

В. П. ПЕРОВ

(Новосибирск)

**ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ  
 ПО ИНФОРМАЦИОННОМУ КРИТЕРИЮ  
 ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ СИГНАЛОВ  
 ОДНОПороГОВОЙ РЕШАЮЩЕЙ СХЕМОЙ**

**Постановка задачи.** Задача об оптимальном распределении энергии в прямой постановке формулируется следующим образом [1]. Требуется найти функцию распределения энергии  $E(\rho_i)$ , обращающую в минимум суммарные потери

$$L_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N L(E_i, \alpha_{ji}) \quad (1)$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^N E_i = E_{\Sigma} = \text{const}, \quad (2)$$

где  $L_{\Sigma}$  — суммарные потери при обследовании заданной области  $n$ -мерного пространства, условно разбитой на  $N$  элементарных участков;  $E_i = E(\rho_i)$  — радиус-вектор, определяющий положение  $i$ -го элементарного участка в  $n$ -мерном пространстве;  $\alpha_{ji} = \alpha_j(\rho_i)$  — параметры, характеризующие  $i$ -й элементарный участок;  $L(E_{ij}, \alpha_{ji}) = L_i$  — потери, имеющие место при обследовании  $i$ -го элементарного участка. Решение находится из уравнений:

$$\frac{\partial L_i}{\partial E_i} = \lambda; \quad (3)$$

$$E_i = 0, \quad (4)$$

где  $\lambda$  — множитель Лагранжа, определяемый из условия (2).

Решение может представлять функцию  $E_i = E(\rho_i)$ , удовлетворяющую уравнению (3), если при всех значениях  $\rho_i$  внутри обследуемой области эта функция неотрицательна, либо в противном случае может состоять из отрезков функций, удовлетворяющих уравнению (3) и пограничной функции (4), причем для последней, если она дает минимум сумме (2), должно выполняться неравенство

$$\frac{\partial L_i}{\partial E_i} + \lambda \geq 0.$$

Функции  $E(\rho_i)$ , удовлетворяющие перечисленным условиям, сравнительно просто могут находиться графическим методом [1].

Дальнейшая конкретизация задачи определяется выбором функции потерь  $L(E_i, \alpha_{ji})$ . Если, например, основное требование при обнаружении сигналов по заданному правилу заключается в том, чтобы иметь как можно меньше ошибок решения о наличии или отсутствии сигнала, то в качестве функции потерь целесообразно принимать функцию риска Байеса [1].

Однако основное требование может заключаться в том, чтобы получать как можно больше информации о наличии (отсутствии) сигналов в различных участках обследуемой области. Наилучшее (в среднем) выполнение такого требования может быть обеспечено, если в качестве функции потерь принять среднюю энтропию апостериорной вероятности наличия сигналов (среднюю апостериорную энтропию). Последнее следует из того, что средняя апостериорная энтропия характеризует неопределенность ситуации после учета результатов опыта, а уменьшение этой неопределенности означает увеличение информации о рассматриваемой ситуации.

Таким образом, с информационной точки зрения потери следует характеризовать средней апостериорной энтропией, т. е. полагать

$$L_{ij} = \bar{H}_{ij} = p_s \int_X H(x) W_s(x) dx + p_0 \int_X H(x) W_0(x) dx, \quad (5)$$

где  $L_{ij} = L(\rho_i, d_j)$  — потери при обследовании участка пространства, положение которого характеризуется дальностью  $d_j$  и направлением  $\rho_i$  (радиус-вектор  $\rho_i$  определяет положение точки в пространстве, не включая координаты дальности, и, следовательно, в пространстве, включая координату дальности, он определяет направление);  $\bar{H}_{ij} = \bar{H}(\rho_i, d_j)$  — среднее (по всем возможным исходам опыта) значение энтропии апостериорной вероятности наличия сигнала в направлении  $\rho_i$  на дальности  $d_j$ ;  $p_s = p_s(\rho_i, d_j)$ ,  $p_0 = 1 - p_s$  — априорные вероятности наличия и соответственно отсутствия сигнала в направлении  $\rho_i$  на дальности  $d_j$ ;  $W_s(x)$ ,  $W_0(x)$  — условные плотности распределения вероятностей различных результатов (исходов) опыта при наличии и отсутствии сигнала соответственно;  $x = x(\rho_i, d_j)$  — результат опыта;  $X$  — область возможных исходов опыта;  $H(x)$  — частное значение апостериорной энтропии при конкретном исходе опыта.

