

Е. Е. ДОБРОВ, В. И. НИКУЛИН
 (Новосибирск)

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА КОМПЕНСАЦИОННО-МОСТОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ

Одной из основных областей применения компенсационно-мостовых цепей с прямым уравниванием [1] является измерение быстропеременных параметров и регистрация скоростных процессов. Поэтому большое значение имеет изучение динамики таких цепей. Поскольку распространение получили компенсационно-мостовые цепи с использованием как широкополосных, так и резонансных уравнивающих усилителей, причем цепи с широкополосными усилителями обычно отличаются высоким быстродействием, а для цепей с резонансными усилителями характерна более высокая статическая точность, то представляет интерес анализ динамических свойств цепей обоих видов. Применительно к наиболее распространенной емкостной компенсационно-мостовой цепи с резонансным усилителем частотные характеристики, необходимые для указанного анализа, были получены в [2]; ниже выведены математические выражения амплитудно- и фазочастотной характеристик той же цепи с широкополосным усилителем и произведена сравнительная оценка быстродействия и динамической точности этих двух видов компенсационно-мостовых цепей.

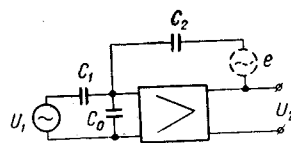


Рис. 1.

Принципиальная схема рассматриваемой цепи приведена на рис. 1 [3]. Здесь датчик, представляющий собой плоский конденсатор с емкостью C_2 , включен в цепь отрицательной обратной связи усилителя напряжения с большим коэффициентом усиления K_0 . Конденсатор C_1 является образцовым. Конденсатор C_0 включает в себя емкость соединительного кабеля, приведенную с помощью специального экранирования ко входу усилителя. В статическом режиме ($C_2 = C_{20}$) имеем

$$\dot{U}_2 = -U_1 \frac{C_1}{d} \delta_{20} \frac{1}{1 + \gamma}, \quad (1)$$

где $\gamma = \frac{1}{K_0} \left[1 + \frac{C_1}{C_2} + \frac{C_0}{C_2} \right]$ — погрешность статизма; d — коэффициент, зависящий от параметров датчика, а δ_{20} — расстояние между пластинами датчика. В динамическом режиме датчик можно представить в виде параллельного соединения двух конденсаторов, один из которых имеет постоянную начальную емкость C_{20} , а другой — емкость δC_2 , изменя-

ющуюся в соответствии с исследуемым процессом за счет перемещения δ_2 одной из пластин датчика по отношению к начальному положению δ_{20} (это изменение вызывает появление огибающей выходного напряжения \dot{U}_2). При получении математических соотношений, характеризующих исследуемый процесс, для преодоления трудностей, обусловленных необходимостью решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, в наиболее часто встречающемся на практике случае малых изменений емкости ($\delta C_2 \ll C_{20}$) удобно воспользоваться принципом суперпозиции, выражая часть выходного напряжения цепи, определяющую изменение емкости δC_2 , как результат воздействия э. д. с. \dot{E} некоторого источника (изображен на рис. 1 штрихами) на цепь с постоянными параметрами. В соответствии с этим подходом [2] э. д. с. \dot{E} должна быть равна

$$\dot{E} = - \dot{I}_{20} \frac{\delta_2}{\omega d},$$

где \dot{I}_{20} — начальный ток через датчик; ω — круговая частота генератора. Сказанное выше справедливо при $\omega \gg \Omega$, где Ω — круговая частота исследуемого перемещения. Обычно при дистанционных измерениях $C_0 \gg C_1, C_2$; в этом случае расчет рассматриваемой цепи при постоянной емкости датчика C_{20} дает

$$\dot{I}_{20} = - \dot{U}_1 \omega C_1 \frac{1}{1 + \gamma}.$$

На основании двух последних соотношений можно записать

$$\dot{E} = \dot{U}_1 \frac{C_1}{d} \frac{\delta_2}{1 + \gamma}. \quad (2)$$

Реакция рассматриваемой цепи на воздействие э. д. с. \dot{E} при отсутствии напряжения \dot{U}_1 всецело определяется при этом передаточной функцией $L(p)$, которая при нулевых начальных условиях равна [2]

$$L(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K(p)} \left[1 + \frac{C_1}{C_2} + \frac{C_0}{C_2} \right]}, \quad (3)$$

где $K(p)$ — передаточная функция усилителя.

