙ
(Новосибирск)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КВАДРАТУР ДЛЯ РАЗДЕЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ RC -СХЕМ

Актуальность задачи идентификации (определения) нелинейных зависимостей может быть подтверждена достаточным числом примеров из самых разных областей техники. В области нелинейных электротехнических цепей к числу важнейших зависимостей относятся вольт-амперная, кулон-вольтная и вебер-амперная характеристики. В настоящей работе рассмотрим решение задачи раздельного определения указанных характеристик частотозависимой цепи с двумя полюсами, эквивалентная схема которой может быть представлена последовательным или параллельным соединением двух нелинейных элементов: активного сопротивления и емкости. Решение проводится в предположении, что искомые характеристики однозначны и не изменяются при изменениях амплитуды испытательного сигнала, который принимается синусоидальным. Ясно, что это одна из частных задач измерения взаимосвязанных нелинейных величин. Заметим также, что когда искомые зависимости линейны, решение задачи при двухэлементной эквивалентной схеме не вызывает принципиальных затруднений, а широкий ассортимент существующих методик и приборов позволяет выполнять измерения параметров этих линейных зависимостей с точностью, достаточной для большинства практических приложений. В нелинейном варианте задача резко усложняется. Ее решение теперь не только и, пожалуй, не столько зависит от собственно измерений, сколько от планирования измерительного эксперимента, призванного обеспечить наиболее экономный путь получения необходимых и достаточных данных об искомым характеристиках, и затем обработки этих данных с целью раздельного определения каждой из них. Ниже подробно изложим решение задачи для цепи, эквивалентная схема которой может быть представлена последовательно включенными нелинейными RC -элементами. Для параллельной эквивалентной схемы будут приведены конечные результаты, которые могут быть получены способом, аналогичным изложенному.

Нелинейные характеристики рассматриваемых элементов при несущественных для нас ограничениях всегда могут быть описаны степенными полиномами с точностью, достаточной для практических приложений. Выражение характеристик полиномами оказывается удобным по многим причинам: простота операций, которые приходится выполнять над ними с целью вычисления статических, дифференциальных,

эффективных, реверсивных и др. параметров нелинейности; очевидность логической связи коэффициентов полинома с обычными параметрами (R, L, C) линейных элементов и т. п. Поэтому в дальнейшем для приближения характеристик примем полиномиальные функции. Теперь можно дать формальную постановку задачи: дана эквивалентная RC -схема (рис. 1, а) с последовательным соединением нелинейных R и C -элементов ($1, 2$ — полюсы, доступные для подключения измерительных приборов). Каждый из нелинейных элементов схемы описывается полиномиальными функциями $f_R(x_1)$ и $f_C(z_1)$ степени α и β соответственно, т. е.

$$f_R(x_1) = \sum_{j=1}^{\alpha} A_j x_1^j \quad (-X_1 < x_1 < X_1);$$

$$f_C(z_1) = \sum_{j=1}^{\beta} B_j z_1^j \quad (-Z_1 < z_1 < Z_1).$$

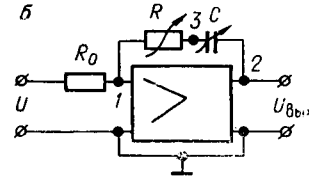
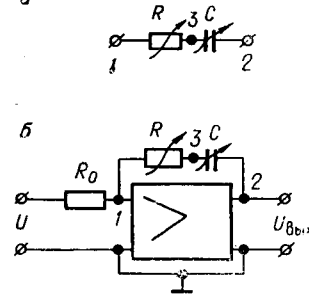


Рис. 1.

Полагаем, что ни $f_R(x_1)$, ни $f_C(z_1)$ не изменяются от величины испытательного сигнала. Требуется определить значения коэффициентов искомым нелинейных зависимостей, иначе — разделить функции $f_R(x_1)$ и $f_C(z_1)$, когда полюс 3 (см. рис. 1, а) не доступен для подключения измерительных приборов. Чтобы удовлетворить этому требованию, необходимо правильно организовать (планировать) измерительный эксперимент. В нашем случае первостепенными являются следующие моменты: выбор и обеспечение режима, в который должна быть поставлена рассматриваемая цепь; выбор параметров выходного сигнала, которые следует измерять; выбор значений аргумента, при которых следует выполнять измерения, и определение необходимого и достаточного числа измерений этих параметров.

Мотивы выбора синусоидального сигнала в качестве испытательного достаточно прозрачны. Для рассматриваемой цепи в качестве источника питания выгодно принять источник тока, точнее, обеспечить в цепи регулируемый режим заданного тока ($x_1 = I \cos \theta$, $\theta = \omega t$). Практическое осуществление такого режима с приемлемой точностью достигается стандартными средствами; исследуемая цепь включается как элемент цепи глубокой отрицательной обратной связи усилителя с большим входным сопротивлением, а на его вход подается регулируемое переменное напряжение $u = U \cos \theta$ (см. рис. 1, б). Напряжение на выходе усилителя в этом режиме можно записать в виде

$$\begin{aligned} U_{\text{вых}}(t) &= \sum_{j=1}^{\alpha} A_j (I \cos \theta)^j + \sum_{j=1}^{\beta} B_j (I \cos \theta)^j = \\ &= f_R(I \cos \theta) + f_C(Q \sin \theta), \end{aligned} \quad (2)$$

