

МЕТОДЫ И СРЕДСТВА АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ

УДК 681.2.08

В. М. ЕФИМОВ, И. И. КОРШЕВЕР, В. И. РАБИНОВИЧ, С. А. ТИМОХИН
(Новосибирск)

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ЦИФРОВЫХ ПРИБОРОВ ВРЕМЯ-ИМПУЛЬСНОГО ТИПА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

В работе исследуются точностные характеристики цифровых приборов время-импульсного типа, измеряющих среднее, средневыпрямленное и действующее значения периодических напряжений.

Принцип действия приборов. Принцип действия рассматриваемых приборов основан на формировании функций

$$X(t) = \frac{\text{Sgn}[u(t) - u_{\text{оп}}(t)] + \text{Sgn} u_{\text{оп}}(t)}{2}$$

в случае измерения среднего и $|X(t)|$ в случае измерения средневыпрямленного или действующего значений напряжения $u(t)$ и последующем интегрировании этих функций в интервале $[t_0, t_0 + T_0]$. Здесь

$$\text{Sgn } v = \begin{cases} 1; & v > 0; \\ 0; & v = 0; \\ -1; & v < 0; \end{cases}$$

$u_{\text{оп}}(t)$ — опорное напряжение с периодом повторения T_0 ; t_0 — момент начала развертки опорного напряжения. Функцией $X(t)$ описывается последовательность в общем случае разнополярных прямоугольных импульсов одинаковой высоты, сформированных по моментам пересечения сигнала $u(t)$ с напряжением $u_{\text{оп}}(t)$ (см. рис. 1, где $u(t) > 0$, $u_0 = 0$).

При измерении среднего u_c и средневыпрямленного $u_{\text{св}}$ значений сигнала на напряжение $u_{\text{оп}}(t)$ имеет вид $u_{\text{оп}}(t) = u_0 + (t - t_0) \text{tg } \varphi$,

где u_0 — начальный уровень опорного напряжения; $\text{tg } \varphi$ — скорость изменения опорного напряжения.

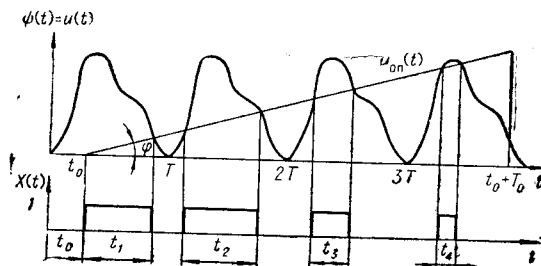


Рис. 1.

Результат измерения среднего значения u_c^* можно представить как

$$u_c^* = \operatorname{tg} \varphi \int_{t_0}^{t_0 + T_0} X(t) dt.$$

При измерении среднев्यпрямленного значения имеем

$$u_{св}^* = \operatorname{tg} \varphi \int_{t_0}^{t_0 + T_0} |X(t)| dt.$$

В случае измерения действующего значения u_d сигнала $u(t)$ опорное напряжение описывается выражением*

$$u_{оп}(t) = k \sqrt{t - t_0}.$$

Результат измерения при этом выражается следующим образом:

$$u_d^* = k \left(\int_{t_0}^{t_0 + T_0} |X(t)| dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Функции $X(t)$ и $|X(t)|$ легко реализуются с помощью пороговых функций $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2$ таких, что

$$x_1 = \begin{cases} 1; & u(t) - u_{оп}(t) \geq 0; \\ 0; & u(t) - u_{оп}(t) < 0; \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} 1; & u_{оп}(t) \geq 0; \\ 0; & u_{оп}(t) < 0; \end{cases}$$

$\bar{x}_1 = 1 - x_1, \bar{x}_2 = 1 - x_2$ — логические инверсии функций x_1 и x_2 , обычно получаемые на выходе пороговых элементов (устройств сравнения) одновременно с x_1, x_2 . Действительно, $X(t)$ и $|X(t)|$ можно представить в виде

$$x(t) = x_1 x_2 - \bar{x}_1 \bar{x}_2; \quad |x(t)| = x_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2.$$