В компенсационно-мостовых приборах обычно применяются усилители переменного напряжения с одним усилительным каскадом [4], так как в этом случае сравнительно просто обеспечивается устойчивость измерительной цепи. Передаточная функция однокаскадного широкополосного усилителя имеет вид [5]

$$K(p) = K \frac{\frac{1}{\tau_1} p}{p^2 + \frac{1}{\tau_1} p + \frac{1}{\tau_1 \tau_2}},$$

где τ_1 и τ_2 — постоянные времени, K — коэффициент усиления на текущей частоте, близкий по значению к коэффициенту усиления на рабочей частоте, ранее обозначенному через K_0 . Подстановка последнего выражения в (3) после преобразований с заменой $\frac{1}{K} \left[1 + \frac{C_1}{C_2} + \frac{C_0}{C_2} \right]$ на γ дает

$$L(p) = \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{1}{\tau_1} p}{p^2 + \frac{1}{\tau_1} \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) p + \frac{1}{\tau_1 \tau_2}}. \quad (4)$$

Поскольку нас интересует лишь огибающая выходного напряжения, целесообразно использовать для определения указанной реакции метод огибающих, развитый применительно к избирательным системам С. И. Евтяновым и распространенный на апериодические системы А. А. Ризкиным. Найдем сначала переходную амплитуду $A(t)$, представляющую собой огибающую выходного напряжения при единичном скачке амплитуды э. д. с. эквивалентного источника. Следуя [6], имеем

$$A(t) = h(0) + \int_0^t h'(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (5)$$

где $h(t)$ — переходная функция, соответствующая оператору $L(p)$. Для отыскания $h(t)$ упростим выражение (4), разложив его знаменатель на множители. Корни знаменателя определяются следующим образом:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2\tau_1} \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau_1^2} \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{\tau_1 \tau_2}}.$$

Для широкополосных усилителей характерно соотношение $\tau_2 \gg \tau_1$, что и определяет широкую полосу пропускания. Учитывая к тому же, что $\gamma \ll 1$, можно опустить в последующем выражении член $\frac{1}{\tau_1 \tau_2}$. Тогда один из корней знаменателя окажется равным нулю и выражение (4) примет вид

$$L(p) = \frac{1}{\gamma \tau_1} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_1} \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)}. \quad (6)$$

Найденная из таблиц, переходная функция, соответствующая оператору (6), выражается формулой

$$h(t) = \frac{1}{1 + \gamma} \left[1 - e^{-\frac{1}{\tau_1} \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) t}\right]. \quad (7)$$

Учитывая, что $h(0) = 0$, и подставляя производную выражения (7) в (5), получим после интегрирования

$$A(t) = \frac{1}{\gamma \tau_1} \frac{1}{j\omega + \frac{1}{\tau_1} \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)} \left[1 - e^{-\left[\frac{1}{\tau_1} \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) + j\omega\right] t}\right]. \quad (8)$$

Выражение (8) дает закон изменения во времени комплексной амплитуды выходного напряжения цепи \dot{U}_2 при условии, что изменение амплитуды э. д. с. \dot{E} задается единичной функцией**. С помощью (8)

* Принятое допущение означает идеализацию передаточной функции (4) в области малых (низких) частот. Физически это выражается, как известно, в идеализации конца переходного процесса, что для систем, работающих в режиме непрерывного изменения исследуемого параметра, не имеет существенного значения.

