3. А. А. Красовский, Г. С. Поспелов. Основы автоматики и технической кибернетики. М.— Л., Госэнергоиздат, 1962.
4. G. A. Morton. Electron Guns for television application.— Rev. Mod. Phys., 1946, 18, № 3.
5. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа. М., «Наука», 1967.

Поступило в редакцию
25 января 1968 г.

УДК 519.25

Г. П. ВЕСЕЛОВА, Ю. И. ГРИБАНОВ
(Москва)

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ НЕЦЕНТРИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Вопросы статистической погрешности оценок корреляционных функций случайных процессов исследованы достаточно подробно [1—3]. Однако все расчеты проводились при допущении равенства нулю среднего значения случайного процесса: $Mx=0$. На практике же обычно приходится иметь дело с нецентрированными случайными процессами. В ряде случаев специально вводят постоянную составляющую, чтобы в дальнейшем оперировать с сигналами одной полярности.

В статье произведен расчет статистической погрешности оценок корреляционных функций при общем условии $Mx \neq 0$ и сделаны некоторые практические выводы.

Постановка задачи. Оценку корреляционной функции стационарных эргодических центрированных случайных процессов вычисляют согласно следующему алгоритму:

$$R^*(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,x(t+\tau)\,dt. \qquad (1$$

При обработке нецентрированных реализаций поступают двояко: либо предварительно находят оценку математического ожидания

$$M^*x = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt \qquad (2)$$

и затем вычисляют $R^*(\tau)$:

$$R^*_{\mathrm{I}}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - M^*x]\,[x(t+\tau) - M^*x]\,dt, \qquad (3)$$

либо учитывают среднее в конце вычислений и рассчитывают

$$R^*_{\mathrm{II}}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,x(t+\tau)\,dt - (M^*x)^2. \qquad (4)$$

Оценку среднего M^*x и корреляционной функции $R^*(\tau)$ производят как по одной и той же, так и по различным реализациям. Первый случай характерен для обработки реализаций на УЦВМ и корреляторах с накоплением информации, второй — для коррелятора, работающих в реальном масштабе времени.

Статистическая погрешность оценки корреляционной функции при расчете $R^*(\tau)$ и M^*x по одной реализации. Исследуемый процесс $x(t)$ будем полагать стационарным, эргодическим с нормальным распределением. Для упрощения будем рассматривать оценку $R^*(\tau)$ в $\tau=0$. Если M^*x и $R^*(0)$ рассчитываются по одной и той же реализации, то вычисляется

$$R_{\rm I}^*(0)=\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left\{x^0(t)+Mx-\frac{1}{T}\int\limits_0^T[x^0(t)+Mx]\,dt\right\}^2 dt \tag{5}$$

либо

$$R_{\rm II}^*(0)=\frac{1}{T}\int\limits_0^T[x^0(t)+Mx]^2\,dt-\left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T[x^0(t)+Mx]\,dt\right\}^2, \tag{6}$$

где $Mx^0=0$. Как легко показать, обе оценки (5) и (6) в этом случае одинаковы и равны

$$R_{\rm I}^*(0)=R_{\rm II}^*(0)=\frac{1}{T}\int\limits_0^T[x^0(t)]^2\,dt-\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T x^0(t)\,dt\right]^2. \tag{7}$$

Математическое ожидание оценки описывается выражением

$$M[R^*(0)]=R(0)-M\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T x^0(t)\,dt\right]^2=R(0)-D[M^*x], \tag{8}$$

т. е. оценка $R^*(0)$ оказывается смещенной. Однако если использовать известные оценки $D[M^*x]$ и $D[R^*(0)]$ (в качестве оценки для $D[R^*(0)]$ можно приближенно использовать дисперсию оценки $R^*(0)$ для $Mx=0$) [3]:

$$D(M^*x)=\frac{2\sigma^2}{T}\int\limits_0^\infty\rho(\tau)\,d\tau; \tag{9}$$

$$D[R_0^*(0)]=\frac{4\sigma^4}{T}\int\limits_0^\infty\rho^2(\tau)\,d\tau\quad\left(\frac{\tau_0}{T}\ll 1\right), \tag{10}$$

то можно видеть, что $\dfrac{D[M^*x]}{\sqrt{D[R^*(0)]}}$ имеет порядок $\sqrt{\dfrac{\tau_0}{T}}$, где τ_0 — интервал корреляции $x(t)$. Так как на практике $\tau_0/T\ll 1$, то величиной этого смещения по сравнению с разбросом оценки можно пренебречь.