Блок-схема прибора, измеряющего все указанные характеристики периодических сигналов, приведена на рис. 2. Здесь 1 — генератор опорного напряжения $u_{оп}(t)$; 2 и 3 — устройства сравнения; 4 и 5 — схемы

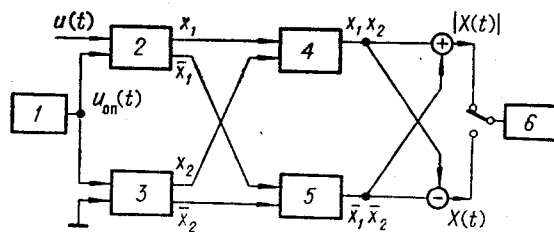


Рис. 2.

совпадения; 6 — измеритель интервалов времени, основанный на подсчете числа импульсов образцовой частоты, укладывающихся в измеряемом интервале (при измерении действующего значения устройство 6 осуществляет и извлечение квадратного корня из числа импульсов в полученной импульсной последовательности).

Анализ погрешности. В [1] высказывались некоторые соображения относительно погрешностей рассматриваемого метода, однако недостаточная корректность постановки задачи не позволила сделать сколь угодно определенных выводов. В данной работе осуществляется попытка восполнить этот пробел.

* В [1] приведены другие возможные модификации формы опорного напряжения.

При исследовании погрешностей, присущих рассматриваемому методу измерения, будем исходить из предположения, что погрешность определения временных интервалов пренебрежимо мала.

1. *Предельные значения погрешности.* Верхнюю и нижнюю оценки погрешности измерения интегральных характеристик, справедливые для любых периодических сигналов, можно получить, используя схему интегрирования по Лебегу. Процедура измерения интегральных характеристик эквивалентна приближенному вычислению интеграла

$$\frac{1}{T} \int_0^T \psi(t) dt,$$

где

$$\psi(t) = \begin{cases} u(t) & \text{в случае измерения среднего значения;} \\ |u(t)| & \text{при измерении средневыпрямленного значения;} \\ u^2(t) & \text{в случае измерения действующего значения;} \end{cases}$$

T — период напряжения $u(t)$. Интеграл $\int_0^T \psi(t) dt$ заменяется суммой

площадей прямоугольников, построенных таким образом, что высота их постоянна и равна $q = T \operatorname{tg} \varphi$, а основание каждого из них ограничивается моментами пересечения сигнала с наклонными уровнями (рис. 3).

Результат измерения: $\bar{z} = \frac{1}{T} \sum_i q t_i$.

Путем несложных рассуждений можно убедиться, что от схемы с наклонными уровнями* можно перейти к схеме с горизонтальными уровнями (рис. 4), если рассматривать приближенное интегрирование по Лебегу не $\psi(t)$, а функции $g(t) = \psi(t) - t \operatorname{tg} \varphi$. Действительно, при этом переходе результат измерения \bar{z} остается прежним, так как высоты и основания прямоугольников не изменяются.

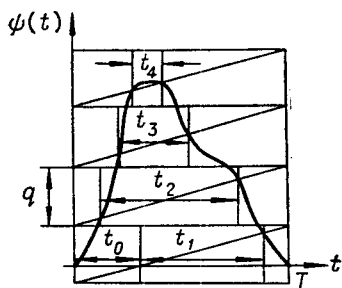


Рис. 3.

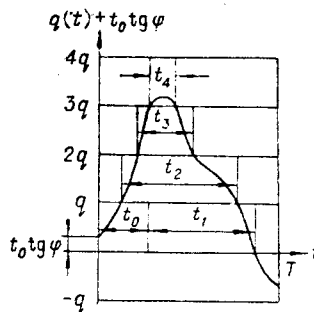


Рис. 4.

В схеме с горизонтальными уровнями результат измерения \bar{z} равен разности поделенной на период сигнала верхней интегральной суммы S для функции $g(t) + t_0 \operatorname{tg} \varphi$ и величины $t_0 \operatorname{tg} \varphi$, так как один из временных интервалов всегда ограничивается точкой пересечения t_0 опорного напряжения с осью времени и соседней точкой пересечения опорного напряжения с сигналом, и величина $t_0 \operatorname{tg} \varphi$ в результате измерения \bar{z} отсутствует.