Энтропия  $H(x)$  выражается через апостериорную вероятность наличия сигнала следующим образом:

$$H(x) = -P_s(x) \ln P_s(x) - P_0(x) \ln P_0(x), \quad (6)$$

где  $P_s(x) = P_s(\rho_i, d_j, x)$ ,  $P_0(x) = 1 - P_s(x)$  — апостериорные вероятности наличия и соответственно отсутствия сигнала в направлении  $\rho_i$  на дальности  $d_j$  при конкретном исходе опыта. Для них по формуле Байеса имеем:

$$P_s(x) = \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(x) + \frac{p_0}{p_s}}; \quad P_0(x) = \frac{\frac{p_0}{p_s}}{\Lambda(x) + \frac{p_0}{p_s}}; \quad (7)$$

$$\Lambda(x) = \frac{W_s(x)}{W_0(x)}. \quad (8)$$

Таким образом, вид выражения (5) для функции потерь зависит от  $W_s(x)$  и  $W_0(x)$ , т. е. от функций плотности распределения вероятностей

различных исходов опыта. Последние, в свою очередь, зависят от тех или иных особенностей проведения опыта, по результатам которого находится апостериорная вероятность наличия сигнала.

Наиболее исчерпывающий опыт заключается в измерении точных значений выборок. Однако проще измерять приближенные значения выборок путем квантования их по уровню. Простейшим и легко реализуемым является квантование на два уровня (бинарное квантование). Такое квантование, например, всегда имеет место при использовании однопороговой решающей схемы. Именно этот наиболее простой случай, при котором выборка квантуется имеющейся однопороговой решающей схемой, будет рассматриваться в данной статье. Как известно, однопороговая решающая схема принимает решение о наличии сигнала, если значение выборки превысило определенный заданный уровень (порог), и решение об отсутствии сигнала, если значение выборки не превысило порога. Очевидно, наличие в схеме одного порога приводит к тому, что выборка квантуется на два уровня. После ее квантования возможны два исхода опыта ( $x=x_1$ ;  $x=x_0$ ), первый из которых соответствует превышению выборкой порога решающей схемы, а второй — не превышению.

Соответственно с этим для  $W_s(x)$  и  $W_0(x)$  имеем:

$$\begin{aligned} W_s(x) &= D \delta(x - x_1) + (1 - D) \delta(x - x_0); \\ W_0(x) &= F \delta(x - x_1) + (1 - F) \delta(x - x_0), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\delta(x)$  —  $\delta$ -функция Дирака;  $D = D(E_{ij})$  — вероятность того, что значение выборки превысит порог решающей схемы при наличии сигнала (с точки зрения решающей схемы это вероятность правильного обнаружения, т. е. принятия решения о наличии сигнала при условии, что он в действительности имеется).  $F = F(E_{ij})$  — вероятность того, что значение выборки превысит порог решающей схемы при отсутствии сигнала (с точки зрения решающей схемы это вероятность ложной тревоги, т. е. принятия решения о наличии сигнала, в то время как в действительности его нет);  $E_{ij} = E(\rho_i, d_j)$  — энергия сигнала от объекта, расположенного в направлении  $\rho_i$  на дальности  $d_j$ ,  $E_{ij}$  обычно можно представить в виде произведения

$$E_{ij} = f(d_j) E_i, \quad (10)$$

где  $E_i = E(\rho_i)$  — энергия, расходуемая в  $i$ -м направлении (в направлении  $\rho_i$ );  $f(d_j)$  — некоторая функция дальности, например при обнаружении воздушных объектов методом активной радиолокации  $f(d_j) = kd^{-1/4}$  ( $k$  — постоянный коэффициент).

Предметом дальнейшего рассмотрения является задача об оптимальном распределении энергии с точки зрения получения наибольшего количества информации о наличии (отсутствии) сигналов в различных участках обследуемой области при условии, что апостериорная вероятность наличия сигналов находится по результатам, имеющим место после бинарного квантования выборок. С математической точки зрения задача заключается прежде всего в отыскании конкретной формы уравнения оптимума (4) с учетом (5) — (10).

**Уравнение для оптимальной функции распределения энергии.** Подставляя (6) — (9) в (5), после несложных преобразований приходим к равенству

$$L_{ij} = \bar{H}_{ij} = H_a + p_s H_s + p_0 H_0 - H_{s0}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} H_a &= -p_s \ln p_s - p_0 \ln p_0; & H_s &= -D \ln D - (1-D) \ln (1-D); \\ H_0 &= -F \ln F - (1-F) \ln (1-F); \\ H_{s_0} &= -(p_s D + p_0 F) \ln (p_s D + p_0 F) - \\ &\quad - (1 - p_s D - p_0 F) \ln (1 - p_s D - p_0 F). \end{aligned} \quad (12)$$

В соответствии с (12) очевидно, что  $H_a$  — энтропия априорной вероятности наличия сигнала;  $H_s$  — энтропия условной вероятности превышения порога выборкой при наличии сигнала (вероятности правильного обнаружения);  $H_0$  — энтропия условной вероятности превышения порога выборкой при отсутствии сигнала (вероятности ложной тревоги);  $H_{s_0}$  — энтропия полной вероятности превышения порога.