** Для перехода к реальному масштабу перемещений необходимо умножить (8) на правую часть выражения (2).

легко найти и мгновенное значение выходного напряжения U_2 [6]: $U_2 = \text{Re} [A(t) e^{j\omega t}]$. Однако нас больше интересует переходный процесс, который описывается членом $e^{-\left[\frac{1}{\tau_1} \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) + j\omega\right] t}$ и представляет собой гармонические колебания рабочей частоты с экспоненциально убывающей амплитудой. Как и следовало ожидать, по окончании переходного процесса (при $t \rightarrow \infty$) переходная амплитуда выражается оператором $L(j\omega)$. Затухание переходного процесса определяется постоянной времени $T = \frac{\tau_1 \gamma}{1 + \gamma}$. Последнее позволяет связать время установления показаний t_y с основными параметрами устройства. Действительно, из известного соотношения $t_y = -T \ln \Delta$, где Δ — необходимая точность установления показаний, с учетом того, что для широкополосных усилителей $\tau_1 = 1/2 \pi f_{гр}$, где $f_{гр}$ — граничная частота усиления, получаем

$$t_y = - \frac{\gamma \ln \Delta}{2 \pi f_{гр} (1 + \gamma)} \quad (9)$$

Выражение (9) позволяет весьма просто определить быстродействие компенсационно-мостового устройства, если известны погрешность статизма измерительной цепи и граничная частота усилителя. Например, для точности установления $\Delta = 1\%$, $\gamma = 3 \cdot 10^{-3}$ и $f_{гр} = 10^5$ гц имеем $t_y = 2 \cdot 10^{-8}$ сек.

Для нахождения частотных характеристик необходимо определить реакцию рассматриваемой цепи на синусоидальное входное воздействие. Это легко сделать, применив к (8) теорему Дюамеля для огибающих. Пусть относительное изменение амплитуды входного воздействия имеет вид

$$E(t) = m \sin \Omega t, \quad (10)$$

где m — коэффициент глубины модуляции; Ω — круговая частота исследуемого перемещения. Запишем интеграл Дюамеля для огибающей в форме [6]

$$F(t) = A_{(0)} E(t) + \int_0^t A'(\tau) E(t - \tau) d\tau, \quad (11)$$

где $F(t)$ — комплексная амплитуда выходного напряжения. Подставив производную выражения (8) в (11) и учитывая, что $A(0) = 0$, получим

$$F(t) = \frac{m}{\tau \gamma} \int_0^t e^{(1 + j\omega T) \frac{\tau}{T}} \sin \Omega (t - \tau) d\tau.$$

Здесь T соответствует ранее принятому обозначению. Последнее выражение после интегрирования принимает вид

$$F(t) = \frac{m}{1 + \gamma} \frac{1}{(1 + j\omega T)^2 + \Omega^2 T^2} [(1 + j\omega T) \sin \Omega t - \Omega t \cos \Omega t]. \quad (12)$$

Выражение (12) представляет собой комплексную амплитуду выходного напряжения цепи для случая синусоидального входного воздействия. Собственно огибающая выходного напряжения равна, очевидно, модулю комплексной амплитуды

$$|F(t)| = \frac{m}{1 + \gamma} \sqrt{\frac{(1 + \Omega^2 T^2) \sin^2(\Omega t - \arctg \Omega t) + \omega^2 T^2 \sin^2 \Omega t}{(1 - \omega^2 T^2 + \Omega^2 T^2)^2 + 4 \omega^2 T^2}}.$$

Оценим величину членов $\omega^2 T^2$ и $\Omega^2 T^2$. Учитывая, что $\tau_1 = \frac{1}{\omega_{гр}}$, получим $\omega T = \frac{\omega}{\omega_{гр}} \frac{\gamma}{1+\gamma}$ и $\Omega T = \frac{\Omega}{\omega_{гр}} \frac{\gamma}{1+\gamma}$ (здесь $\omega_{гр}$ — круговая граничная частота усилителя). Обычно $\pi < \omega < \omega_{гр}$, а $\gamma < 10^{-2}$. Таким образом, пренебрежение членами, содержащими $\omega^2 T^2$ и $\Omega^2 T^2$, по сравнению с единицей, приводит к погрешности, не превышающей сотых долей процента. При этом последнее выражение существенно упрощается:

$$|F(t)| = \frac{m}{1+\gamma} \sin(\Omega t - \Omega T). \quad (13)$$

Соотношение (13) характеризует относительное изменение огибающей напряжения измерительной цепи. В этом нетрудно убедиться, записав (13) в реальном масштабе с помощью (2) и отнеся результат к начальной амплитуде выходного напряжения, определяемой выражением (1).

