

А. М. ОСТАПЕНКО, С. Е. ТКАЧ
(Новосибирск)

ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ОТНОШЕНИЯ ОГИБАЮЩИХ СИГНАЛОВ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПОМЕХ

Метод измерения огибающих сигналов, принятых по двум различным каналам измерительной системы, используется при геофизических и некоторых других исследованиях [1, 2]. Такие измерения часто производятся при наличии помех. Для определения потенциальных возможностей измерительной аппаратуры необходимо исследовать погрешности измерения отношения огибающих, обусловленные воздействием помех.

На рис. 1 представлена функциональная схема системы для определения отношения огибающих двух сигналов. Система, как правило, содержит: два идентичных избирательных усилителя (ИУ), на входы которых поступают сигналы и помехи ($U_{c1,2}$, $U_{п1,2}$); детекторы для выделения огибающих (ДО); устройство деления (УД). Иногда для осреднения результата измерения используется фильтр нижних частот (ФНЧ).

Благодаря наличию в каналах системы избирательных усилителей сигналы и помехи на входе устройства деления можно считать узкополосными. В дальнейшем рассмотрим

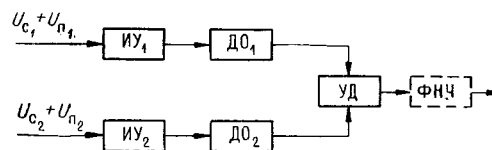


Рис. 1.

гармонические и шумоподобные сигналы, представляющие собой узкополосный нормальный стационарный случайный процесс. Такие сигналы используются в геофизике при разведке полезных ископаемых методом естественных электромагнитных полей [2]. Помехи в каналах системы также можно представить как узкополосные нормальные стационарные случайные процессы.

Наиболее полное описание свойств процесса на выходе устройства деления можно получить, определив его многомерный закон распределения. Для стационарного случайного процесса в большинстве случаев достаточно знать одномерный закон распределения и функцию автокорреляции.

Определим одномерный дифференциальный закон распределения частного огибающих гармонических сигналов и помех. Введем следующие обозначения: $b = \frac{U_{c2}}{U_{c1}}$ — отношение мгновенных значений сигнала

лов в каналах системы; $\sigma_{1,2}$ — среднеквадратическое значение шума в канале; $q = \frac{U_{c_1}^2}{2\sigma_1^2}$ — отношение сигнал/помеха по мощности в 1-м канале (черта обозначает статистическое усреднение); $P_{n_{1,2}}$ — коэффициент взаимной корреляции помех в каналах системы; B — отношение огибающих сигнал плюс помеха на выходе устройства деления. По известному двумерному распределению огибающих сигнала и шума [3] можно вычислить одномерный закон частного огибающих по соотношению [4]

$$f(B) = \int_0^{\infty} f(x, Bx) x dx. \quad (1)$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} f(B) = & \frac{B}{\sigma^4 (1 - P_{n_{1,2}}^2)} \int_0^{\infty} x^3 \exp \left[- \frac{x^2 + x^2 B^2 + U_{c_1}^2 + U_{c_2}^2 - 2U_{c_1} U_{c_2} P_{n_{1,2}}}{2\sigma^2 (1 - P_{n_{1,2}}^2)} \right] \times \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m I_m \left[\frac{P_{n_{1,2}} B x^2}{\sigma^2 (1 - P_{n_{1,2}}^2)} \right] I_m \left[\frac{U_{c_1} - P_{n_{1,2}} U_{c_2}}{\sigma^2 (1 - P_{n_{1,2}}^2)} x \right] \times \\ & \times I_m \left[\frac{U_{c_2} - P_{n_{1,2}} U_{c_1}}{\sigma^2 (1 - P_{n_{1,2}}^2)} Bx \right] dx, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_m = 2$; $m > 0$; $\sigma_{n_1} = \sigma_{n_2} = \sigma$; I_m — функция Бесселя многого аргумента. Вычислив этот интеграл, получим одномерный дифференциальный закон распределения огибающих гармонических сигналов и помех