Замечая, что функция потерь  $L_i$  для заданного диапазона дальностей от  $d_1$  до  $d_i$ , определяется суммой

$$L_i = \sum_{j=1}^i L_{ij}, \quad (13)$$

на основании (11), (10) и (4) приходим к следующему уравнению для оптимальной функции распределения энергии:

$$\sum_{j=1}^i \left( \frac{\partial H_a}{\partial E_i} + p_s \frac{\partial H_s}{\partial E_i} + p_0 \frac{\partial H_0}{\partial E_i} - \frac{\partial H_{s_0}}{\partial E_i} \right) = \lambda. \quad (14)$$

Но, согласно (12),

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_s}{\partial E_i} &= -\ln \frac{D}{1-D} \frac{\partial D}{\partial E_i}; & \frac{\partial H_0}{\partial E_i} &= -\ln \frac{F}{1-F} \frac{\partial F}{\partial E_i}; \\ \frac{\partial H_{s_0}}{\partial E_i} &= -\ln \frac{p_s D + p_0 F}{1 - p_s D - p_0 F} \frac{\partial}{\partial E} (p_s D + p_0 F); & \frac{\partial H_a}{\partial E_i} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Подстановка (15) в (14) после несложных преобразований позволяет записать уравнение (14) в следующем, более конкретном виде

$$\sum_{j=1}^i \left\{ -p_s \ln \frac{D(1 - p_s D - p_0 F)}{(1-D)(p_s D + p_0 F)} \frac{\partial D}{\partial E_i} - \right. \\ \left. - p_0 \ln \frac{F(1 - p_s D - p_0 F)}{(1-F)(p_s D + p_0 F)} \frac{\partial F}{\partial E_i} \right\} = \lambda. \quad (16)$$

При учете одного значения дальности вместо (16) имеем

$$-p_s \ln \frac{D(1 - p_s D - p_0 F)}{(1-D)(p_s D - p_0 F)} \frac{\partial D}{\partial E_i} - p_0 \ln \frac{F(1 - p_s D - p_0 F)}{(1-F)(p_s D - p_0 F)} \frac{\partial F}{\partial E_i} = \lambda. \quad (17)$$

В дальнейшем для упрощения записи будем ориентироваться на частный случай одной дальности, т. е. на уравнение (17).

Конкретизация уравнения (17) возможна при подстановке выражений для  $F$  и  $D$ , вид которых зависит от характера помех, от типа обнаруживаемого сигнала и правила выбора порога решающей схемы (уровня квантования). Вопрос о выборе уровня квантования представляет самостоятельный интерес, и поэтому рассмотрим его более подробно.

**Возможные варианты выбора уровня квантования (порога решающей схемы).** Рассмотрим четыре варианта выбора уровня квантова-

ния по следующим критериям: Неймана — Пирсона, Байеса, минимума потери информации о наличии сигнала.

**А. Критерий Неймана — Пирсона** требует выбора порога решающей схемы из условия наибольшей вероятности правильного обнаружения при вероятности ложной тревоги, не превышающей заданного значения. В частном случае принятия решения о наличии сигнала по значению только одного параметра процесса (при одномерном пороге решающей схемы) критерий Неймана — Пирсона упрощается. В этом случае он приводит к условию

$$F = F_0, \quad (18)$$

где  $F_0$  — заранее заданное постоянное значение вероятности.

В дальнейшем будет рассматриваться именно этот частный случай.

**Б. Критерий Байеса** требует, чтобы уровень квантования (порог решающей схемы) выбирался из условия обращения в минимум функции риска Байеса, имеющей вид

$$R = p_0 W_{00} + p_s W_{s0} + p_0 (W_{0s} - W_{00}) F + p_s (W_{ss} - W_{s0}) D, \quad (19)$$

где  $R$  — функция риска Байеса;  $W_{00}$ ,  $W_{ss}$  — весовые коэффициенты, характеризующие «вредность» правильных решений об отсутствии и наличии сигнала (обычно полагают  $W_{00} = W_{ss} = 0$ );  $W_{0s}$ ,  $W_{s0}$  — весовые коэффициенты, характеризующие вредность ошибочных решений о наличии и отсутствии сигнала соответственно.