Сопоставление выражений (10) и (13) позволяет записать частотные характеристики рассматриваемой цепи по относительным огибающим для случая применения широкополосного усилителя в виде:

$$M_{ш} = \frac{1}{1+\gamma}; \quad \eta_{ш} = -T\Omega, \quad (14)$$

где $M_{ш}$ и $\eta_{ш}$ — соответственно амплитудно- и фазочастотная характеристики. Выражения (14) показывают, что при принятых допущениях рассматриваемая компенсационно-мостовая цепь представляет собой неискажающий четырехполюсник. Это и определяет исключительную перспективность использования компенсационно-мостовых приборов с широкополосными усилителями для воспроизведения и записи скоростных процессов.

Как уже указывалось, в [2] были получены соответствующие частотные характеристики рассматриваемой цепи для случая применения резонансного усилителя. Они имеют следующий вид:

$$M_p = (1-\gamma) \left(1 - 2 \frac{\gamma^2}{\delta^2 (1+\gamma)^2} - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right);$$

$$\eta_p = -2 \frac{\gamma}{\delta(1+\gamma)} \frac{\Omega}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right). \quad (15)$$

где M_p и η_p — соответственно амплитудно- и фазочастотная характеристики; δ и ω_0 — затухание и резонансная частота контура, служащего нагрузкой усилительного каскада.

Произведем сравнительную количественную оценку быстродействия и динамической точности рассматриваемой цепи при использовании широкополосного и резонансного усилителей, основываясь на соотношениях (14) и (15).

В качестве характеристики быстродействия удобно принять время запаздывания, которое возникает в устройствах обоих типов при идеальном воспроизведении формы одного и того же сигнала, например прямоугольного импульса длительностью t_n . Предположим, что частотный спектр импульса ограничен интервалом $[0, 10\Omega]$, где $\Omega = \frac{2\pi}{t_n}$. Система с широкополосным усилителем воспроизводит этот импульс без искажений. Условием воспроизведения формы импульса без иска-

жений для системы с резонансным усилителем является [2] $\frac{10\Omega}{\omega_0} \leq 0,1$.

Поэтому круговая резонансная частота должна быть выбрана в соответствии с формулой $\omega_0 \geq 100\Omega$. Например, если $t_n = 10^{-3}$ сек, то ω_0 должна быть не менее $2\pi \cdot 10^5$ сек $^{-1}$. При таком выборе рабочей частоты фазочастотная характеристика (15) представляет собой прямую линию

$$\eta_p = -2 \frac{\gamma}{\delta(1+\gamma)} \frac{\Omega}{\omega_0}. \quad (16)$$

Известно, что время запаздывания определяется как производная фазочастотных характеристик (14) и (16) по частоте Ω , взятая с обратным знаком. Поэтому для времен запаздывания системы с широкополосным усилителем $t_{ш}$ и системы с резонансным усилителем t_p имеем соответственно:

$$t_{ш} = T = \frac{\gamma}{\omega_{rp}(1+\gamma)}; \quad t_p = 2 \frac{\gamma}{\delta(1+\delta)} \frac{1}{\omega_0}. \quad (17)$$

Как уже отмечалось, погрешность статизма $\gamma_{ш}$ в цепях с широкополосными усилителями в несколько раз больше, чем та же погрешность в цепях с резонансными усилителями. Легко достижимыми практически являются следующие значения параметров: $\gamma_p = 10^{-3}$, $\gamma_{ш} = 3 \cdot 10^{-3}$, $\omega_{rp} = \omega_0 = 2\pi \cdot 10^5$ гц; при этом вычисления по формулам (17) дают: $t_{ш} = 4,8 \cdot 10^{-9}$ сек; $t_p = 3,2 \cdot 10^{-7}$ сек. Таким образом, быстродействие системы с широкополосным усилителем при этих условиях оказывается выше, чем у системы с резонансным усилителем, почти в 70 раз.

