

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АВТОМЕТРИИ

УДК 621.378

З. А. ЛИВШИЦ, В. И. РАБИНОВИЧ, М. В. САВЕНКОВ
(Новосибирск, Люберцы)

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО КВАНТОВАНИЯ

В настоящей работе изучаются некоторые вопросы, связанные с нахождением решения задачи оптимального квантования по уровню. Этой тематике посвящен ряд исследований (см., например, [1—11]). Ниже задача оптимального квантования рассматривается в следующей формулировке: фиксирован критерий точности, основанный на усреднении функции штрафов, удовлетворяющей некоторым общим условиям: точному измерению соответствует нулевой штраф, большему отклонению показаний прибора z от истинного значения измеряемой величины x соответствует неменьший штраф и т. д. (точную формулировку этих условий см. в [12]). Требуется по заданному распределению измеряемой величины $F(x)$ определить параметры квантователя с N уровнями, оптимального в смысле выбранного критерия. Таким образом, задача заключается в минимизации функции $2N - 1$ переменного

$$\Phi(x_1, \dots, x_{N-1}, z_1, \dots, z_N) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x, z_i) dF(x). \quad (1)$$

Здесь x_i — пороги; z_i — уровни квантования; x_0 — минимальное, а x_N — максимальное значение измеряемой величины.

В данной работе мы не будем останавливаться подробно на обобщениях, связанных с учетом запаздывания в квантователе, а также помех, отличных от шума квантования по уровню (по этому поводу см., например, [2—3]).

Известно, что найти аналитическое выражение для вектора, минимизирующего (1), оказывается невозможным за исключением незначительного числа простейших случаев. В [5, 8, 9] были развиты методы, позволяющие получить асимптотические формулы, которые при больших значениях N дают удовлетворительное решение задачи оптимизации. В ряде практических задач, однако, число уровней квантования не слишком велико. Кроме того, в [5, 8, 9] используются довольно сильные ограничения на гладкость функций распределения измеряемой величины. Поэтому значительный интерес представляет отыскание общих методов, позволяющих получить решение задачи оптимального квантования с требуемой точностью.

В [7, 10, 11] изучалась возможность применения для этих целей динамического программирования [13]. Процедура, основанная на исполь-

зовании принципа оптимальности, пригодна при любых ограничениях на функции штрафов и распределения вероятностей. Более того, несложное изменение рекуррентной схемы из [10] позволяет также получить решение задачи оптимального квантования для ситуации, когда присутствует случайный шум. Однако оценка сложности вычислительного алгоритма, произведенная в [10], а также опыт расчетов, проведенных по этой методике на ЭЦВМ, показывают, что использование динамического программирования наиболее эффективно при числе уровней, не превышающем десяти.

Значительно менее громоздкими с вычислительной точки зрения являются процедуры, связанные с решением уравнений для параметров оптимального квантователя. Эти уравнения при некоторых предположениях относительно гладкости функций $F(x)$ и $\varphi(x, z)$ (по этому поводу см., например, [1, 11]) имеют вид:

$$x_i = \frac{z_i + z_{i+1}}{2}; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (2)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial \varphi(x, z_i)}{\partial z_i} dF(x) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3)$$

Уравнения (2), (3) выражают условие равенства нулю всех частных производных по x_i, z_i функции $\Phi(x_1, \dots, x_{N-1}, z_1, \dots, z_N)$.

В практических ситуациях непосредственное выписывание системы уравнений типа (2), (3) зачастую оказывается невозможным: участвующие в них функции не обязательно непрерывны и тем более дифференцируемы (так, например, распределение измеряемой величины, как правило, задается в виде гистограммы). Поэтому для применения «непрерывных» методов необходимо предварительное сглаживание исходных данных. Возникает естественный вопрос, является ли решение «сглаженной» задачи близким к решению заданной. Отметим в этой связи еще один аспект рассматриваемой проблемы. Так как в большинстве случаев необходимые данные получены экспериментально, то, следовательно, они не вполне точны. Поэтому и здесь возникает необходимость исследования на устойчивость решения задачи оптимизации. Ниже будет показано, что имеет место непрерывная зависимость решения от исходных данных. Этот факт важен для применения методов оптимального квантования.