Дифференцируя (19) по порогу ( $x_*$ ) и приравнявая результат нулю, приходим к следующему условию для выбора порога:

$$p_0 (W_{0s} - W_{00}) \frac{\partial F}{\partial x_*} + p_s (W_{ss} - W_{s0}) \frac{\partial D}{\partial x_*} = 0 \quad (20)$$

или

$$\frac{\partial D}{\partial x_*} / \frac{\partial F}{\partial x_*} = \frac{p_0 (W_{0s} - W_{00})}{p_s (W_{s0} - W_{ss})}. \quad (21)$$

Но

$$\frac{\partial D}{\partial x_*} / \frac{\partial F}{\partial x_*} = \Lambda_*, \quad (22)$$

где  $\Lambda_*$  — пороговое значение отношения правдоподобия [2, 3]. Из (22) и (21) следует известное условие [2] для порога, оптимального по критерию Байеса:

$$\Lambda_* = \frac{p_0 (W_{0s} - W_{00})}{p_s (W_{s0} - W_{ss})}. \quad (23)$$

**В. Критерий минимума потери информации** о наличии (отсутствии) сигнала требует выбора такого уровня квантования, при котором потеря информации, связанная с квантованием выборки, была бы наименьшей. Известно, что при квантовании потери информации всегда имеют место и избежать их нельзя, но тем не менее их можно в какой-то мере уменьшить рациональным выбором уровня квантования и, с этой точки зрения, рассматриваемый критерий является вполне обоснованным. Условие минимума потерь информации при квантовании эквивалентно условию минимума средней энтропии апостериорной вероятности наличия сигнала, определяемой выражением (11). Следовательно, задача заключается в выборе значения порога  $x_*$  обращающего в минимум выражение (11). Дифференцируя (11) по  $x_*$  и принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_s}{\partial x_*} &= -\ln \frac{D}{1-D} \frac{\partial D}{\partial x_*}; & \frac{\partial H_0}{\partial x_*} &= -\ln \frac{F}{1-F} \frac{\partial F}{\partial x_*}; \\ \frac{\partial H_{s0}}{\partial x_*} &= -\ln \frac{p_s D + p_0 F}{1 - p_s D - p_0 F} \frac{\partial}{\partial x_*} (p_s D + p_0 F); & \frac{\partial H_a}{\partial x_*} &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

после несложных преобразований приходим к следующему условию для оптимального уровня квантования  $x_*$  по критерию минимума потери информации о наличии сигнала:

$$+ p_s \ln \frac{D(1 - p_s D - p_0 F)}{(1 - D)(p_s D + p_0 F)} \frac{\partial D}{\partial x_*} + p_0 \ln \frac{F(1 - p_s D - p_0 F)}{(1 - F)(p_s D + p_0 F)} \frac{\partial F}{\partial x_*} = 0. \quad (25)$$

Последнее можно также записать в виде

$$\Lambda_* = -\frac{p_0}{p_s} \frac{\ln \frac{F(1 - p_s D - p_0 F)}{(1 - F)(p_s D + p_0 F)}}{\ln \frac{D(1 - p_s D + p_0 F)}{(1 - D)(p_s D + p_0 F)}}, \quad (25a)$$

где  $\Lambda_*$  — пороговое значение отношения правдоподобия.

Сравнение (25a) и (23) показывает, что порог квантования, выбираемый по критерию минимума потери информации, совпадает с байесовым порогом лишь в частном случае при  $W_{0s} - W_{00} = W_{s0} - W_{ss}$  и  $F=D$ . В остальных случаях имеется различие. Например, для сигнала с неизвестной фазой и амплитудой, т. е. при [3]

$$\Lambda_* = \frac{1}{1 + \mu} e^{\frac{x_*^2}{2\mu(1 + \mu)}}; \quad F = e^{-\frac{x_*^2}{2\mu}}; \quad D = F^{\frac{1}{1 + \mu}}, \quad (26)$$

значения порога  $x_*$ , удовлетворяющие (25a) (критерию минимума потери информации), приведены в таблице. В той же таблице даны соответствующие величины  $(x_*, 1)$ , удовлетворяющие выражению (23) (критерию Байеса). Сравнение их между собой показывает, что при значениях  $p_s < 0,5$  оба критерия приводят примерно к одинаковым результатам. Однако при  $p_s > 0,5$  различия становятся существенными и возрастают по мере приближения  $p_s$  к 1. При определенных сочетаниях  $p_s$  и  $\mu$  порог, выбираемый по критерию Байеса, является мнимой величиной, т. е. не имеет физического смысла (такому порогу соответствуют значения  $F$  и  $D$ , большие единицы). При использовании критерия минимума потери информации этого противоречия не наблюдается.