где $I = \frac{U}{R_0}$; $Q = \frac{I}{\omega}$. Для обоснования правильного выбора параметров выходного сигнала $U_{\text{вых}}(t)$, которые следует измерять, обратим внимание на то, что все слагаемые первой суммы (2) с нечетным j образуют первую гармонику напряжения $U_{\text{вых}}(t)$. Следовательно, только амплитуда синфазной составляющей первой гармоники $U_{\text{вых}}(t)$ содержит сведения о всех коэффициентах A_j функции $f_R(I \cos \theta)$ с нечетным j . Аналогично только амплитуды квадратурной составляющей первой гармоники $U_{\text{вых}}(t)$ представляют B_j функции $f_C(Q \sin \theta)$ с нечетными индексами. Ясно, что в нашем случае постоянная состав-

ляющая и амплитуда второй гармоники напряжения $U_{\text{вых}}(t)$ возникают только за счет слагаемых с четным j . Однако вторая гармоника синфазна испытательному сигналу и, следовательно, не содержит квадратурной составляющей. Поэтому использование значений ее амплитуды для отдельного определения A_j и B_j с четным j затруднено. Более удобным в данном случае является использование постоянной составляющей сигнала $U_{\text{вых}}(t)$. Хотя она также одновременно зависит от всех A_j и B_j с четными индексами, нетрудно отдельно измерить ту ее часть, которая порождается только слагаемыми первой суммы (2) с четными j . Для этого, например, достаточно вначале при заданном I выбрать частоту ω испытательного сигнала в несколько раз выше рабочей и измерить постоянную составляющую $U_{\text{вых}}(t)$. При этом диапазон изменения заряда Q резко уменьшается ($Q = \frac{I}{\omega}$), уменьшается и вклад емкости в образовании постоянной составляющей. Таким образом, можно полагать, что измеренная постоянная составляющая представляет только коэффициенты A_j с четными j . Переходя затем к измерению на рабочей частоте, легко определить ту часть постоянной составляющей, которая обусловлена коэффициентами B_j с четными j . В частных случаях можно указать и иные подходы к отдельному измерению постоянных составляющих, обусловленных каждым нелинейным элементом рассматриваемой цепи. Возможно, что техническая сторона этих измерений заслуживает особого рассмотрения, однако мы здесь ограничимся кратким указанием на принципиальную возможность их выполнения. Перейдем к изложению метода решения задачи. Для этого запишем выражения амплитуд синфазной и квадратурной составляющих первой гармоники $U_{\text{вых}}$, а также постоянных составляющих, обусловленных каждым элементом цепи:

$$\left\{ \begin{aligned} a_1(I) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_R(I \cos \theta) \cos \theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_R(Ix)x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_0(I) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_R(I \cos \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_R(Ix) dx}{\sqrt{1-x^2}}; \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} b_1(I) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_C(Q \sin \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_C(Qz)z dz}{\sqrt{1-z^2}}; \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} b_0(I) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_C(Q \sin \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_C(Qz) dz}{\sqrt{1-z^2}}; \end{aligned} \right. \quad (6)$$

где $x = \cos \theta$, $z = \sin \theta$. Интересующие нас функции $f_R(Ix)$ и $f_C(Qz)$ находятся под знаком интеграла, в то время как значения самих интегралов a_1 , a_0 , b_1 , b_0 известны.

Далее напомним [1], что для вычисления определенных интегралов широкое применение находят квадратурные формулы. Среди этих формул наиболее эффективны интерполяционные квадратуры Гаусса. При заданном числе n отсчетов подынтегральной функции они дают наивысшую алгебраическую точность $2n - 1$, когда указанные отсчеты выбираются в точках, являющихся корнями ортогонального полинома n -й

степени. Это означает, что вычисленное значение интеграла будет теоретически точным при n отсчетах (узлах интерполяции), когда подынтегральная функция есть полином степени не выше $2n - 1$.

В нашей задаче известны значения интеграла и не известна подынтегральная функция. Тем не менее ее решение можно осуществить, используя в «обратном порядке» методику, разработанную для вычисления квадратур. В самом деле, поскольку $f_R(Ix) x = \varphi(x)$ [см. (3)] имеет те же коэффициенты A_j , что и $f_R(Ix)$, а $\varphi(x)$ интегрируется с весом Чебышева $\left(\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, то, используя соответствующую квадратурную формулу, можем записать:

$$a_1(I) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(x_k) \right]; \quad (7a)$$

$$a_0(I) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_R(Ix)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f_R(Ix_k) \right], \quad (7б)$$

где в квадратных скобках правых частей выделены квадратурные формулы Мелера [1]. Здесь n — число, связанное со степенью $\alpha_1 = \alpha + 1$ полинома $\varphi(x)$ соотношением $\alpha_1 \leq 2n - 1$; x_k — корни полинома Чебышева 1-го рода n -й степени, определяемые формулой

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

В нашем случае истинная степень α и β соответственно полиномов $\varphi(x)$ и $f_C(Qz)$ не известна. Поэтому равенства (7a) и (7б) будут приближенными. Однако в дальнейшем мы будем полагать, что $\alpha_1, \beta \leq 2n - 1$, а инженерные оценки приближения будут даны особо. Аналогично этому можно записать такие же выражения для $b_1(I)$ и $b_0(I)$, однако мы этого делать не будем, поскольку на любом этапе последующих рассмотрений соотношений (7a) и (7б) заменой x на z мы сможем получить выражения для $b_1(I)$ и $b_0(I)$.