Удобной характеристикой точности системы является частотная зависимость ее среднеквадратичной погрешности, которую, следуя [7], можно записать в виде

$$\lambda = \sqrt{M^2 - 2M \cos \eta + 1}, \quad (18)$$

где M и η — соответственно амплитудно- и фазочастотная характеристики измерительного устройства. Подставив в (18) выражения (14) и (15), после преобразований получим, пренебрегая членами высших порядков малости, весьма простые формулы для определения погрешностей $\lambda_{ш}$ системы с широкополосными и λ_p системы с резонансными усилителями:

$$\lambda_{ш} = \gamma_{ш} \sqrt{1 + \frac{\Omega^2}{\omega_{rp}^2}}; \quad \lambda_p = \gamma_p \sqrt{1 + 4 \frac{\Omega^2}{\delta^2 \omega_0^2}}. \quad (19)$$

Выражения (19) представляют собой зависимости среднеквадратичной погрешности соответствующих устройств от частоты синусоидального входного воздействия. Графики этих зависимостей, соответствующие приведенным выше значениям $\gamma_{ш}$, γ_p , ω_{rp} , ω_0 , представлены на рис. 2. Как и следовало ожидать, погрешность системы с широкополосным усилителем почти не зависит от частоты воспроизводимого сигнала, тогда как погрешность системы с резонансным усилителем резко нарастает, начиная с некоторого значения частоты.

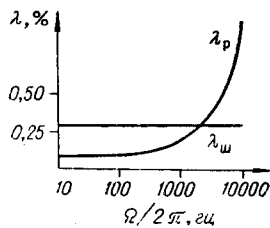


Рис. 2.

С помощью графиков, представленных на

рис. 2, могут быть определены динамические погрешности Δ рассматриваемых систем для периодических входных воздействий произвольной формы (см. вывод формулы (2) приложения):

$$\Delta = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k \lambda_k}, \quad (20)$$

где a_k — вес k -й гармоники входного воздействия; λ_k — среднеквадратичная погрешность системы на частоте k -й гармоники. В качестве примера определим указанные погрешности для двух периодических сигналов: 1) треугольного, спектр которого, ограниченный на уровне 10%, содержит лишь первую и третью гармоники с весами соответственно $a_1 = 1$ и $a_3 = 1$; 2) прямоугольного, аналогичный спектр которого содержит нечетные гармоники вплоть до девятой с весами: $a_1 = 1$; $a_3 = \frac{1}{3}$; $a_5 = \frac{1}{5}$; $a_7 = \frac{1}{7}$; $a_9 = \frac{1}{9}$. Находя соответствующие

значения λ_k из приведенного графика, после вычислений по формуле (20) получим значения погрешностей, сведенные в таблицу. Из таблицы видно, что при принятых значениях параметров для воспроизведения узкополосного прямоугольного воздействия целесообразно использовать систему с резонансным усилителем, тогда как система с широкополосным усилителем оказывается более пригодной для воспроизведения широкополосного прямоугольного сигнала.

Вид входного воздействия	Динамическая погрешность в %	
	резонансный усилитель	широкополосный усилитель
Прямоугольное	0,46	0,3
Треугольное	0,22	0,3

Проведенная сравнительная оценка показывает, что наряду с весьма перспективными компенсационно-мостовыми приборами с использованием широкополосных уравнивающих усилителей, обладающими высоким быстродействием, целесообразно применять и компенсационно-мостовые приборы с резонансными усилителями, которые в ряде случаев позволяют получить более высокую точность измерения.