Представляет интерес оценить потери количества информации о наличии сигнала вследствие квантования выборки на два уровня. Последние могут быть оценены увеличением средней энтропии апостериорной вероятности наличия сигнала, определенной по квантованным значениям выборки в сравнении с той же величиной, определенной по мгновенным значениям выборки. Средняя апостериорная энтропия при использовании квантованных значений выборок выражается формулой (11). На рис. 1 приведены кривые, выражающие среднюю энтропию апостериорной вероятности наличия сигнала в зависимости от  $p_s$  при различных  $\mu$  для сигнала с неизвестной фазой и амплитудой. Эти значения найдены в предположении измерения мгновенных значений выборок по формуле (5) с учетом (7) и (26). Средние энтропии апостериорной вероятности, определяемой по квантованным значениям выборки при уровне квантования, рассчитываемом на основании (25a) (т. е. при выборке уровня кванто-

$P_s$	$\mu$										Критерий
	1	2	3	4	6	8	10	14	20	30	
0,001	5,46	15,0	28,4	44,4	81,6	120	158	236	355	562	$x_*^2$
	30,4	48,0	67,1	85,1	124	164	205	289	417	640	$x_{*1}^2$
0,1	5,05	12,4	20,9	30,0	49,4	70,0	91,6	137	209	337	$x_*^2$
	11,6	19,8	28,7	38,1	58,1	79,2	101	147	220	349	$x_{*1}^2$
0,3	4,57	10,6	17,5	24,8	40,7	57,6	75,0	113	173	281	$x_*^2$
	6,16	11,7	17,9	24,6	39,2	54,9	71,5	123	163	265	$x_{*1}^2$
0,5	4,25	9,64	15,7	22,2	36,1	51,1	66,9	100	154	250	$x_*^2$
	2,80	6,60	11,2	16,1	28,0	40,0	53,0	81,0	128	212	$x_{*1}^2$
0,7	3,99	8,90	14,3	20,1	32,6	46,0	60,0	89,0	137	223	$x_*^2$
	-0,64	1,50	4,32	7,60	15,3	24,3	34,1	55,9	92,0	160	$x_{*1}^2$
0,9	3,78	8,26	13,1	18,3	29,3	40,9	53,0	78,5	119	191	$x_*^2$
	-6,04	-6,60	-6,48	-5,90	-3,50	-0,54	4,40	15,2	35,3	76,3	$x_{*1}^2$
0,999	3,69	7,97	12,6	17,4	27,5	38,0	48,8	71,1	106	165	$x_*^2$
	-24,8	-34,8	-44,1	-52,9	-69,3	-84,6	-99,0	-126	-126	-215	$x_{*1}^2$

вания по критерию минимума потери информации), представлены на рис. 2.

Аналогичные графики для порога квантования, удовлетворяющего критерию Байеса, приведены на рис. 3, а для случая выбора порога квантования по критерию Неймана — Пирсона при  $F=10^{-2}$ ,  $F=10^{-4}$  — на рис. 4, а и б соответственно.

Сравнение кривых позволяет оценить потери информации, имеющие место вследствие квантования выборок, а также оценить степень различия потерь при выборе уровня квантования по различным критериям.

**Уравнения для нахождения оптимальных распределений энергии в некоторых частных случаях.** С точки зрения типа сигналов и выбора уровня квантования рассмотрим следующие частные случаи: 1) сигнал

с неизвестными фазой и амплитудой; уровень квантования выбирается по критерию: а) Неймана — Пирсона, б) Байеса, в) минимума потери информации; 2) сигнал полностью известен; уровень квантования выбирается по критерию: а) Неймана — Пирсона, б) Байеса. Помехи во всех случаях будем считать стационарным белым гауссовым шумом. Смесь сигнала с шумом аддитивной.

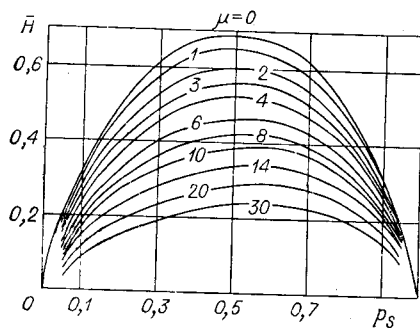


Рис. 1. Графики средней энтропии апостериорной вероятности наличия сигнала при измерении в процессе опыта мгновенных значений выборок (сигнал с неизвестной фазой и амплитудой).

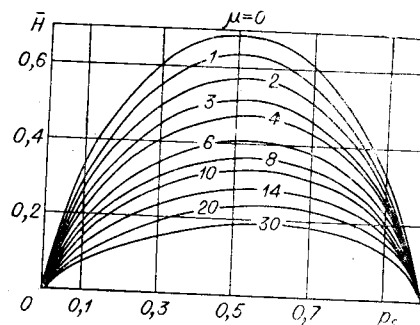


Рис. 2. Графики средней энтропии апостериорной вероятности наличия сигнала при квантовании выборок по порогу, удовлетворяющему информационному критерию (сигнал с неизвестной фазой и амплитудой).