* Схема измерения действующего значения напряжения $u(t)$ эквивалентна схеме, в которой временные интервалы образуются пересечением квадрата напряжения $u^2(t)$ с изменяющимся линейно опорным напряжением.

Следовательно, результат измерения можно записать следующим образом:

$$\bar{z} = \frac{1}{T} S - t_0 \operatorname{tg} \varphi.$$

Для разности между интегральной суммой S и интегралом от функции $g(t) + t_0 \operatorname{tg} \varphi$ справедливы неравенства [2]

$$Tq \geq S - \int_0^T (g(t) + t_0 \operatorname{tg} \varphi) dt \geq 0.$$

Используя эти неравенства и предыдущее соотношение, получим значение предельных погрешностей результата измерения

$$-0,5q \leq \Delta = \bar{z} - \frac{1}{T} \int_0^T \psi(t) dt \leq 0,5q.$$

Отсюда следует, что максимальная погрешность измерения интегральных характеристик периодического сигнала произвольной формы рассматриваемым методом не превышает по модулю приращения опорного напряжения на половине периода сигнала.

Отметим, что предельные оценки погрешности измерения не учитывают формы сигнала.

2. *Зависимость погрешности от формы сигнала.* При анализе погрешностей исследуемого метода воспользуемся некоторыми результатами теории квантования по уровню [3]. Рассмотрим аналого-цифровой преобразователь, на вход которого подается сумма значений функции

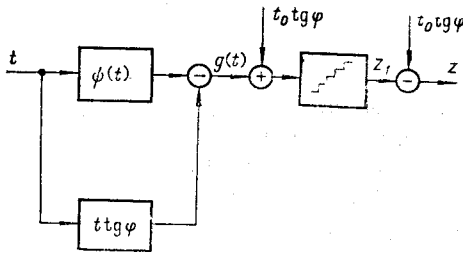


Рис. 5.

$g(t) = \psi(t) - t \operatorname{tg} \varphi$ от случайного аргумента t с равномерным распределением на отрезке $[0, T]$ и величины $t_0 \operatorname{tg} \varphi$ (рис. 5). Если в этом преобразователе производится округление до верхней границы интервала квантования, то математическое ожидание результата преобразования совпадает с верхней интегральной суммой S , деленной на период сигнала. Действительно,

$$\frac{1}{T} S = \sum_{k=1}^{\infty} qp (g(t) + t_0 \operatorname{tg} \varphi \geq (k-1)q),$$

где $p(g(t) + t_0 \operatorname{tg} \varphi \geq (k-1)q)$ — относительное время пребывания функции $g(t) + t_0 \operatorname{tg} \varphi$ выше уровня $(k-1)q$ на периоде T сигнала $u(t)$, или, иначе говоря, вероятность превышения случайной величиной $g(t) + t_0 \operatorname{tg} \varphi$ уровня $(k-1)q$.

Последнее выражение после простых преобразований может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{1}{T} S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kqp (kq \geq g(t) + t_0 \operatorname{tg} \varphi \geq (k-1)q).$$

Но эта величина является математическим ожиданием \bar{z}_1 выхода ана-

лого-цифрового преобразователя с округлением до верхней границы интервала квантования. Математическое ожидание выхода аналого-цифрового преобразователя \bar{z}_1 равно сумме средних значений величины на его входе и ошибки квантования по уровню Δ_1 , т. е.

$$\bar{z}_1 = \frac{1}{T} \int_0^T (\psi(t) - t \operatorname{tg} \varphi + t_0 \operatorname{tg} \varphi) dt + \Delta_1.$$

Так как $\Delta_1 = \Delta + \frac{q}{2}$, где Δ — среднее значение ошибки квантования при округлении до середины интервала квантования, то

$$\bar{z}_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \psi(t) dt + \Delta + t_0 \operatorname{tg} \varphi.$$