Дисперсия оценки $D[R^*(0)]$, где $R^*(0)$ определяется формулой (7), будет равна

$$D[R^*(0)]=D\left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T[x^0(t)]^2\,dt\right\}+D\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T x^0(t)\,dt\right]^2-2K_1, \tag{11}$$

где K_1 — смешанный центральный момент первого и второго членов в выражении (7):

$$K_1=M\left\{\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T[x^0(t)]^2\,dt-R(0)\right]\left[\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T x^0(t)\,dt\right)^2-D(M^*x)\right]\right\}. \tag{12}$$

Первый член в выражении (11) — дисперсия оценки $R^*(0)$ при $Mx=0$ (10). Учитывая, что при нормальном распределении $x(t)$ величина $\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T x^0(t)\,dt$ также распределена нормально со средним 0 и дисперсией $D[M^*x]$, получим

$$D\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T x^0(t)\,dt\right]^2=M\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T x^0(t)\,dt\right]^4-D^2(M^*x)=$$

$$=3D^2(M^*x)-D^2(M^*x)=2D^2(M^*x). \tag{13}$$

Момент K_1 (12) имеет величину $8\sigma^4\left(\dfrac{\tau_0}{T}\right)^2$, и если учесть, что $\tau_0/T\ll 1$ ($\tau_0/T=10^{-2}\div 10^{-3}$), то величиной его по сравнению с $D[R_0^*(0)]$ (10) вполне можно пренебречь.

Тогда, учитывая (9)—(11) и (13), получаем окончательно $D[R^*(0)] = D[R_0^*(0)] + 2D^2(M^*x) \approx D[R_0^*(0)]$, так как $\dfrac{D^2[M^*x]}{D[R_0^*(0)]} \approx \dfrac{\tau_0}{T}$. Очевидно, что при расчете среднего и корреляционной функции по одной и той же реализации наличие $Mx \neq 0$ практически не приводит к увеличению статистической погрешности. В этом случае, как мы видели, центрирование до вычисления $\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)\,x(t+\tau)\,dt$ или учет M^*x в конце вычислений равноценны по статистической точности. На практике, в силу других причин, это не так. Наличие большого значения $Mx > \sigma$ сужает динамический диапазон и приводит в цифровых корреляторах к увеличению погрешности амплитудного квантования, в аналоговых — погрешности выполнения операций.

Однако в цифровых корреляторах погрешность амплитудного квантования все-таки, как правило, незначительна, так что центрирования на входе может не производиться. В то же время значительно проще реализовать коррелятор, работающий с сигналами одной полярности, т. е. с таким Mx, что $x^0(t) + Mx \geqslant 0$, нежели коррелятор, рассчитанный на сигналы обоих знаков.

Статистическая погрешность оценки $R^*(\tau)$ при вычислении среднего и корреляционной функции по неперекрывающимся реализациям. В этом случае алгоритмы (3) и (4) дают различные результаты. При расчете, согласно алгоритму (4),

$$R_{\text{II}}^*(0) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T [x_1^0(t) + Mx]^2\,dt - \left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T [x_2^0(t) + Mx]\,dt\right\}^2, \tag{14}$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соответствуют различным реализациям одного и того же процесса $x(t)$. Математическое ожидание оценки $R_{\text{II}}^*(0)$ (14), как легко показать, равно (8). Дисперсия $R_{\text{II}}^*(0)$, в силу независимости первого и второго членов (14), равна сумме их дисперсий:

$$D[R_{\text{II}}^*(0)] = D\left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T [x^0(t) + Mx]^2\,dt\right\} + D\left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T [x^0(t) + Mx]\,dt\right\}^2 = D_1 + D_2. \tag{15}$$

Первый член D_1 равен

$$D_1 = D\left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T [x^0(t)]^2\,dt\right\} + 4(Mx)^2 D\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T x^0(t)\,dt\right] + 4\,Mx\,K_2 \approx$$

$$\approx D[R_0^*(0)] + 4(Mx)^2 D\,(M^*x). \tag{16}$$

Второй член, как можно показать, учитывая (13) и то, что $M\left[\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T x^0(t)\,dt\right]^3 = 0$, равен

$$D_2 = 2\,D^2(M^*x) + 4\,M^2xD(M^*x) \approx 4(Mx)^2 D(M^*x). \tag{17}$$

Тогда с учетом (15)—(17)

$$D[R^*(0)] \approx D[R_0^*(0)] + 8\,(Mx)^2\,D\,(M^*x). \tag{18}$$

Относительная погрешность составляет

$$\delta^2 = \frac{D[R^*(0)]}{R^2(0)} = \frac{D[R_0^*(0)]}{\sigma^4} + 8\left(\frac{Mx}{\sigma}\right)^2 \frac{D(M^*x)}{\sigma^2}. \tag{19}$$