В заключение авторы выражают признательность кандидату технических наук К. М. Соболевскому за постановку задачи и ценные замечания, высказанные им в процессе обсуждения настоящей работы.

Приложение

Покажем, что, имея частотную зависимость динамической погрешности устройства, можно определить динамическую погрешность, которой будет обладать это устройство при воспроизведении периодического сигнала произвольной формы.

Пусть исследуемый сигнал B задан рядом Фурье

$$B = B_1 \sum_{k=1}^n a_k \cos k(\omega t - \varphi_k),$$

где B_1 — амплитуда первой гармоники; a_k — вес k -й гармоники по отношению к первой. Тогда выходной сигнал D устройства определится как

$$D = B_1 \sum_{k=1}^n M_k a_k \cos k(\omega t - \varphi_k - \eta_k),$$

где M_k и η_k — значения амплитудно- и фазочастотной характеристик на частоте k -й гармоники. Определяя динамическую погрешность в соответствии с [7], имеем

$$\Delta = \frac{1}{B_1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (D - B)^2 d\omega t \right]^{1/2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^n a_k [M_k \cos k(\omega t - \varphi_k - \eta_k) - \cos k(\omega t - \varphi_k)] \right\}^2 d\omega t}.$$

Возведя в квадрат фигурные скобки, из последнего выражения получим

$$\Delta = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n a_k^2 [M_k \cos k(\omega t - \varphi_k - \eta_k) - \cos k(\omega t - \varphi_k)]^2 d\omega t + \right.$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^n \sum_{l=1}^n a_k a_l [M_k \cos k(\omega t - \varphi_k - \eta_k) - \cos k(\omega t - \varphi_k)] \times$$

$$\left. \times [M_l \cos l(\omega t - \varphi_l - \eta_l) - \cos l(\omega t - \varphi_l)] d\omega t \right\}^{1/2}. \quad (1)$$

Второй интеграл выражения (1) тождественно равен нулю. Действительно, открывая квадратные скобки под знаком интеграла и заменяя произведения косинусов косинусами суммы, приходим к тому, что этот интеграл представляется суммой интегралов от периодической функции за целое число периодов (k, l — целые числа). Учитывая это обстоятельство и меняя местами знак интеграла и суммы в первом слагаемом выражения (1), имеем

$$\Delta = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} [M_k \cos k(\omega t - \varphi_k - \eta_k) - \cos k(\omega t - \varphi_k)]^2 d\omega t}.$$

Поскольку интеграл подкоренного выражения представляет собой квадрат среднеквадратичной погрешности устройства λ_k на частоте k -й гармоники, то

$$\Delta = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 \lambda_k^2}. \quad (2)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Б. Гриневич, А. Л. Грохольский, Е. Е. Добров, К. Б. Карандеев, В. И. Никулин, К. М. Соболевский. Автоматические компенсационно-мостовые электронные устройства для измерения комплексных сопротивлений. — ЭИКА, вып. 12, М., «Энергия», 1969.
2. Е. Е. Добров, В. И. Никулин. К анализу динамики самоуравновешиваемых компенсационно-мостовых измерительных цепей переменного тока. — Материалы IX Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений. Новосибирск, 1969.
3. Ф. Б. Гриневич, Е. Е. Добров, В. И. Никулин. Мостовой автокомпенсационный измеритель зазоров между ротором и статором турбомашин. — Автометрия, 1966, № 5.
4. С. М. Казаков, В. И. Никулин. Усилитель с отрицательной обратной связью как элемент уравновешиваемых измерителей комплексных величин. — Автометрия, 1969, № 1.
5. И. И. Теумин. Справочник по переходным электрическим процессам. М., Связьиздат, 1951.
6. А. А. Ризкин. Основы теории усилительных схем. М., «Советское радио», 1958.
7. R. N. Halst. Dynamic accuracy and error in analog computations. — IEEE Trans. on Electronic Computers, 1963, № 3.

Поступила в редакцию
26 сентября 1969 г.