1. Сигнал с неизвестными фазой и амплитудой. В этом случае [3]

$$F = e^{-\frac{x^2}{2\mu}}; D = F^{\frac{1}{1+\mu}}; \Lambda = \frac{1}{1+\mu} e^{-\frac{x^2}{2\mu(1+\mu)}} \quad (27)$$

где  $\mu = \frac{E}{S_n}$ ;  $E$  — энергия сигнала;  $S_n$  — спектральная интенсивность шума.

А. При выборе уровня квантования по критерию Неймана — Пирсона выполняется условие (18), вследствие чего уравнение оптимума (17) принимает вид

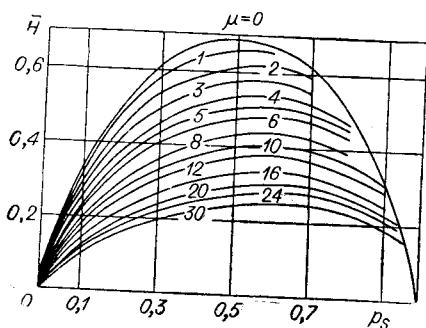


Рис. 3. Графики средней энтропии апостериорной вероятности наличия сигнала при квантовании выборок по байесовому порогу (сигнал с неизвестной фазой и амплитудой).

$$-p_s \ln \frac{D(1-p_s D - p_0 F)}{(1-D)(p_s D + p_0 F)} \times \frac{\partial D}{\partial E} = \lambda, \quad (28)$$

причем

$$D = F^{\frac{1}{1+\mu}} \quad (29)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial D}{\partial E} = \frac{\partial \mu}{\partial E} \frac{\partial D}{\partial \mu} = \frac{-1}{S_n(1+\mu)^2} F^{-\frac{\mu}{1+\mu}}, \quad (30)$$

где  $F$  — заданное значение вероятности



превышения выборкой порога квантования при отсутствии сигнала. На основании (30) и (28) уравнение оптимума можно представить так:

$$\frac{p_s}{S_n (1 + \mu)^2} F_0^{-\frac{\mu}{1+\mu}} \ln \frac{D(1 - p_s D - p_0 F)}{(1 - D)(p_s D + p_0 F)} = \lambda. \quad (31)$$

Решение уравнения (31), равно как и других уравнений оптимума, которые будут получены далее для других частных случаев, можно найти графическим путем [1]. В примере, помещенном в конце статьи, дается графическое решение одного из уравнений рассматриваемого типа с учетом дополнительного ограничения (2).

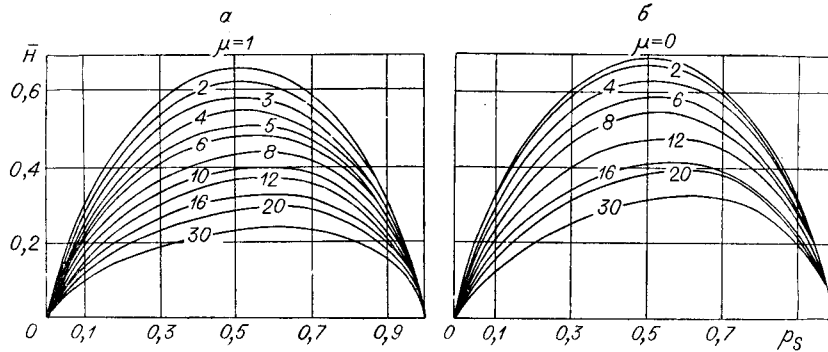


Рис. 4. Графики средней энтропии апостериорной вероятности наличия сигнала при квантовании выборок по порогу, удовлетворяющему критерию Неймана—Пирсона (сигнал с неизвестной фазой и амплитудой):  
а —  $F=0,0001$ ; б —  $F=0,01$ .

Б. При выборе уровня квантования по критерию Байеса на основании (27) и (23) имеем

$$x_* = 2(1 + \mu) \ln [\Lambda_* (1 + \mu)],$$

т. е.

$$\frac{\partial D}{\partial \mu} = [\Lambda_* (1 + \mu)]^{-\frac{1}{\mu}} \frac{1}{\mu^2 (1 + \mu)} \{ (1 + \mu) \ln [\Lambda_* (1 + \mu)] - \mu \};$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = [\Lambda_* (1 + \mu)]^{-\frac{(1 + \mu)}{\mu}} \left\{ \frac{\ln [\Lambda_* (1 + \mu)]}{\mu^2} - \frac{1}{\mu} \right\}, \quad (32)$$