Далее, если в (7a) вместо $\varphi(x_k)$ подставить равное ему выражение $\varphi(x_k) = f_R(Ix_k) x_k = \sum_{j=1}^{\alpha} A_j I^j x_k^{j+1}$, а в (7б) вместо $f_R(Ix_k)$ сумму $\sum_{j=1}^{\alpha} A_j I^j x_k^j$, то получим соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} a_1(I) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha} A_j I^j x_k^{j+1} = A_1 I \sum_{k=1}^n x_k^2 + A_2 I^2 \sum_{k=1}^n x_k^3 + \dots + \\ &+ A_j I^j \sum_{k=1}^n x_k^{j+1} + \dots + A_{\alpha} I^{\alpha} \sum_{k=1}^n x_k^{j+1}; \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} n a_0(I) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha} A_j I^j x_k^j = A_1 I \sum_{k=1}^n x_k + A_2 I^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 + \dots + \\ &+ A_j I^j \sum_{k=1}^n x_k^j + \dots + A_{\alpha} I^{\alpha} \sum_{k=1}^n x_k^{\alpha}. \end{aligned} \quad (8б)$$

Поскольку корни x_k полиномов Чебышева располагаются симметрично относительно точки $x=0$, то все слагаемые с нечетными степенями x_k обращаются в нуль. Обозначив $\sum_{k=1}^n x_k^{j+1} = \gamma_j$ и приняв для определенности α четным числом, можем записать:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{n}{2} a_1(I) &= A_1 I \gamma_1 + A_3 I^3 \gamma_3 + \dots + A_{\alpha-1} I^{\alpha-1} \gamma_{\alpha-1} = \\ &= \sum_{r=1}^{\frac{\alpha}{2}} A_{2r-1} I^{2r-1} \gamma_{2r-1}; \end{aligned} \right. \quad (9a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} n a_0(I) &= A_2 I^2 \gamma_1 + A_4 I^4 \gamma_3 + \dots + A_{\alpha} I^{\alpha} \gamma_{\alpha-1} = \\ &= \sum_{r=1}^{\frac{\alpha}{2}} A_{2r} I^{2r} \gamma_{2r-1} \quad \left(r = 1, 2, \dots, \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned} \right. \quad (9b)$$

Следовательно, при четном α для определения искоемых коэффициентов A_j необходимо измерять в каждой из $i = \frac{\alpha}{2}$ точке (т. е. при числе $\frac{\alpha}{2}$ различных значений тока I_i) 2 амплитуду синфазной составляющей первой гармоники выходного напряжения и постоянную составляющую, обусловленную активным сопротивлением нелинейной цепи. При этом получаем исходную систему уравнений для определения коэффициентов A_j :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{n}{2} a_1(I_i) &= \sum_{r=1}^{\frac{\alpha}{2}} A_{2r-1} I_i^{2r-1} \gamma_{2r-1}; \end{aligned} \right. \quad (10a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} n a_0(I_i) &= \sum_{r=1}^{\frac{\alpha}{2}} A_{2r} I_i^{2r} \gamma_{2r-1}. \end{aligned} \right. \quad (10b)$$

Аналогично при четном β для определения коэффициентов B_j необходимо измерять в $i = \frac{\beta}{2}$ точках, т. е. при числе $\frac{\beta}{2}$ различных значений тока I_i (заряда $Q_i = \frac{I_i}{\omega}$), амплитуду квадратурной составляющей первой гармоники и постоянную составляющую выходного напряжения, обусловленную емкостью. Тогда исходная система уравнений относительно коэффициентов B_j будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{n}{2} b_1(Q_i) &= \sum_{r=1}^{\frac{\beta}{2}} B_{2r-1} Q_i^{2r-1} \gamma_{2r-1}; \end{aligned} \right. \quad (11a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} n b_0(Q_i) &= \sum_{r=1}^{\frac{\beta}{2}} B_{2r} Q_i^{2r} \gamma_{2r-1} \quad \left(i, r = 1, 2, \dots, \frac{\beta}{2} \right) \end{aligned} \right. \quad (11b)$$

В целях сокращения изложения решения соответствующих систем уравнений в случае нечетных α и β будут даны в окончательном виде.