В то же время $\bar{z} = \bar{z}_1 - t_0 \operatorname{tg} \varphi$, и, следовательно,

$$\bar{z} = \frac{1}{T} \int_0^T \psi(t) dt + \Delta.$$

Величина Δ , являющаяся методической погрешностью измерения среднего значения функции $\psi(t)$ при фиксированной фазе t_0 , по аналогии с [3] равна

$$\Delta = \frac{q}{2\pi i} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} f\left(\frac{2\pi}{q} k\right) \exp\left\{i 2\pi k \frac{t_0}{T}\right\}. \quad (1)$$

Ее квадрат определяется выражением

$$\Delta^2 = -\frac{q^2}{4\pi^2} \sum_{k, l \neq 0} \frac{1}{kl} f\left(\frac{2\pi}{q} k\right) f\left(\frac{2\pi}{q} l\right) \exp\left\{i 2\pi (k+l) \frac{t_0}{T}\right\}, \quad (2)$$

где $q = T \operatorname{tg} \varphi$ — шаг квантования по уровню; $f\left(\frac{2\pi}{q} n\right)$ — значение характеристической функции $f(v)$ величины $g(t)$ (при $v = \frac{2\pi}{q} n$).

Так как обычно значение фазы t_0 неизвестно, то полезно рассмотреть значения Δ и Δ^2 , усредненные по всем возможным значениям величины t_0 , распределение которой можно считать равномерным на отрезке $[0, T]$. Тогда $\bar{\Delta} = 0$;

$$\bar{\Delta}^2 = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left| f\left(\frac{2\pi}{q} k\right) \right|^2, \quad (3)$$

так как среднее значение функции $\exp i 2\pi k \frac{t_0}{T}$ при равномерном распределении t_0 равно нулю, а в формуле (2) при усреднении по t_0 останутся только слагаемые с $k = -l$. Отметим, что поскольку $\left| f\left(\frac{2\pi}{q} k\right) \right| \leq 1$, то

$$\bar{\Delta}^2 \leq \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{q^2}{12}.$$

Поскольку

$$f\left(\frac{2\pi}{q} k\right) = \frac{1}{T} \int_0^T \exp\left\{i \frac{2\pi}{q} k (\psi(t) - t \operatorname{tg} \varphi)\right\} dt, \quad (4)$$

то формулы (1) и (3) могут быть записаны следующим образом:

$$\Delta = \frac{q}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \frac{2\pi k}{q} (\psi(t) - (t - t_0) \operatorname{tg} \varphi) dt; \quad (5)$$

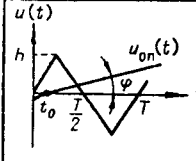
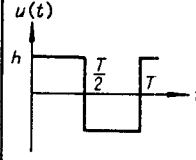
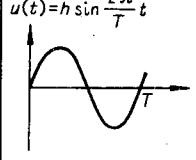
$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^2 = & \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\{ \left(\frac{1}{T} \int_0^T \cos \frac{2\pi k}{q} (\psi(t) - t \operatorname{tg} \varphi) dt \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{T} \int_0^T \sin \frac{2\pi k}{q} (\psi(t) - t \operatorname{tg} \varphi) dt \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, для определения погрешности и ее среднего квадрата необходимо вычислить значения определенных интегралов в формулах (5) и (6).

В табл. 1 и 2 в качестве примера приведены выражения для погрешности Δ и ее среднего квадрата $\bar{\Delta}^2$ в случае измерения среднего и средневывраженного значений некоторых периодических сигналов. Там же приведены приближенные формулы для усредненной по α погрешности $\bar{\Delta}^2 = \int_0^1 \bar{\Delta}^2 d\alpha$, вычисленные в предположении, что число шагов

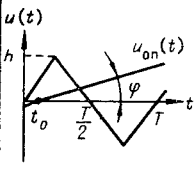
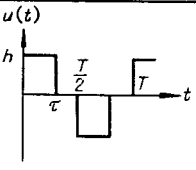
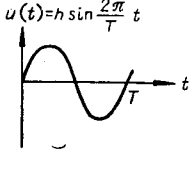
квантования много больше единицы. В таблицах используются следующие обозначения: $m = \left[\frac{h}{q} \right]$ — целая часть отношения $\frac{h}{q}$, характеризу-