Если принять во внимание, что при $\tau_0/T \ll 1$ $D[R_0^*(0)]$ определяется выражением (10), а $D(M^*x)$ — (9), то (19) перепишем так:

$$\delta^2 \approx \frac{4\int\limits_0^\infty \rho^2(\tau)\,d\tau}{T} + \frac{16}{T}\left(\frac{Mx}{\sigma}\right)^2 \int\limits_0^\infty \rho(\tau)\,d\tau. \tag{20}$$

Первый член в (20) определяет δ_0^2 при $Mx=0$. При $M x \neq 0$ δ возрастает, как видно из (20), в отношении

$$\frac{\delta^2}{\delta_0^2} = 1 + 4\left(\frac{M x}{\sigma}\right)^2 \frac{\int\limits_0^\infty \rho(\tau)\, d\tau}{\int\limits_0^\infty \rho^2(\tau)\, d\tau} > 1 + 4\left(\frac{M x}{\sigma}\right)^2. \tag{21}$$

Более точно для $\rho(\tau) = \exp(-\alpha\tau)$:

$$\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^2 = 1 + 8\left(\frac{M x}{\sigma}\right)^2. \tag{22}$$

Если Mx таково, что $x(t) \geqslant 0$, т. е. $M x \geqslant 3\sigma$, то $\delta/\delta_0 \geqslant 8{,}5$. Если $\delta_0 = 3\%$, то $\delta > 25\%$. Очевидно, что подобное увеличение статистической погрешности недопустимо. Поэтому необходимо производить хотя бы грубое центрирование на входе, добиваясь, например, $M x/\sigma < 0{,}5$. При этом $\delta/\delta_0 \leqslant 1{,}7$. Алгоритм (2), когда центрирование производится в начале вычисления $R^*(\tau)$, обеспечивает более высокую точность. Действительно, в этом случае оценка

$$R_{\text{II}}^*(0) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left\{x_1^0(t)\, dt + M x - \frac{1}{T}\int\limits_0^T [x_2^0(t) + M x]\, dt\right\}^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left[x_1^0(t) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T x_2^0(t)\, dt\right]^2 dt \tag{23}$$

не зависит от Mx. Нетрудно показать, что

$$D\, R_{\text{II}}^*(0) = D\left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T [x_1^0(t)]^2\, dt + \left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T x_2^0(t)\, dt\right]^2 - \frac{2}{T}\int\limits_0^T x_1^0(t)\, dt \times\right.$$

$$\left.\times \frac{1}{T}\int\limits_0^T x_2^0(t)\, dt\right\} = D\,[R_0^*(0)] + 2\,D^2(M^* x) + 4\,D^2(M^* x) \approx D\,[R_0^*(0)],$$

т. е. статистическая погрешность практически не возрастает по сравнению со случаем $Mx=0$. Если же реализации перекрываются частично на интервале τ, причем $\frac{\tau}{T} \ll 1$, то возрастание статистической погрешности пропорционально $\frac{\tau}{T}\,\frac{M x}{\sigma}$ и при $\frac{\tau}{T} \ll 1$ им можно пренебречь.

Заключение. При расчете среднего значения и второго момента по одной реализации выбор алгоритма (3) или (4) не имеет существенного значения, так как статистические погрешности в обоих случаях одинаковы и практически те же, что и для центрированных случайных процессов. Это позволяет строить более простую аппаратуру для работы только с однополярными сигналами. Однако при использовании алгоритма (4) возрастают другие составляющие суммарной погрешности вычислений. При расчете же среднего значения и второго момента по различным реализациям статистическая погрешность существенно зависит от того, будет ли производиться центрирование перед вычислением второго момента. Когда центрирование производится в конце, статистическая погрешность возрастает пропорционально среднему и может быть очень значительной. Очевидно, что в этом случае необходимо хотя бы грубо центрировать процесс перед вычислением второго момента. Полученные в работе соотношения позволяют оценить указанную погрешность. Очевидно также, что корреляторы без накопления должны быть рассчитаны на обработку сигналов разной полярности.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. B. Davenport, R. A. Johnson and D. Middlton. Statistical Errors in Measurements on Random Time Functions.— Journ. Appl. Phys., 1952, № 4.
2. Б. Н. Кутин. О вычислении корреляционной функции случайного процесса по экспериментальным данным.— Автоматика и телемеханика, 1957, № 3.
3. Н. А. Лившиц, В. С. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления, т. I. М., «Советское радио», 1963.

Поступило в редакцию
14 апреля 1969 г.