Введем следующие обозначения:

$$r_N^{\{x_i\}, \{z_i\}}(f) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x, z_i) f(x) dx; \quad R_N(f) = \min_{\{x_i\}, \{z_i\}} r_N^{\{x_i\}, \{z_i\}}(f).$$

Таким образом, $r_N^{\{x_i\}, \{z_i\}}(f)$ и $R_N(f)$ — функционалы, определенные на множестве неотрицательных измеримых функций, интеграл от которых равен 1, причем первый из этих функционалов осуществляет отображение, ставящее в соответствие каждой такой функции величину среднего штрафа, соответствующего способу квантования с порогами $\{x_i\}_{i=1}^{N-1}$ и уровнями $\{z_i\}_{i=1}^N$, а второй — приписывает каждой случайной величине значение минимального среднего штрафа при квантовании с N уровнями.

Покажем, что функционал $R_N(f)$ непрерывен в смысле метрики $L_1(x_0, x_N)$, т. е. для всякого ϵ найдется δ такое, что если

$$\int_{x_0}^{x_N} |f(x) - g(x)| dx < \delta, \quad (4)$$

то

$$|R_N(f) - R_N(g)| < \varepsilon. \quad (5)$$

Обозначим $\max_{x,z} \varphi(x,z)$ через M и положим $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Зафиксируем произвольный способ квантования $\{x_i\}_{i=1}^{N-1}, \{z_i\}_{i=1}^N$. Оценим величину $|r_N^{\{x_i\}, \{z_i\}}(f) - r_N^{\{x_i\}, \{z_i\}}(g)|$ при условии, что выполнено (4). Имеем

$$\begin{aligned} & |r_N^{\{x_i\}, \{z_i\}}(f) - r_N^{\{x_i\}, \{z_i\}}(g)| = \\ & = \left| \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x, z_i) [f(x) - g(x)] dx \right| \leq \\ & \leq M \left| \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - g(x)] dx \right| \leq M \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - g(x)| dx = \\ & = M \int_{x_0}^{x_N} |f(x) - g(x)| dx < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим теперь, что $R_N(f)$ и $R_N(g)$ соответственно суть минимумы двух функций, которые ни в одной точке не различаются больше, чем на ε . Но легко видеть, что в этом случае выполняется (5), откуда и следует сделанное утверждение.

Содержательный смысл полученного результата состоит в следующем: если вектор $\langle x_1, \dots, x_{N-1}, z_1, \dots, z_N \rangle$ доставляет минимум (1) при некотором распределении $F(x)$ измеряемой величины, то при незначительном изменении этого распределения квантователь с параметрами $\{x_i\}_{i=1}^{N-1}, \{z_i\}_{i=1}^N$ обеспечит значение среднего штрафа, близкое к минимальному.

З а м е ч а н и е. Доказанное утверждение отнюдь не означает, что параметры оптимального квантователя мало меняются при малом изменении исходных данных (более того, легко привести пример, свидетельствующий о возможности значительного изменения параметров).

Аналогичным образом можно показать, что если выполняется условие

$$\int_{x_0}^{x_N} \int_{x_0}^{x_N} |\varphi_1(x, z) - \varphi_2(x, z)| dx dz < \frac{\varepsilon}{LN}, \quad (7)$$

где

$$L = \max_x f_i(x),$$

то

$$\left| \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_1(x, z_i) f(x) dx - \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_2(x, z_i) f(x) dx \right| < \varepsilon, \quad (8)$$

т. е. имеет место устойчивость решения и относительно изменений функций штрафов, на базе которых задаются критерии точности. Итак, по-

казано, что независимо от гладкости исходных данных возможно применение «непрерывных» методов, причем замена негладких данных гладкими корректна.