Определитель (10) является определителем Вандермонда [2], который всегда отличен от нуля, когда среди I_i нет двух, равных между собой. Следовательно, система уравнений (10а) всегда будет иметь решения, если измерение коэффициентов $a_1(I_i)$ осуществлять при различных I_i . По вполне понятным причинам всегда желательно измерять амплитуды $a_1(I_i)$ в точках I_i , являющиеся корнями полинома Чебышева. Однако вычислительная процедура при этом усложняется. Если же полагать, что функция $a_1(I)$ достаточно гладкая, и если измерения амплитуды первой гармоники $a_1(I_i)$ осуществлять при равноотстоящих значениях аргумента $I_1, I_2, \dots, I_{\frac{\alpha}{2}}$, причем принять $I_{\frac{\alpha}{2}} = I_m$,

а $I_i = \frac{2I_m}{\alpha} i$, то можно показать (доказательство из-за громоздкости выкладок опускаем), что искомые коэффициенты A_{2r-1}, A_{2r} задаются достаточно простыми выражениями:

$$A_{2r-1} = \sum_{i=1}^{\frac{\alpha}{2}} (-1)^{i+r} \frac{\alpha+2}{4} a_1\left(\frac{2I_m}{\alpha} i\right) \frac{S^{\frac{\alpha}{2}-r} \left(i - \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\left(\frac{2I_m}{\alpha}\right)^{2r-1} \gamma_{2r-1}^i \prod_{\frac{\alpha}{2} > \nu > i > 1} (\nu^2 - i^2) \prod_{i > \xi > 1} (i^2 - \xi^2)}; \quad (12)$$

$$A_{2r} = \sum_{i=1}^{\frac{\alpha}{2}} (-1)^{i+r} \frac{\alpha+2}{2} a_0\left(\frac{2I_m}{\alpha} i\right) \frac{S^{\frac{\alpha}{2}-r} \left(i - \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\left(\frac{2I_m}{\alpha}\right)^{2r} \gamma_{2r-1}^{i^2} \prod_{\frac{\alpha}{2} > \nu > i > 1} (\nu^2 - i^2) \prod_{i > \xi > 1} (i^2 - \xi^2)}, \quad (13)$$

где $S^{\frac{\alpha}{2}-r} \left(i - \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}$ — число, которое получается, если квадраты элементов каждого сочетания из $\frac{\alpha}{2} - 1$ чисел натурального ряда по $\frac{\alpha}{2} - r$ перемножить, предварительно заменив i на $\frac{\alpha}{2}$, а полученные произведения суммировать (например, если $\alpha=8, \frac{\alpha}{2}=4, i=2, r=2$, то $(2 \leftarrow 4) S_3^2 = 1^2 4^2 + 1^2 3^2 + 4^2 3^2 = 169$); при $\nu \leq i$ и $\xi \geq i$ вместо соответствующих произведений в знаменателях правых частей (12) — (13) следует ставить единицу.

Аналогично решения систем уравнений (11а) и (11б) дают

$$B_{2r-1} = \sum_{i=1}^{\frac{\beta}{2}} (-1)^{i+r} \frac{\beta+2}{4} b_1\left(\frac{2Q_m}{\beta} i\right) \frac{S^{\frac{\beta}{2}-r} \left(i - \frac{\beta}{2}\right)^{\frac{\beta}{2}-1}}{\left(\frac{2Q_m}{\beta}\right)^{2r-1} \gamma_{2r-1}^i \prod_{\frac{\beta}{2} > \nu > i > 1} (\nu^2 - i^2) \prod_{i > \xi > 1} (i^2 - \xi^2)}; \quad (14)$$

$$B_{2r} = \sum_{i=1}^{\frac{\beta}{2}} (-1)^{i+r} \frac{\beta+2}{2} b_0 \left(\frac{2Q_m}{\beta} i \right) \frac{\left(i \leftarrow \frac{\beta}{2} \right) \frac{\beta}{2} - 1}{\left(\frac{2Q_m}{\beta} \right)^{2r} \gamma_{2r-1} i^2 \prod_{\frac{\beta}{2} > \nu > i > 1} (\nu^2 - i^2) \prod_{i > \xi > 1} (i^2 - \xi^2)}. \quad (15)$$

Когда $\alpha(\beta)$ нечетно, число узлов интерполяции следует принимать равным $\frac{\alpha+3}{2} \left(\frac{\beta+3}{2} \right)$. При этом число необходимых измерений $a_1(I_i)$ [или $b_1(Q_i)$] при разных I_i должно быть равным $\frac{\alpha+1}{2} \left(\frac{\beta+1}{2} \right)$ для коэффициентов с нечетными индексами и $\frac{\alpha-1}{2} \left(\frac{\beta-1}{2} \right)$ — для коэффициентов $A_j (B_j)$ с четным j . Далее, рассуждая аналогично изложенному, можем получить следующие выражения:

$$A_{2r-1} = \sum_{i=1}^{\frac{\alpha+1}{2}} (-1)^{i+r} \frac{\alpha+3}{4} a_1 \left(\frac{2I_m}{\alpha+1} i \right) \times$$

$$\times \frac{\left(i \leftarrow \frac{\alpha+1}{2} \right) \frac{\alpha-1}{2}}{\left(\frac{2I_m}{\alpha+1} \right)^{2r-1} \gamma_{2r-1} i^2 \prod_{\frac{\alpha+1}{2} > \nu > i > 1} (\nu^2 - i^2) \prod_{i > \xi > 1} (i^2 - \xi^2)} \left(r = 1, 2, \dots, \frac{\alpha+1}{2} \right); \quad (16)$$