Таблица 1

Форма сигнала	Значения погрешностей измерения среднего значения сигнала
	$\Delta = \frac{q(m+\alpha)}{4[(m+\alpha)^2 - \frac{1}{16}]} \left[(\alpha - \gamma + \frac{1}{4} - 1)^2 - (\alpha + \gamma - \frac{3}{4} - 1)^2 \right],$ $\bar{\Delta}^2 = \frac{q^2(m+\alpha)^2}{48[(m+\alpha)^2 - \frac{1}{16}]^2} (2\alpha - \frac{1}{2} - 1)^2 (1 - 2\alpha - \frac{1}{2} - 1)^2; \quad \bar{\Delta}^2 \approx \frac{q^2}{1440m^2} = \frac{\operatorname{tg}^4 \varphi}{1440f^4 h^2}$
	$\Delta = \frac{q}{2\pi^2} \left[(\alpha - \gamma + \frac{1}{2} - 1)^2 - (\alpha + \gamma - \frac{1}{2} - 1)^2 \right],$ $\bar{\Delta}^2 = \frac{q^2}{12} (1 - 2\alpha)^2 (1 - 2\alpha - 1)^2, \quad \bar{\Delta}^2 = \frac{q^2}{360} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{360f^2}$
	$\Delta = \frac{q}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} I_k \left(\frac{2\pi}{q} kh \right) \sin 2\pi k \gamma,$ $\bar{\Delta}^2 = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} I_k^2 \left(\frac{2\pi}{q} kh \right), \quad \bar{\Delta}^2 \approx \frac{q^2}{340m} = \frac{\operatorname{tg}^3 \varphi}{340f^3 h}$

ющая число шагов квантования; $\alpha = \frac{h}{q} - \left[\frac{h}{q} \right]$ — дробная часть отношения $\frac{h}{q}$; $0 \leq \alpha < 1$; $\gamma = \frac{t_0}{T}$; $\beta = \frac{2\tau}{T}$; $f = \frac{1}{T}$; $J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nz - x \sin z) dz$ — функция Бесселя; $E_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(nz - x \sin z) dz$ — функция Вебера.

Таблица 2

Форма сигнала	Значения погрешностей измерения средневзвешенного значения сигнала ($q = \frac{T}{2} \operatorname{tg} \varphi, \gamma = \frac{2t_0}{T}$)
	$\Delta = \frac{q(m+\alpha)}{(m+\alpha)^2 - \frac{1}{4}} \left[-\gamma + \gamma^2 + \left \alpha - \frac{1}{2} + \gamma \right - \left \alpha - \frac{1}{2} + \gamma - 1 \right \right]^2,$ $\overline{\Delta^2} = \frac{q^2}{12} \frac{(m+\alpha)^2}{\left[(m+\alpha)^2 - \frac{1}{4} \right]^2} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right)^2 \left(1 - \left \alpha - \frac{1}{2} \right \right)^2, \quad \overline{\Delta^2} \approx \frac{q^2}{360m^2} = \frac{\operatorname{tg}^4 \varphi}{16 \cdot 360 f^4 h^2}$
	$\Delta = \frac{q}{4\pi^2} \left[\left \beta - \gamma \right - \left \gamma + \alpha - \beta \right - 1 - 2 \left \gamma + \alpha - \beta \right + \left \gamma + \alpha - 1 \right + \left \gamma + 2\alpha(1 - \beta) \right \right],$ $\overline{\Delta^2} = \frac{q^2}{12} \left[\frac{1}{15} - (\alpha - \beta)^2 (1 - \alpha - \beta)^2 - (\alpha + \beta - 1)^2 (1 - \alpha + \beta - 1)^2 + 2\beta^2 (1 - \beta)^2 + 2\alpha^2 (1 - \alpha)^2 \right],$ $\overline{\Delta^2} = \frac{q^2}{540} \beta^2 (1 - \beta)^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{4 \cdot 540 f^2} \beta^2 (1 - \beta)^2$
	$\Delta = \frac{q}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[I_{2k} \left(\frac{2\pi}{q} kh \right) \sin 2\pi k \gamma - E_{2k} \left(\frac{2\pi}{q} kh \right) \cos 2\pi k \gamma \right],$ $\overline{\Delta^2} = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left[I_{2k}^2 \left(\frac{2\pi}{q} kh \right) + E_{2k}^2 \left(\frac{2\pi}{q} kh \right) \right], \quad \overline{\Delta^2} \approx \frac{q^2}{170m} = \frac{\operatorname{tg}^3 \varphi}{8 \cdot 170 f^3 h}$