Имеются две основные процедуры оптимизации, связанные с использованием системы уравнений (2), (3)*. Первая из них заключается в следующем: система уравнений (2), (3) рассматривается как рекуррентная схема, позволяющая по значению одного из параметров (например, z_1) определить остальные. Таким образом, задачу оптимизации можно свести к отысканию минимума функции одной переменной

$$\theta(z_1) = \Pi \{z_1, x_1(z_1), \dots, z_N(z_1)\}, \quad (9)$$

где функции $x_i(z_1)$ и $z_i(z_1)$ порождаются рекуррентной схемой (2), (3). Этот метод является достаточно быстро сходящимся. Однако он обладает одним существенным недостатком: функция $\theta(z_1)$ может иметь большое число локальных минимумов. При этом предварительное исследование этой функции чрезвычайно затруднительно (в частности, число локальных минимумов $\theta(z_1)$, по существу, не зависит от количества локальных минимумов (1)). В некоторых случаях сходимость описанного вычислительного процесса может быть улучшена путем выбора «удачного» первого приближения. При этом могут быть полезными результаты работ [5, 8, 9, 11].

Другая итеративная процедура может быть описана следующим образом: произвольно выбирается вектор $\langle x^{(1)}, \dots, x_{N-1}^{(1)} \rangle$, строится вектор $\langle z_1^{(1)}, \dots, z_N^{(1)} \rangle$, координатами которого являются уровни, оптимальные для разбиения, определяемого выбором $\{x_i^{(1)}\}$. [Для этого используются уравнения (3).] Затем по вектору $\{z_i^{(1)}\}$ находится [из уравнений (2)] вектор $\{x_i^{(2)}\}$, координаты которого суть значения порогов, оптимальные в случае, когда точками отнесения являются $\{z_i^{(1)}\}$. После этого последовательно определяются $\{z_i^{(2)}\}$, $\{x_i^{(3)}\}$ и т. д.

Ниже будет показано, что описанный процесс сходится к одному из решений системы уравнений (2), (3) независимо от того, каков был вектор $\{x_i^{(1)}\}$, выбранный в качестве первого приближения. В случае, если функция $\Phi(x_1, \dots, x_{N-1}, z_1, \dots, z_N)$ имеет несколько локальных минимумов, предельная точка может не совпадать с параметрами оптимального квантователя. Поэтому определенный интерес представляет выяснение условий, при которых система уравнений (2), (3) имеет единственное решение. К сожалению, достаточно общих результатов на этот счет до сих пор не получено. Можно отметить лишь работу [6], в которой показано, что в случае, когда критерием оптимальности является среднеквадратический, достаточным условием существования единственного минимума выражения (1) будет неравенство

$$\frac{d^2 \ln f(x)}{dx^2} < 0. \quad (10)$$

Используя некоторые соображения из [6], можно получить обобщенные условия (10) для случая, когда критерий оптимальности основан на функции штрафов вида $\varphi(x, z) = c(x)(z-x)^a$, однако соответствующие результаты довольно громоздки; в данной статье мы не будем их при-

* В [6] имеется указание, что подобные методы изучались американскими специалистами. Однако в [6] содержатся ссылки лишь на неопубликованные отчеты, поэтому мы сочли целесообразным изложить доказательства всех приводимых фактов.

водить. Чтобы избежать некоторых трудностей при изложении, всюду в дальнейшем будет предполагаться, что система уравнений (2), (3) имеет единственное решение.

Покажем теперь, что если функция $\varphi(x, z)$ имеет непрерывные частные производные по обоим аргументам и $f(x)$ непрерывна, то итерационный процесс сходится к оптимальному вектору. При этом мы ограничимся лишь эскизом доказательства, опуская легковосстанавливаемые технические детали. Введем следующие обозначения:

$$y_1^{(j)} = \langle x_1^{(j)}, \dots, x_{N-1}^{(j)}, z_1^{(j)}, \dots, z_N^{(j)} \rangle;$$

$$y_2^{(j)} = \langle x_1^{(j+1)}, \dots, x_{N-1}^{(j+1)}, z_1^{(j)}, \dots, z_N^{(j)} \rangle.$$

Тогда последовательность векторов, получающихся в ходе итерационного процесса, имеет вид

$$y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots, y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots \quad (11)$$

Пусть $h(y_k^{(j)})$ — средний штраф, соответствующий квантованию с параметрами $y_k^{(j)}$.

Отметим прежде всего, что так как на каждом шаге итерационного процесса мы повышаем точность квантователя, то последовательность средних штрафов, соответствующая (11), сходится (как монотонно убывающая и ограниченная снизу).