$$A_{2r} = \sum_{i=1}^{\frac{\alpha-1}{2}} (-1)^{i+r} a_0 \left(\frac{2I_m}{\alpha+1} i \right) \frac{\left(i \leftarrow \frac{\alpha-1}{2} \right) \frac{\alpha-3}{2}}{\left(\frac{2I_m}{\alpha+1} \right)^{2r} \gamma_{2r-1} i^2 \prod_{\frac{\alpha-1}{2} > \nu > i > 1} (\nu^2 - i^2) \prod_{i > \xi > 1} (i^2 - \xi^2)}$$

$$\left(r = 1, 2, \dots, \frac{\alpha-1}{2} \right). \quad (17)$$

Формулы для коэффициентов B_{2r-1} и B_{2r} получим соответственно из (16) и (17) путем замены I_m на Q_m , α на β и, разумеется, $a(I_i)$, $a_0(I_i)$ на $b_1(Q_i)$, $b_0(Q_i)$.

Для эквивалентной параллельной RC-схемы задача отдельного определения характеристик нелинейных элементов решается просто изложенным выше методом, если поставить исследуемую цепь в режим заданного напряжения (рис. 2). Здесь $u = U \cos \theta$ — регулируемый источник напряжения с малым внутренним сопротивлением. При этом очевидно выражение для напряжения

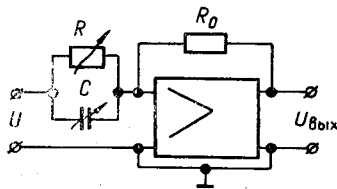


Рис. 2.

$$\begin{aligned}
 U_{\text{вых}} &= R_0 \left[\psi_R (U \cos \theta) + \frac{d}{dt} \psi_C (U \cos \theta) \right] = \\
 &= R_0 \left\{ \sum_{j=1}^{\alpha} \hat{A}_j (U \cos \theta)^j + \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^{\beta} \hat{B}_j (U \cos \theta)^j \right] \right\}, \quad (18)
 \end{aligned}$$

где $\psi_R(u) = \sum_{j=1}^{\alpha} \hat{A}_j u^j$ и $\psi_C(u) = \sum_{j=1}^{\beta} \hat{B}_j u^j$ — искомые характеристики нелинейных элементов.

Если измерить в i равноотстоящих точках (т. е. при i различных значениях входного напряжения U_i) амплитуды синфазной $a_1(U_i)$ и квадратурной $b_1(U_i)$ составляющих первой гармоники $U_{\text{вых}}$, постоянную составляющую выходного напряжения $a_0(U_i)$, обусловленную сопротивлением R , и постоянный заряд $Q_0(U_i)$ на емкости, а также учесть, что амплитуда $\hat{b}_1(U_i) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_C(U \cos \theta) \cos \theta d\theta$ первой гармоники заряда на емкости связана с $b_1(U_i)$ соотношением

$$\hat{b}_1(U_i) = -\frac{b_1(U_i)}{R_0 \omega},$$

то нетрудно видеть, что формулы для \hat{A}_{2r-1} , \hat{A}_{2r} , \hat{B}_{2r-1} , \hat{B}_{2r} получаются из соответствующих формул A_{2r-1} , A_{2r} , B_{2r-1} , B_{2r} путем замены: $a_1(I_i)$ на $a_1(U_i)$, $b_1(I_i)$ на $-\frac{b_1(U_i)}{R_0 \omega}$, I_m на U_m , $a_0(I_i)$ на $a_0(U_i)$, $b_0(I_i)$ на $b_0(U_i)$.

Здесь уместно отметить, что в рассматриваемом случае, в отличие от предыдущего, вторая гармоника выходного напряжения содержит синфазную и квадратурные составляющие. Поэтому для определения коэффициентов \hat{B}_{2r} вместо заряда $Q_0(U_i)$ можно измерять амплитуду квадратурной составляющей второй гармоники $U_{\text{вых}}$. При этом, конечно, выражение для \hat{B}_{2r} будет иным. Поскольку в ряде случаев измерение амплитуды квадратурной составляющей второй гармоники может оказаться более удобным, чем измерение постоянной составляющей заряда емкости, и поскольку особенности вывода формулы для \hat{B}_{2r} в этом случае во многом аналогичны выводам соответствующих формул для последовательной эквивалентной RL -схемы, то надлежащие выкладки целесообразно перенести в последующую часть работы, где будут рассматриваться эквивалентные RL -схемы.

В формулах (12)–(17) предполагается, что измерение квадратурной $a_1(I_i)$ и синфазной $b_1(Q_i)$ составляющих первой гармоники выходного напряжения, а также постоянных составляющих $a_0(I_i)$ и $b_0(Q_i)$ осуществляется в равноотстоящих точках интервала изменения $I(Q)$. Поэтому для наиболее часто употребляемых значений α и β все вычисления могут быть проведены заранее. Ниже (см. приложение) приводятся выражения для коэффициентов $A_j^{(\alpha)}$, табулированные до степени $\alpha = 1, 2, 3, \dots, 10$.