$$\begin{aligned} f(B) = & \frac{2B}{(1 + B^2)^2} (1 - P_{n_{1,2}}^2) \exp \left[- \frac{q}{1 - P_{n_{1,2}}^2} (1 + b^2 - 2b P_{n_{1,2}}) \right] \times \\ & \times \sum_{m,k=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{\Gamma(2m+k+2) P_{n_{1,2}}^m q^{k+m} B^{2m} (1 - P_{n_{1,2}} b)^{2k} [b(1 + P_{n_{1,2}}) - P_{n_{1,2}}(1 + b^2)]^m}{k! (m!)^2 (m+k)! (1 - P_{n_{1,2}}^2)^{m+k} (1 + B)^{2m+k}} \times \\ & \times F \left(-k, -m-k, m+1, \frac{(b - P_{n_{1,2}})^2}{(1 - b P_{n_{1,2}})^2} B^2 \right) \times \\ & \times F \left(\frac{2m+k+2}{2}, \frac{2m+k+3}{2}, m+1, \frac{4P_{n_{1,2}} B^2}{(1 + B^2)^2} \right), \quad (2) \end{aligned}$$

где символами Γ и F обозначены гамма- и гипергеометрическая функции. Соотношение (2) описывает закон распределения отношения огибающих при любых сочетаниях исходных параметров сигналов и помех. В частных случаях соотношение (2) упрощается. Так, для отношения огибающих гармонических сигналов и некоррелированных помех ($q \neq 0$, $P_{n_{1,2}} = 0$), учитывая, что вторая гипергеометрическая функция в выражении (2) при $P_{n_{1,2}} = 0$ равна 1, а от суммы по m остается только один член при $m=0$, получаем

$$\begin{aligned} f(B) = & \frac{2B}{(1 + B^2)^2} e^{-q(1+b^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)!}{k!} \left(\frac{q}{1 + B^2} \right)^k \times \\ & \times F(-k, -k, 1, b^2 B^2). \quad (3) \end{aligned}$$

Для отношения огибающих коррелированных помех без сигнала ($q = 0, P_{n_{1,2}} \neq 0$) от суммы в (2) остаются члены при $m=0, k=0$; обе гипергеометрические функции равны единице, и формула (2) записывается следующим образом:

$$f(B) = \frac{2B(1+B^2)(1-P_{n_{1,2}}^2)}{[1+2B^2(1-2P_{n_{1,2}}^2)+B^4]^{3/2}}. \quad (4)$$

Плотность вероятности огибающих некоррелированных помех имеет вид

$$f(B) = \frac{2B}{(1+B^2)^2}. \quad (5)$$

Анализируя выражение (2), можно заметить, что кривая распределения несимметрична, одномодальна и при возрастании B асимптотически стремится к нулю. В пределе, когда $q = \infty$ (отсутствие помех) или $P_{n_{1,2}} = 1$ (когерентные помехи), частное огибающих сигналов и помех становится неслучайной величиной, и поэтому кривая распределения вырождается в δ -функцию.

Если сигналы в каналах системы можно представить как узкополосные нормальные процессы, то сумма сигнала и помехи в каждом канале также будет нормальной с дисперсиями $\sigma_1^2 = \sigma_{c_1}^2 + \sigma_{n_1}^2, \sigma_2^2 = \sigma_{c_2}^2 + \sigma_{n_2}^2$ и коэффициентом взаимной корреляции (при $\sigma_{n_1} = \sigma_{n_2}$):

$$P_{1,2} = \frac{qb + P_{n_{1,2}}}{[(q+1)(qb^2+1)]^{1/2}}. \quad (6)$$

Для определения плотности вероятности частного огибающих запишем двумерный закон распределения суммарного процесса сигнал плюс помеха

$$f(E_{N_1}, E_{N_2}) = \frac{E_{N_1} E_{N_2}}{\sigma_1 \sigma_2 (1 - P_{1,2}^2)} e^{-\frac{E_{N_1}^2 + E_{N_2}^2}{2(1 - P_{1,2}^2)}} I_0 \left(\frac{P_{1,2} E_{N_1} E_{N_2}}{1 - P_{1,2}^2} \right),$$

где $E_{N_{1,2}} = \frac{E_{1,2}}{\sigma_{1,2}}$ — нормированная огибающая процесса сигнал плюс помеха в соответствующем канале. Воспользовавшись соотношением (1) и выполнив интегрирование [5], получим

$$f(B) = \frac{2(q+1)(qb^2+1)(qb^2+1+qB^2+B^2)(1-P_{1,2}^2)B}{[(qb^2+1)^2+2(q+1)(qb^2+1)(1-2P_{1,2}^2)B^2+(q+1)^2B^4]^{3/2}}. \quad (7)$$

На рис. 2 представлены законы распределения частного огибающих гармонических сигналов и помех (сплошные линии) и шумоподобных сигналов и помех (штриховые линии).