Далее, можно показать, что из сходимости этой последовательности вытекает, что при $j \rightarrow \infty$ расстояние в смысле метрики $(2N - 1)$ -мерного евклидова пространства между соседними членами последовательности (11) стремится к нулю. В силу предположения о непрерывной дифференцируемости функции (1) из этого следует, что последовательности частных производных, вычисленных в точках $y_k^{(j)}$, стремятся к нулю при $j \rightarrow \infty$.

На заключительном этапе доказательства выясняется, что последовательность (11) стремится к стационарной точке функции (1), т. е. предельная точка этой последовательности удовлетворяет системе уравнений (2), (3).

Покажем сейчас, что при некоторых дополнительных ограничениях на функции штрафов (они будут указаны ниже) оказывается возможным таким образом выбрать первое приближение (т. е. вектор $\{x_i^{(1)}\}$), что будет иметь место не только монотонная сходимость средних штрафов, но и монотонная сходимость по всем параметрам (т. е. последовательности $x_i^{(j)}$ и $z_i^{(j)}$ будут монотонными).

Рассмотрим класс критериев оптимальности, основанных на функциях штрафов вида

$$\varphi(x, z) = c(x)\psi(z - x). \quad (12)$$

Функциями такого вида, по существу, удовлетворяются все потребности практики. $\psi(z - x)$ — «точностное ядро» функций штрафов, характеризующее интересующую потребителя «размерность точности»; $c(x)$ — весовая функция, показывающая «важность» тех или иных точек диапазона преобразования. Заметим, что из условий, налагаемых на функции штрафов [12], вытекает, что при фиксированном $z = z_0$ $\frac{\partial \psi(z - x)}{\partial z} \Big|_{z = z_0}$ неположительна, если $x \leq z_0$, и неотрицательна, если $x > z_0$. Потребуем теперь дополнительно, чтобы при фиксированном $z = z_0$ $\frac{\partial \psi(z - x)}{\partial z} \Big|_{z = z_0}$ была монотонной функцией x .

Итак, пусть функция штрафов удовлетворяет всем сформулированным выше условиям. Для построения монотонно сходящегося по всем параметрам итеративного процесса нам потребуется установить некоторые вспомогательные факты.

Лемма 1. Пусть заданы векторы порогов $\{x'_i\}$ и $\{x''_i\}$; $\{z'_i\}$ и $\{z''_i\}$ — соответственно оптимальные для этих разбиений точки отнесения. Тогда, если для любого $i(1 \leq i \leq N-1)$ $x'_i \leq x''_i$, то для любого $i(1 \leq i \leq N)$ выполняется также неравенство $z'_i \leq z''_i$.

Лемма 2. Пусть заданы векторы $\{z'_i\}$ и $\{z''_i\}$; $\{x'_i\}$ и $\{x''_i\}$ — векторы порогов, оптимальные в случаях, когда точками отнесения являются $\{z'_i\}$ и $\{z''_i\}$. Тогда, если для любого $i(1 \leq i \leq N)$ $z'_i \leq z''_i$, то для любого $l(1 \leq l \leq N-1)$ $x'_l \leq x''_l$.

Справедливость леммы 2 совершенно очевидна, так как условие оптимальности порогов при заданных точках отнесения определяется уравнениями (9).

Для доказательства леммы 1 заметим, что ввиду монотонности функции $\left. \frac{\partial \psi(z-x)}{\partial z} \right|_{z=z_0}$ условие оптимальности точки отнесения z_i^* при заданных порогах x_{i-1} и x_i может быть записано в виде

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{z_i^*} \frac{\partial \psi(z_i^* - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right| = \left| \int_{z_i^*}^{x_i} \frac{\partial \psi(z_i^* - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right|. \quad (13)$$

При этом подынтегральные выражения в обеих частях (13) знакопостоянны.