Пример. Пусть $f(x_1) = 1 - e^{-x_1} \cong x_1 - 0,5x_1^2 + \frac{1}{16}x_1^3 - \frac{1}{24}x_1^4 + \frac{1}{120}x_1^5$. Здесь истинные значения $A_1=1$; $A_2=-0,5$; $A_3=\frac{1}{16}$; $A_4=-\frac{1}{24}$;

$A_5 = \frac{1}{120}$. Поскольку $\alpha=5$, то $n = \frac{\alpha+3}{2} = 4$; $i = \frac{\alpha+1}{2} = 3$. Примем $x_1 = I \cos \theta$, $I_m = 1$. Тогда $a_1(1) \cong 1,1302$; $a_1\left(\frac{2}{3}\right) \cong 0,704$; $a_1\left(\frac{1}{3}\right) \cong 0,338$; $a_0\left(\frac{1}{3}\right) \cong -0,02797$; $a_0\left(\frac{2}{3}\right) \cong -0,11419$. Используя формулы (см. приложение) для $\alpha=5$, получаем $A_1=1,000252$; $A_2=-0,49912$; $A_3=0,165934$; $A_4=-0,041666$; $A_5=0,0124$. Как видим, абсолютная погрешность вычисления коэффициента $A_1=1$ не превосходит $\delta=0,000252$.

При использовании метода интерполяционных квадратур в прямом его назначении оценка погрешности метода выражается через модуль максимума 2 n -й производной подынтегральной функции. В нашем случае подынтегральная функция не известна и, следовательно, оценка погрешности должна производиться каким-то иным способом. Этот вопрос заслуживает самостоятельного изучения. Здесь же мы ограничимся следующим замечанием. Нелинейные зависимости в большинстве своем — достаточно гладкие кривые. Если каким-либо способом установить заметную еще в спектре выходного сигнала наивысшую гармонику, то ее номер можно принять в качестве степени приближающего полинома. В большом числе практических задач бывает достаточно ограничиться девятой гармоникой.

Приложение

$$\alpha=1: A_1^{(1)} = \frac{a_1(I_m)}{I_m}. \quad \alpha=2: A_1^{(2)} = A_1^{(1)}; \quad A_2^{(2)} = 2 \frac{a_0(I_m)}{I_m^2}.$$

$$\alpha=3: A_1^{(3)} = \frac{1}{I_m} \left[\frac{8}{3} a_1\left(\frac{I_m}{2}\right) - \frac{1}{3} a_1(I_m) \right]; \quad A_2^{(3)} = 8 \frac{a_0\left(\frac{I_m}{2}\right)}{I_m^2};$$

$$A_3^{(3)} = \frac{1}{I_m^3} \left[-\frac{32}{9} a_1\left(\frac{I_m}{2}\right) + \frac{16}{9} a_1(I_m) \right].$$

$$\alpha=4: A_1^{(4)} = A_1^{(3)}; \quad A_2^{(4)} = \frac{1}{I_m^2} \left[\frac{32}{3} a_0\left(\frac{I_m}{2}\right) - \frac{2}{3} a_0(I_m) \right]; \quad A_3^{(4)} = A_3^{(3)};$$

$$A_4^{(4)} = \frac{1}{I_m^4} \left[-10,6 a_0\left(\frac{I_m}{2}\right) + 3,5 a_0(I_m) \right].$$

$$\alpha=5: A_1^{(5)} = \frac{1}{I_m} \left[4,4998 a_1\left(\frac{I_m}{3}\right) - 0,89995 a_1\left(\frac{2}{3} I_m\right) + 0,0999 a_1(I_m) \right];$$

$$A_2^{(5)} = \frac{1}{I_m^2} \left[23,9988 a_0\left(\frac{I_m}{3}\right) - 1,4999 a_0\left(\frac{2}{3} I_m\right) \right];$$

$$A_3^{(5)} = \frac{1}{I_m^3} \left[-19,4987 a_1\left(\frac{I_m}{3}\right) + 11,9992 a_1\left(\frac{2}{3} I_m\right) - 1,4999 a_1(I_m) \right];$$

$$A_4^{(5)} = \frac{1}{I_m^4} \left[-71,9952 a_0\left(\frac{I_m}{3}\right) + 17,9988 a_0\left(\frac{2}{3} I_m\right) \right];$$

$$A_5^{(5)} = \frac{1}{I_m^5} \left[15,52081 a_1\left(\frac{I_m}{3}\right) - 12,4166 a_1\left(\frac{2}{3} I_m\right) + 3,10416 a_1(I_m) \right]. \quad \alpha=6:$$

$$A_1^{(6)} = A_1^{(5)}; \quad A_2^{(6)} = \frac{1}{I_m^2} \left[26,9987 a_0\left(\frac{I_m}{3}\right) - 2,6999 a_0\left(\frac{2}{3} I_m\right) + 0,1999 a_0(I_m) \right]; \quad A_3^{(6)} = A_3^{(5)};$$