Сравнивая функции распределения частного огибающих для обеих моделей сигналов, можно заметить, что при малых отношениях сигнал/помеха ($q < 2$) кривые распределения не отличаются друг от друга и вместо громоздкой формулы (2) при практических расчетах можно пользоваться сравнительно простым соотношением (7).

По известным законам распределения можно определить среднее значение (математическое ожидание) частного огибающих сигналов и помех. Опуская вычисление интегралов, приведем окончательные выра-

жения для среднего значения частного огибающих гармонических сигналов и помех

$$m_B = \frac{\pi}{2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, 1, -q\right) {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}, 1, -qb^2\right) \quad (8)$$

и шумоподобных сигналов и помех

$$m_B = \sqrt{\frac{qb^2 + 1}{q + 1}} E(P_{1,2}), \quad (9)$$

где символами ${}_1F_1$ и E обозначены вырожденная гипергеометрическая функция и полный эллиптический интеграл второго рода.

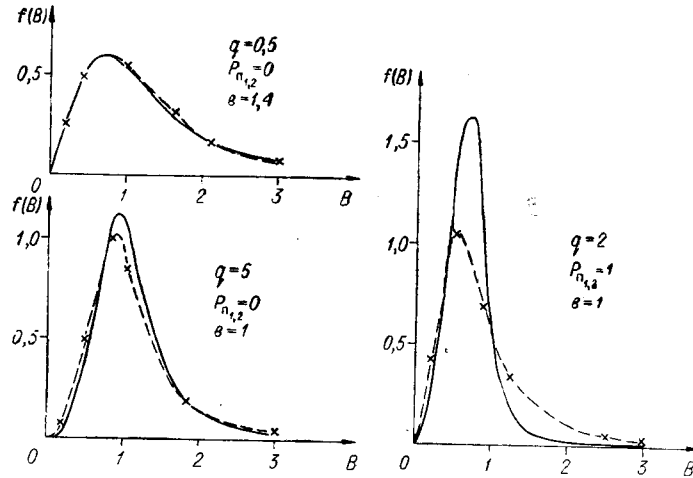


Рис. 2.

Соотношения (8) и (9) позволяют вычислить систематическую погрешность частного огибающих, определив ее как разность среднего значения частного и истинного значения отношения огибающих сигналов (без помех): $\Delta b = m_B - b$. Для гармонических сигналов систематическая погрешность определения частного практически равна нулю при выполнении неравенств: $qb^2 \gg 1$ и $q \gg 1$. Это легко показать, если воспользоваться асимптотическим представлением вырожденной гипергеометрической функции при $qb^2 \gg 1$, $q \gg 1$. В случае шумоподобных сигналов систематическая погрешность отсутствует при условии

$$b = \frac{E(P_{1,2})}{[1 + q(1 - E(P_{1,2}))]^{1/2}}.$$

Это соотношение выполняется при $b \geq 1$ и не выполняется при $b < 1$.

Можно показать, что законы распределения (2) и (7) дисперсии не имеют (соответствующие интегралы расходятся). Случайную погрешность измерения частного огибающих сигналов при наличии помех можно характеризовать величиной доверительной вероятности при заданном доверительном интервале или величиной доверительного интервала при заданной доверительной вероятности. Выражения для доверительной вероятности получим, проинтегрировав соотношения (2) и (7) в конечных пределах по параметру B . Так, для шумоподобных сигналов и помех

$$F(c < B < d) = \frac{(q+1)d^2 - 1 - qb^2}{2[(qb^2 + 1)^2 + 2(q+1)(qb^2 + 1)(1 - 2P_{1,2}^2)d^2 + (q+1)^2d^4]^{1/2}}$$

$$\frac{(q+1)c^2 - 1 - qb^2}{2[(qb^2 + 1)^2 + 2(q+1)(qb^2 + 1)(1 - 2P_{1,2}^2)c^2 + (q+1)^2c^4]^{1/2}} \cdot (10)$$

Из соотношения (10) видно, что с ростом q или $P_{1,2}$ вероятность того, что B находится в заданном интервале (cd), растет. Можно сказать, что случайная погрешность при этом уменьшается.