Полученные соотношения позволяют определить интересующую нас погрешность измерения как функцию от заданных параметров, характеризующих форму сигнала, шаг квантования, фазу опорного напряжения. Отметим, что случаи, когда значения ошибки могут быть выражены в элементарных функциях, довольно редки.

3. *Асимптотическая оценка погрешности измерения.* Рассмотрим оценку для погрешности измерения при уменьшении шага квантования q . Для этого обратимся к формуле (5). Из (5) следует, что величина погрешности зависит от асимптотического поведения интеграла

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin \frac{2\pi k}{q} (g(t) + t_0 \operatorname{tg} \varphi) dt \quad (7)$$

при $q \rightarrow 0$. Оценим вклад, вносимый в величину этого интеграла ε -окрестностью некоторой точки τ , для которой $g'(\tau) = \psi'(\tau) - \frac{q}{T} \neq 0$ и $\psi'(\tau) \neq 0$. Этот вклад равен*

* Здесь и далее предполагается, что функция $\psi(t)$ не имеет участков, на которых $\psi(t) = \operatorname{const}$. Очевидно, что вклад таких участков в (7) имеет тот же порядок, что и вклад участков, на которых $g(t) = \operatorname{const}$.

$$\delta \cong \frac{q}{\pi k T g'(\tau)} \sin \frac{2\pi k}{q} (g(\tau) + t_0 \operatorname{tg} \varphi) \sin \frac{2\pi k}{q} g'(\tau) \varepsilon.$$

Из этого соотношения следует, что δ является величиной порядка q , т. е. $\delta = O(q)$ и $\lim_{q \rightarrow 0} \delta = 0$.

Если q достаточно мало, то основной вклад в величину интеграла (7) вносят окрестности тех точек, в которых $g'(\tau) = 0$ [4], так как в этих точках величина δ имеет другой порядок от q , а именно: $\delta = O(q^{a_1})$, где $0 \leq a_1 < 1$. Действительно, пусть, например, $g(t) = c$ при $0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$ и $g'(t) \neq 0$ при других значениях t . Тогда интеграл (7) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \frac{2\pi k}{q} (g(t) + t_0 \operatorname{tg} \varphi) dt &= \frac{t_2 - t_1}{T} \times \\ &\times \sin \frac{2\pi k}{q} (c + t_0 \operatorname{tg} \varphi) + O(q). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $q \rightarrow 0$ основной вклад в (7) вносит участок, на котором функция $g(t)$ постоянна. Рассмотрим другой пример. Пусть при $t = \tau$ $g'(\tau) = 0$, $g''(\tau) \neq 0$ и $g'(t) \neq 0$ при $t \neq \tau$. Тогда вклад окрестности такой точки в (7) оказывается также основным:

$$\begin{aligned} \delta \cong \frac{1}{T} \left(\frac{q}{k |g''(\tau)|} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left(\frac{2\pi k}{q} (g(\tau) + t_0 \operatorname{tg} \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{4} \operatorname{Sgn} g''(\tau) \right) = O(q^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Если же при $t = \tau$ $g'(\tau) = g''(\tau) = \dots = g^{(m)}(\tau) = 0$, то вклад окрестности такой точки в (7) имеет величину $O(q^{m+1})$.

При наличии нескольких точек (участков), в которых $g'(t) = 0$, вклады окрестностей этих точек (участков) суммируются. Если таких точек нет, то интеграл (7) при $q \rightarrow 0$ имеет порядок $O(q^\mu)$, где $\mu \geq 1$.