Будем доказывать утверждение от противного: предположим, что существует i_0 такое, что

$$z'_{i_0} > z''_{i_0}. \quad (14)$$

Ясно, что при $x'_{i_0} \leq x''_{i_0-1}$ это заведомо невозможно. Следовательно, одновременно выполняются неравенства:

$$x'_{i_0-1} \leq x''_{i_0-1} < x'_{i_0} \leq x''_{i_0}; \quad z'_{i_0} > z''_{i_0}. \quad (15)$$

В силу предположений и (13) x'_{i_0-1} , x'_{i_0} , z'_{i_0} , x''_{i_0-1} , x''_{i_0} , z''_{i_0} связаны соотношениями:

$$\left| \int_{x'_{i_0-1}}^{z'_{i_0}} \frac{\partial \psi(z'_{i_0} - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right| = \left| \int_{z'_{i_0}}^{x'_{i_0}} \frac{\partial \psi(z'_{i_0} - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right|; \quad (16)$$

$$\left| \int_{x''_{i_0-1}}^{z''_{i_0}} \frac{\partial \psi(z''_{i_0} - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right| = \left| \int_{z''_{i_0}}^{x''_{i_0}} \frac{\partial \psi(z''_{i_0} - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right|. \quad (17)$$

Левая часть (16) может быть переписана в виде

$$\left| \int_{x'_{i_0-1}}^{z'_{i_0}} \frac{\partial \psi(z'_{i_0} - x)}{xz} c(x) f(x) dx \right| = \left| \int_{x'_{i_0-1}}^{x''_{i_0-1}} \frac{\partial \psi(z'_{i_0} - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{x'_{i_0-1}}^{z'_{i_0}} \frac{\partial \psi(z'_{i_0} - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right| + \left| \int_{z''_{i_0}}^{z'_{i_0}} \frac{\partial \psi(z'_{i_0} - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right|. \quad (18)$$

Заметим теперь, что так как функция $\frac{\partial \psi(z-x)}{\partial z}$ неположительна при $x < z$ и монотонно возрастает, то для любого $x \in [x'_{i_0-1}, z''_{i_0}]$

$$\left| \frac{\partial \psi(z'_{i_0} - x)}{\partial z} \right| > \left| \frac{\partial \psi(z''_{i_0} - x)}{\partial z} \right|. \quad (19)$$

Из (19) следует, что

$$\left| \int_{x'_{i_0-1}}^{z'_{i_0}} \frac{\partial \psi(z'_{i_0} - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right| \geq \left| \int_{x''_{i_0}}^{z''_{i_0}} \frac{\partial \psi(z''_{i_0} - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right|, \quad (20)$$

а значит, и

$$\left| \int_{x'_{i_0-1}}^{z'_{i_0}} \frac{\partial \psi(z'_{i_0} - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right| \geq \left| \int_{x''_{i_0}}^{z''_{i_0}} \frac{\partial \psi(z''_{i_0} - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right|. \quad (21)$$

Можно показать, что в (21) имеет место строгое неравенство, т. е.

$$\left| \int_{x'_{i_0-1}}^{z'_{i_0}} \frac{\partial \psi(z'_{i_0} - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right| > \left| \int_{x''_{i_0}}^{z''_{i_0}} \frac{\partial \psi(z''_{i_0} - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right|. \quad (22)$$

В самом деле, равенство в (20) означало бы, в частности, что первый член правой части (18) равен нулю, и ввиду знакопостоянства подынтегрального выражения выполнение условия

$$\frac{\partial \psi(z'_{i_0} - x)}{\partial z} = 0 \text{ при } x \in [x'_{i_0-1}, z'_{i_0}]. \quad (23)$$

Но поскольку $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ монотонна, то из (22) вытекает, что $\frac{\partial \psi(z'_{i_0} - x)}{\partial z} = 0$ при $x \in [x'_{i_0-1}, z'_{i_0}]$. Следовательно, на этом промежутке

$$\psi(z'_{i_0} - x) = \text{const}. \quad (24)$$

Так как $\psi(0) = 0$, то (23) противоречит одному из требований к функции штрафов. Поэтому (21) невозможно, и справедливо неравенство (22).

Проведя аналогичные рассуждения относительно правой части (17), получим

$$\left| \int_{z'_{i_0}}^{x'_{i_0}} \frac{\partial \psi(z'_{i_0} - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right| < \left| \int_{z''_{i_0}}^{x''_{i_0}} \frac{\partial \psi(z''_{i_0} - x)}{\partial z} c(x) f(x) dx \right|. \quad (25)$$

Сопоставление (22) и (25) приводит к противоречию, что и доказывает лемму 1.