Законы распределения частного огибающих сигналов и помех определялись экспериментально. Для этого была собрана установка, схема которой приведена на рис. 3. Установка содержит три узкополосных

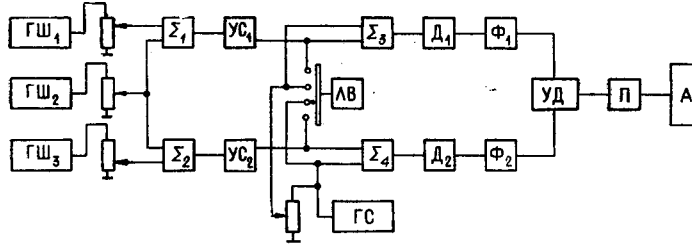


Рис. 3.

шумовых генератора (ГШ₁—ГШ₃), сумматоры (Σ₁ и Σ₂) для получения двухканального шума с переменным коэффициентом взаимной корреляции. В качестве источника сигнала использовался генератор гармонических или узкополосных шумовых колебаний (ГС). В сумматорах (Σ₃, Σ₄) образуется сумма сигналов и помех, которая потом детектируется линейными детекторами (Д₁, Д₂). Фильтры нижних частот (Ф₁, Ф₂)

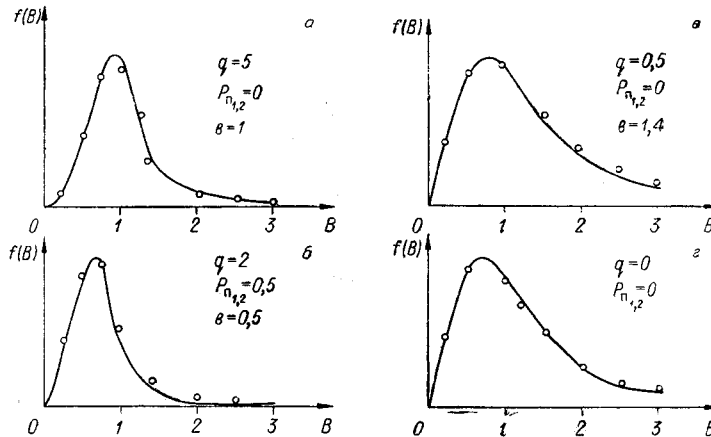


Рис. 4.

рассчитаны так, чтобы полностью подавлять несущую сигнала и не искажать спектра огибающей. Устройство деления (УД) набрано на аналоговой вычислительной машине МН-7. Непрерывный процесс, представляющий собой частное огибающих сигналов и помех, преобразовывался (преобразователь П) в последовательность коротких импульсов, амплитуда которых пропорциональна мгновенному значению процесса. Последовательность импульсов подавалась на вход импульсного амплитудного

анализатора АИ-100-1 (А), на экране и цифровом индикаторе которого наблюдались гистограммы частного огибающих сигналов и помех. Всего было снято 170 гистограмм для двух моделей сигналов и помех при различных параметрах.

Анализ точности эксперимента показывает, что погрешность, обусловленная применяемой аппаратурой и конечной реализацией случайного процесса, не превышает 10%.

На рис. 4, а, б сравниваются вычисленные по соотношению (2) кривые распределения частного огибающих для гармонических сигналов и помех с полученными экспериментально (обозначены точками). Для шумоподобных сигналов и помех такое же сравнение приведено на рис. 4, в, г. Кривая распределения вычислялась по соотношению (7). Теоретические и экспериментальные результаты хорошо согласуются.

В заключение можно отметить, что воздействие помех на систему измерения частного огибающих сигналов приводит к появлению не только случайной, но и систематической погрешности. Величины погрешностей определяются тремя исходными параметрами: отношением сигнал/помеха, коэффициентом взаимной корреляции помех и отношением огибающих сигналов. Расчетные соотношения, полученные в настоящей работе, позволяют определить величины погрешностей в различных условиях работы систем измерения частного огибающих сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Б. Гриневиц, К. Б. Карандеев, Г. А. Штамбергер. О принципах построения измерительной аппаратуры для электроразведки методом естественных электромагнитных полей.— *Автометрия*, 1965, № 4.
2. К. Б. Карандеев, Г. А. Штамбергер. Устройство для измерения отношения двух напряжений.— *Электричество*, 1962, № 12.
3. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. М., «Советское радио», 1966.
4. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1965.
5. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

*Поступила в редакцию
5 июля 1968 г.,
окончательный вариант —
14 января 1969 г.*