где  $\Lambda_* = \frac{p_0 (W_{0s} - W_{00})}{p_s (W_{s0} - W_{ss})}$ . Подставляя (32) в (17) и полагая  $W_{0s} - W_{00} = W_{s0} - W_{ss}$ , после элементарных преобразований с учетом (27) приходим к следующему уравнению для оптимальной функции распределения энергии:

$$\frac{p_0}{\mu^2} e^{-\frac{x_*^2}{2\mu}} \left\{ [\mu - (1 + \mu) \ln \Lambda_* (1 + \mu)] \ln \frac{D(1 - p_s D - p_0 F)}{(1 - D)(p_s D + p_0 F)} + \right.$$

$$\left. + [\mu - \ln \Lambda_* (1 + \mu)] \ln \frac{F(1 - p_s D - p_0 F)}{(1 - F)(p_s D + p_0 F)} \right\} = \lambda. \quad (33)$$

В. При выборе уровня квантования по критерию минимума потери информации уравнение оптимума (17) с учетом (25а) может быть представлено в виде

$$p_s \ln \frac{D(1-p_s D-p_0 F)}{(1-D)(p_s D+p_0 F)} \left( \frac{\partial D}{\partial E} + \Lambda_* \frac{\partial F}{\partial E} \right) = \lambda. \quad (34)$$

В частности, при сигнале с неизвестными фазой и амплитудой  $\Lambda_*$ ,  $D$  и  $F$  выражаются равенствами (26). Эти равенства с учетом таблицы позволяют построить набор кривых, выражающих зависимость левой части уравнения (34) от  $\mu$  при разных  $p_s$ . С помощью такого набора кривых можно находить графическим методом решения уравнения (34).

2. *Полностью известный сигнал.* В этом случае [3]

$$F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{b_0}^{\infty} e^{-x^2/2} dx; \quad D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{b_0 - \sqrt{\mu}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx; \quad (35)$$

$$\Lambda_* = e^{\sqrt{\mu} b_0 - \mu/2}. \quad (35a)$$

А. При выборе уровня квантования по критерию Неймана — Пирсона ( $b_0 = \text{const}$ ) имеем

$$\frac{\partial D}{\partial E} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} S_n \sqrt{\mu}} e^{-\frac{(b_0 - \sqrt{\mu})^2}{2}}, \quad (36)$$

и, следовательно, уравнение оптимума (28) может быть представлено в виде

$$\frac{p_s}{S_n \sqrt{\mu}} \ln \frac{D(1-p_s D-p_0 F)}{(1-D)(p_s D+p_0 F)} e^{-\frac{(b_0 - \sqrt{\mu})^2}{2}} = \lambda. \quad (37)$$

Б. При выборе уровня квантования по критерию Байеса

$$\frac{\partial D}{\partial \mu} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi} \sqrt{\mu}} e^{-\frac{(b_0 - \sqrt{\mu})^2}{2}} \left( 1 + \frac{2 \ln \Lambda_*}{\mu} \right);$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi} \sqrt{\mu}} e^{-\frac{b_0^2}{2}} \left( 1 - \frac{2 \ln \Lambda_*}{\mu} \right),$$

а уравнение оптимума (17) после подстановки этих выражений для производных и несложных преобразований может быть записано так:

$$\frac{1}{S_n \sqrt{\mu}} e^{-\frac{b_0^2}{2}} \left\{ p_s \Lambda_* (2 \ln \Lambda_* + \mu) \ln \frac{D(1-p_s D-p_0 F)}{(1-D)(p_s D+p_0 F)} + \right. \\ \left. + p_0 (2 \ln \Lambda_* - \mu) \ln \frac{F(1-p_s D-p_0 F)}{(1-F)(p_s D+p_0 F)} \right\} = \lambda, \quad (38)$$

где  $b_0$ , согласно (35а), определяется выражением

$$b_0 = \frac{\ln \Lambda_*}{\sqrt{\mu}} + \frac{\sqrt{\mu}}{2}. \quad (39)$$

**Пример.** Пусть ситуация характеризуется следующим образом. Имеется 15 элементарных одинаково удаленных участков обследуемой

области пространства, причем вероятность наличия объекта в направлении на первый участок равна 0,5, а в остальных направлениях 0,01, т. е.

$$p_{s1} = 0,5; \quad p_{si} = 0,01; \quad i = 2, 3, \dots, 15. \quad (40)$$

Известно, что во всех направлениях уровень помех одинаков, т. е.

$$S_n = \text{const}. \quad (41)$$

Сигнал будем предполагать полностью известным, порог квантования — удовлетворяющим критерию Байеса. Требуется оптимально распределить энергию между разными направлениями с точки зрения получения наибольшего количества общей (суммарной) информации о наличии объектов в этих направлениях при условии, что отношение суммарной энергии, расходуемой на обнаружение, к уровню помех равно 15, т. е.

$$\sum_{i=1}^{15} \mu_i = \frac{E_{\Sigma}}{S_n} = 15. \quad (42)$$

В рассматриваемой задаче функция оптимального распределения энергии может быть найдена как решение уравнения (38) при условиях (14), (41) и (42). Наиболее просто решение можно найти графическим методом при помощи графиков, изображенных на рис. 5. Процедура графического решения описана в [1] и состоит в следующем. Параллельно оси абсцисс проводится прямая так, чтобы абсциссы точек ее пересечения с кривыми, отвечающими определенным значениям  $p_s$ , в сумме были равны 15. Именно эти значения абсцисс и являются решениями.