Аналогичные рассуждения справедливы и относительно интеграла

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos \frac{2\pi k}{q} (g(t) + t_0 \operatorname{tg} \varphi) dt.$$

Проведем в качестве примера вычисление оценки для среднего квадрата погрешности измерения среднего значения периодического сигнала $u(t) = h \sin \frac{\pi}{T} t$. Функция $g(t)$ для такого сигнала имеет одну точку, где $g'(t) = 0$, и асимптотическое поведение $\bar{\Delta}^2$ определяется вкладом этой точки в величину

$$\begin{aligned} \left| f \left(\frac{2\pi k}{q} \right) \right|^2 &= \left(\frac{1}{T} \int_0^T \cos \frac{2\pi k}{q} (g(t) + t_0 \operatorname{tg} \varphi) dt \right)^2 + \\ &+ \left(\frac{1}{T} \int_0^T \sin \frac{2\pi k}{q} (g(t) + t_0 \operatorname{tg} \varphi) dt \right)^2. \end{aligned}$$

При $q \rightarrow 0$ эта точка близка к абсциссе $t = \frac{T}{2}$ максимума функции

$h \sin \frac{\pi}{T} t$, а $|g''(\tau)|^2 \simeq h \frac{\pi^2}{T^2}$. Следовательно,

$$\left| f\left(\frac{2\pi k}{q}\right) \right|^2 \simeq \frac{q}{\pi^2 kh} \left[\cos^2\left(\frac{\pi k}{q}(h-q) - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi k}{q}(h-q) - \frac{\pi}{4}\right) \right] = \frac{q}{\pi^2 kh};$$

$$\bar{\Delta}^2 \simeq \frac{q^3}{2\pi^4 h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \simeq \frac{q^3}{170 h}.$$

Этот результат совпадает с данными табл. 2.

4. *Погрешность измерения при усреднении за несколько периодов опорного напряжения.* Полученные в разделе 2 результаты можно обобщить для случая измерения интегральных характеристик периодического сигнала за несколько периодов опорного напряжения. Последнее целесообразно, когда отношение периода опорного напряжения T_0 к периоду сигнала T невелико, и необходимо, когда это отношение меньше единицы. В этом случае для погрешности Δ_m ($0 \leq m \leq n-1$, где n — число периодов опорного напряжения) на m -м периоде опорного напряжения по аналогии с (1) можно записать:

$$\Delta_m = \frac{q}{2\pi i} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} \exp\left\{i 2\pi k \frac{t_m}{T}\right\} f\left(\frac{2\pi}{q} k\right).$$

Здесь $t_m = t_0 + m T_0 - \left[\frac{t_0 + m T_0}{T}\right] T$; $\left[\frac{t_0 + m T_0}{T}\right]$ — целая часть отношения $\frac{t_0 + m T_0}{T}$.

Суммарную погрешность и ее средний по t_0 квадрат после несложных преобразований запишем следующим образом:

$$\Delta_{\Sigma} = \frac{q}{\pi n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi kn \frac{T_0}{T}}{\sin \pi k \frac{T_0}{T}} \frac{1}{T} \times \\ \times \int_0^T \sin \frac{2\pi k}{q} \left\{ \psi(t) - \left(t - t_0 - \frac{n-1}{2} T_0 \right) \operatorname{tg} \varphi \right\} dt; \quad (8)$$

$$\bar{\Delta}_{\Sigma}^2 = \frac{q^2}{2\pi^2 n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(\frac{\sin \pi kn \frac{T_0}{T}}{\sin \pi k \frac{T_0}{T}} \right)^2 \times \\ \times \left\{ \left(\frac{1}{T} \int_0^T \cos \frac{2\pi k}{q} (\psi(t) - t \operatorname{tg} \varphi) dt \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{T} \int_0^T \sin \frac{2\pi k}{q} (\psi(t) - t \operatorname{tg} \varphi) dt \right)^2 \right\}. \quad (9)$$

Анализ (8) и (9) показывает, что:

1) при $T_0 > T$ и $T_0 = pT$, где p — целое число, усреднение за n периодов опорного напряжения не дает выигрыша по сравнению с измерением за один период, т. е. $\Delta_{\Sigma} = \Delta$, $\overline{\Delta_{\Sigma}^2} = \overline{\Delta^2}$;

2) при $T_0 > T$, $nT_0 = pT$, где n и p не имеют общих делителей, усреднение за n периодов приводит к уменьшению погрешности и ее среднего квадрата и оказывается эквивалентным измерению за один период, но с шагом квантования в n раз меньшим q , т. е.

$$\Delta_{\Sigma} = \frac{q}{\pi n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \frac{2\pi kn}{q} \{\psi(t) - (t - t_0) \operatorname{tg} \varphi\} dt;$$

$$\overline{\Delta_{\Sigma}^2} = \frac{q^2}{2\pi^2 n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\{ \left(\frac{1}{T} \int_0^T \cos \frac{2\pi kn}{q} (\psi(t) - t \operatorname{tg} \varphi) dt \right)^2 + \left(\frac{1}{T} \int_0^T \sin \frac{2\pi kn}{q} (\psi(t) - t \operatorname{tg} \varphi) dt \right)^2 \right\};$$

3) при $T_0 < T$, $T = pT_0$ и $n = lp$, где l и p — целые числа, усреднение за n периодов опорного напряжения эквивалентно усреднению на одном периоде сигнала, т. е.

$$\Delta_{\Sigma} = \frac{q}{\pi p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \frac{2\pi kp}{q} \{\psi(t) - (t - t_0) \operatorname{tg} \varphi\} dt;$$

$$\overline{\Delta_{\Sigma}^2} = \frac{q^2}{2\pi^2 p^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\{ \left(\frac{1}{T} \int_0^T \cos \frac{2\pi kp}{q} (\psi(t) - t \operatorname{tg} \varphi) dt \right)^2 + \left(\frac{1}{T} \int_0^T \sin \frac{2\pi kp}{q} (\psi(t) - t \operatorname{tg} \varphi) dt \right)^2 \right\}.$$

Заключение. Методическая погрешность измерения за один период опорного напряжения $T_0 > T$ определяется формой сигнала и убывает с уменьшением отношения $\frac{T}{T_0}$ и увеличением амплитуды сигнала. При усреднении результатов измерения за n периодов опорного напряжения наиболее неблагоприятными случаями являются следующие: в периоде опорного напряжения T_0 укладывается целое число периодов сигнала T ; в периоде сигнала T укладывается целое число периодов опорного напряжения T_0 . Методическая погрешность при этом не уменьшается. Поэтому при усреднении результатов измерения за n периодов целесообразно предварительное определение периода сигнала.

Полученные результаты были использованы при разработке универсального цифрового вольтметра, выполненного согласно блок-схеме, приведенной на рис. 2. Предусмотрена работа прибора в режимах измерения среднего, средневыпрямленного и действующего значений периодических напряжений. Время одного измерения составляет 1 сек. Экспериментальное исследование макета прибора подтвердило справедливость сделанных при теоретическом анализе выводов. В режиме измерения среднего значения относительная погрешность прибора не превышала 0,2% в диапазоне частот 16 гц — 20 кгц. В режиме измерения действующего значения погрешность прибора не превышала 0,6% в

том же диапазоне частот. Было замечено, что на более высоких частотах погрешность начинает увеличиваться. Это объясняется тем, что в этом случае начинают сказываться погрешности формирования и измерения суммируемых временных интервалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Кирьянов, И. И. Коршевер. О некоторых особенностях время-импульсного преобразования интегральных характеристик переменных напряжений.— В сб. «Методы и средства аналого-цифрового преобразования» (Труды семинара), вып. 1. Новосибирск, «Наука», 1969.
2. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. М., Гостехиздат, 1956.
3. В. М. Ефимов. Квантование по времени при измерении и контроле. М., «Энергия», 1969.
4. А. Эрдейи. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.

*Поступила в редакцию
29 октября 1969 г.*