$$\begin{aligned}
A_4^{(6)} &= \frac{1}{I_m^4} \left[-116,9922 a_0 \left(\frac{I_m}{3} \right) + 35,9976 a_0 \left(\frac{2}{3} I_m \right) - 2,9998 a_0 (I_m) \right]; \quad A_5^{(6)} = A_5^{(5)}; \\
A_6^{(6)} &= \frac{1}{I_m^6} \left[93,1249 a_0 \left(\frac{I_m}{3} \right) - 37,25 a_0 \left(\frac{2}{3} I_m \right) + 6,2083 a_0 (I_m) \right]. \quad \alpha=7: \\
A_1^{(7)} &= \frac{1}{I_m} \left[6,3995 a_1 \left(\frac{I_m}{4} \right) - 1,5999 a_1 \left(\frac{I_m}{2} \right) + 0,3047 a_1 \left(\frac{3}{4} I_m \right) - 0,02857 a_1 (I_m) \right]; \\
A_2^{(7)} &= \frac{1}{I_m^2} \left[47,9962 a_0 \left(\frac{I_m}{4} \right) - 4,7996 a_0 \left(\frac{I_m}{2} \right) + 0,35553 a_0 \left(\frac{3}{4} I_m \right) \right]; \\
A_3^{(7)} &= \frac{1}{I_m^3} \left[-57,8277 a_1 \left(\frac{I_m}{4} \right) + 40,0528 a_1 \left(\frac{I_m}{2} \right) - 8,5317 a_1 \left(\frac{3}{4} I_m \right) + 0,7618 a_1 (I_m) \right]; \\
A_4^{(7)} &= \frac{1}{I_m^4} \left[-369,72 a_0 \left(\frac{I_m}{4} \right) + 113,76 a_0 \left(\frac{I_m}{2} \right) - 9,48 a_0 \left(\frac{3}{4} I_m \right) \right]; \\
A_5^{(7)} &= \frac{1}{I_m^5} \left[131,9484 a_1 \left(\frac{I_m}{4} \right) - 118,2986 a_1 \left(\frac{I_m}{2} \right) + 40,9495 a_1 \left(\frac{3}{4} I_m \right) - 4,5499 a_1 (I_m) \right]; \\
A_6^{(7)} &= \frac{1}{I_m^6} \left[545,9935 a_0 \left(\frac{I_m}{4} \right) - 218,3974 a_0 \left(\frac{I_m}{2} \right) + 36,3996 a_0 \left(\frac{3}{4} I_m \right) \right]; \\
A_7^{(7)} &= \frac{1}{I_m^7} \left[-83,18913 a_1 \left(\frac{I_m}{4} \right) + 83,18913 a_1 \left(\frac{I_m}{2} \right) - 35,6524 a_1 \left(\frac{3}{4} I_m \right) + \right. \\
&\quad \left. + 5,9421 a_1 (I_m) \right]. \quad \alpha=8: A_1^{(8)} = A_1^{(7)}; \quad A_2^{(8)} = \frac{1}{I_m^2} \left[51,196 a_0 \left(\frac{I_m}{4} \right) - 6,3995 a_0 \left(\frac{I_m}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 0,8126 a_0 \left(\frac{3}{4} I_m \right) - 0,05714 a_0 (I_m) \right]; \\
A_3^{(8)} &= A_3^{(7)}; \quad A_4^{(8)} = \frac{1}{I_m^4} \left[-462,6222 a_0 \left(\frac{I_m}{4} \right) + 160,2114 a_0 \left(\frac{I_m}{2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - 22,7519 a_0 \left(\frac{3}{4} I_m \right) + 1,659 a_0 (I_m) \right]; \\
A_5^{(8)} &= A_5^{(7)}; \quad A_6^{(8)} = \frac{1}{I_m^6} \left[1055,5875 a_0 \left(\frac{I_m}{4} \right) - 473,1944 a_0 \left(\frac{I_m}{2} \right) + 109,1987 a_0 \left(\frac{3}{4} I_m \right) - \right. \\
&\quad \left. - 9,0999 a_0 (I_m) \right]; \\
A_7^{(8)} &= A_7^{(7)}; \quad A_8^{(8)} = \frac{1}{I_m^8} \left[-665,513 a_0 \left(\frac{I_m}{4} \right) + 332,756 a_0 \left(\frac{I_m}{2} \right) - 95,0733 a_0 \left(\frac{3}{4} I_m \right) + \right. \\
&\quad \left. + 11,8842 a_0 (I_m) \right]. \quad \alpha=9: \\
A_1^{(9)} &= \frac{1}{I_m} \left[8,3388 a_1 \left(\frac{I_m}{5} \right) - 2,3811 a_1 \left(\frac{2}{5} I_m \right) + 0,59528 a_1 \left(\frac{3}{5} I_m \right) - \right. \\
&\quad \left. - 0,09921 a_1 \left(\frac{4}{5} I_m \right) + 0,00794 a_1 (I_m) \right]; \\
A_2^{(9)} &= \frac{1}{I_m^2} \left[80,0053 a_0 \left(\frac{I_m}{5} \right) - 10,00067 a_0 \left(\frac{2}{5} I_m \right) + 1,2699 a_0 \left(\frac{3}{5} I_m \right) - 0,08929 a_0 \left(\frac{4}{5} I_m \right) \right]; \\
A_3^{(9)} &= \frac{1}{I_m^3} \left[-128,7923 a_1 \left(\frac{I_m}{5} \right) + 96,3269 a_1 \left(\frac{2}{5} I_m \right) - 26,8377 a_1 \left(\frac{3}{5} I_m \right) + \right. \\
&\quad \left. + 4,637 a_1 \left(\frac{4}{5} I_m \right) - 0,37665 a_1 (I_m) \right]; \\
A_4^{(9)} &= \frac{1}{I_m^4} \left[-1129,728 a_0 \left(\frac{I_m}{5} \right) + 591,2385 a_0 \left(\frac{2}{5} I_m \right) - 55,5605 a_0 \left(\frac{3}{5} I_m \right) + \right. \\
&\quad \left. + 4,05129 a_0 \left(\frac{4}{5} I_m \right) \right];
\end{aligned}$$