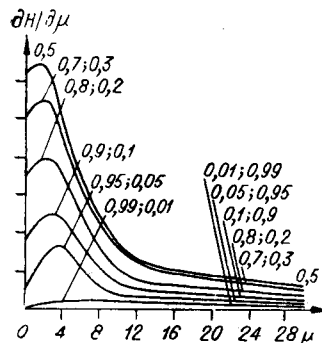


Рис. 5. Графики, выражающие зависимость левой части уравнения (38) от  $\mu$  при  $S_n = \text{const}$ .

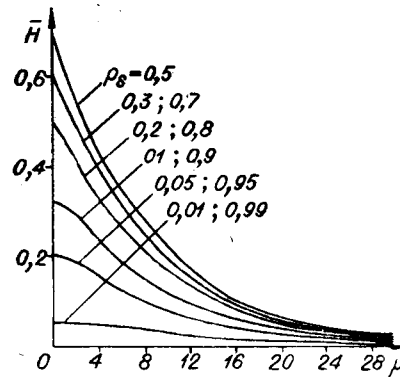


Рис. 6. Графики средней энтропии апостериорной вероятности наличия сигнала при квантовании выборок по байесовому порогу (сигнал полностью известен).

Учитывая это и используя график, приходим к выводу, что 1-му направлению с  $p_s = 0,5$  соответствует  $\mu = 15$ , а остальным 14 направлениям с  $p_s = 0,01$  —  $\mu = 0$ , т. е. вся энергия должна посылаться в 1-е направление. Таким образом, оптимальное распределение энергии в условиях рассматриваемого примера будет следующим:

$$E_1 = 15 S_n, \quad E_i = 0; \quad i \neq 1.$$

Интегральные потери можно находить по графикам, изображенным на рис. 6. Из этих графиков следует, что при оптимальном распределении энергии  $H_{\Sigma \text{ опт}} = 0,92$ , а при равномерном —  $H_{\Sigma \text{ рав}} = 1,39$ , т. е. за счет оптимального распределения энергии интегральные потери сокращаются примерно в 1,5 раза. Однако более показательным является сравнение суммарных притоков количества информации при оптимальном и равномерном распределениях энергии ( $I_{\Sigma \text{ опт}}$  и  $I_{\Sigma \text{ рав}}$ ). Суммарный приток информации определяется как разность между суммарными априорной и апостериорной энтропиями, т. е.  $I_{\Sigma \text{ опт}} = H_{\Sigma a} - H_{\Sigma \text{ опт}}$ ;  $I_{\Sigma \text{ рав}} = H_{\Sigma a} - H_{\Sigma \text{ рав}}$ , где, согласно (40),  $H_{\Sigma a} = -0,5 \ln 0,5 - 14 \cdot 0,01 \ln 0,01 \approx 1,5$ . Следовательно,  $I_{\Sigma \text{ опт}} = 0,11$ , а  $I_{\Sigma \text{ рав}} = 0,58$ , т. е. за счет оптимального распределения энергии суммарный приток информации увеличивается в 5 раз.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Распределение энергии, оптимальное с точки зрения минимума суммарного значения средней энтропии апостериорной вероятности наличия сигнала, определенной по квантованным значениям выборки, позволяет повышать общий приток информации о наличии сигналов по сравнению со случаем равномерного распределения энергии. Программа оптимального распределения энергии при этом находится в результате решения соответствующего уравнения оптимума при дополнительном условии (2).

### ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Перов. Оптимальное распределение энергии при многократном обследовании заданной области.— Изв. АН СССР, ОТН, «Энергетика и автоматика», 1962, № 6.
2. Л. А. Вайнштейн, В. Д. Зубаков. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М., «Советское радио», 1960.
3. Д. Миддлтон, П. Ван—Метер. Обнаружение и воспроизведение сигналов, принятых на фоне шумов, с точки зрения теории статистических решений.— Сб. переводных статей. М., Госэнергоиздат, 1960.

*Поступила в редакцию  
21 августа 1967 г.,  
окончательный вариант —  
7 февраля 1968 г.*