$$A_5^{(9)} = \frac{1}{I_m^5} \left[560,8536 a_1 \left(\frac{I_m}{5} \right) - 541,7533 a_1 \left(\frac{2}{5} I_m \right) + 226,5987 a_1 \left(\frac{3}{5} I_m \right) - \right. \\ \left. - 43,9885 a_1 \left(\frac{4}{5} I_m \right) + 3,7702 a_1 (I_m) \right];$$

$$A_6^{(9)} = \frac{1}{I_m^6} \left[4028,422 a_0 \left(\frac{I_m}{5} \right) - 1805,8494 a_0 \left(\frac{2}{5} I_m \right) + 416,7333 a_0 \left(\frac{3}{5} I_m \right) - \right. \\ \left. - 34,7278 a_0 \left(\frac{4}{5} I_m \right) \right];$$

$$A_7^{(9)} = \frac{1}{I_m^7} \left[-8930,3266 a_1 \left(\frac{I_m}{5} \right) + 963,905 a_1 \left(\frac{2}{5} I_m \right) - 489,042 a_1 \left(\frac{3}{5} I_m \right) + \right. \\ \left. + 122,8512 a_1 \left(\frac{4}{5} I_m \right) - 11,8126 a_1 (I_m) \right];$$

$$A_8^{(9)} = \frac{1}{I_m^8} \left[-3969,04 a_0 \left(\frac{I_m}{5} \right) + 1984,52 a_0 \left(\frac{2}{5} I_m \right) - 567,001 a_0 \left(\frac{3}{5} I_m \right) + \right. \\ \left. + 70,8757 a_0 \left(\frac{4}{5} I_m \right) \right];$$

$$A_9^{(9)} = \frac{1}{I_m^9} \left[459,4434 a_1 \left(\frac{I_m}{5} \right) - 525,065 a_1 \left(\frac{2}{5} I_m \right) + 295,3495 a_1 \left(\frac{3}{5} I_m \right) - \right. \\ \left. - 87,511 a_1 \left(\frac{4}{5} I_m \right) + 10,9388 a_1 (I_m) \right].$$

$$\alpha = 10: A_1^{(10)} = A_1^{(9)}; \quad A_2^{(10)} = \frac{1}{I_m^2} \left[83,3338 a_0 \left(\frac{I_m}{5} \right) - 11,9055 a_0 \left(\frac{2}{5} I_m \right) + \right. \\ \left. + 1,9842 a_0 \left(\frac{3}{5} I_m \right) - 0,248 a_0 \left(\frac{4}{5} I_m \right) + 0,1587 a_0 (I_m) \right];$$

$$A_3^{(10)} = A_3^{(9)}; \quad A_4^{(10)} = \frac{1}{I_m^4} \left[-1287,9 a_0 \left(\frac{I_m}{5} \right) + 481,634 a_0 \left(\frac{2}{5} I_m \right) - 89,459 a_0 \left(\frac{3}{5} I_m \right) + \right. \\ \left. + 11,5843 a_0 \left(\frac{4}{5} I_m \right) - 0,7533 a_0 (I_m) \right];$$

$$A_5^{(10)} = A_5^{(9)}; \quad A_6^{(10)} = \frac{1}{I_m^6} \left[5608,536 a_0 \left(\frac{I_m}{5} \right) - 2708,7667 a_0 \left(\frac{2}{5} I_m \right) + \right. \\ \left. + 755,33 a_0 \left(\frac{3}{5} I_m \right) - 109,97 a_0 \left(\frac{4}{5} I_m \right) + 75,244 a_0 (I_m) \right];$$

$$A_7^{(10)} = A_7^{(9)}; \quad A_8^{(10)} = \frac{1}{I_m^8} \left[-8930,34 a_0 \left(\frac{I_m}{5} \right) + 4819,55 a_0 \left(\frac{2}{5} I_m \right) - \right. \\ \left. - 1630,141 \left(\frac{3}{5} I_m \right) + 307,13 a_0 \left(\frac{4}{5} I_m \right) - 23,625 a_0 (I_m) \right];$$

$$A_9^{(10)} = A_9^{(9)}; \quad A_{10}^{(10)} = \frac{1}{I_m^{10}} \left[4594,325 a_0 \left(\frac{I_m}{5} \right) - 2625,33 a_0 \left(\frac{2}{5} I_m \right) + \right. \\ \left. + 984,5 a_0 \left(\frac{3}{5} I_m \right) - 218,777 a_0 \left(\frac{4}{5} I_m \right) + 21,8777 a_0 (I_m) \right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Крылов. Приближенное вычисление интегралов. М., «Наука», 1967.
2. В. Л. Гончаров. Теория интерполирования и приближения функций. ОНТИ—ГГО, 1934.

Поступила в редакцию
8 июня 1968 г.