Из установленных лемм вытекают некоторые полезные для дальнейшего следствия.

1. Пусть на некотором этапе j итерационного процесса для любого i

$$x_i^{(j)} \leq x_i^{(\text{опт})}. \quad (26)$$

Тогда для любого $k \geq j$ выполняются неравенства:

$$x_i^{(k)} \leq x_i^{(\text{опт})}, \quad (27)$$

$$z_i^{(k)} \leq z_i^{(\text{опт})}. \quad (28)$$

Действительно, из (26) и леммы 1 непосредственно получим

$$z_i^{(j)} \leq z_i^{(\text{опт})}, \quad (29)$$

из (29) и леммы 2 — неравенство

$$x_i^{(j+1)} \leq x_i^{(\text{опт})} \quad (30)$$

и далее по индукции.

2. Пусть для некоторого j выполняются неравенства

$$x_i^{(j)} \leq x_i^{(j+1)} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \quad (31)$$

Тогда для любого $k \geq j$

$$x_i^{(k)} \leq x_i^{(k+1)} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1); \quad (32)$$

$$z_i^{(k)} \leq z_i^{(k+1)} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (33)$$

Доказательство этого следствия аналогично предыдущему. В случае, когда система уравнений (2), (3) имеет единственное решение, из условия: для любого i

$$x_i^{(j)} \leq x_i^{(j+1)} \quad (34)$$

следует, что, начиная с j -го этапа итерационного процесса, значения всех варьируемых параметров не больше, чем оптимальные. В самом деле, как показывает следствие 2, условие (29) означает, что, начиная с этого этапа, изменение всех параметров монотонно, но, как отмечалось выше, предельный вектор должен удовлетворять уравнениям (2), (3).

Таким образом, для того чтобы добиться монотонной сходимости итерационного процесса по всем параметрам, достаточно отыскать вектор $\{x_i^{(1)}\}$ такой, что

$$x_i^{(1)} \leq x_i^{(2)} \quad (35)$$

для любого i .

Для этого зададимся значениями $\overset{\Delta}{z}_1$ и ε . Определим теперь последовательности $\{x_i^{(1)}\}_{i=1}^N$ и $\{\overset{\Delta}{z}_i\}_{i=2}^N$ следующим образом: выберем $x_1^{(1)}$ так, что $\overset{\Delta}{z}_1$ — оптимальная точка отнесения для $[x_0, x_1^{(1)}]$; положим $\overset{\Delta}{z}_2 = 2x_1^{(1)} - \overset{\Delta}{z}_1 + \varepsilon$; в общем случае

$$\overset{\Delta}{z}_k = 2x_{k-1}^{(1)} - \overset{\Delta}{z}_{k-1} + \varepsilon; \quad (36)$$

$\overset{\Delta}{z}_k$ оптимальна для $[x_{k-1}^{(1)}, x_k^{(1)}]$; $1 \leq k \leq N$.

Очевидно, что, выбрав z_1 и ϵ достаточно малыми, можно удовлетворить соотношениям (28). Ясно тогда, что итерационный процесс, примененный к вектору $\{x_i^{(1)}\}$, будет монотонно сходиться к решению системы уравнений (2), (3).

Ниже приводятся результаты решения одной практической задачи с использованием методов оптимального квантования. Контрольно-измерительная система для определения технического состояния авиационного турбореактивного двигателя включает в себя устройства для измерения следующих основных параметров: тяги, числа оборотов вала, температуры газов перед турбиной, относительного расхода топлива. Требуется оптимизировать эти приборы по точности, причем функции штрафов, на которых основаны критерии оптимальности, имеют вид

$$\varphi_i(x, z) = c_i(x) |z - x| \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (37)$$

Графики «весовых» функций $c_i(x)$ приведены на рисунке. Выбор критериев обуславливался техническими условиями эксплуатации двигателей (например, увеличение «штрафа» за неточные измерения температуры газов около верхнего предела диапазона измерения объясняется тем, что именно высокие температуры являются особенно опасными: при перегреве возможно разрушение колеса турбины и т. п.).

Для измерителей всех параметров авиадвигателя число уровней квантования равно восьми. Такое условие определяется тем, что получаемая в процессе измерений (с интервалом в несколько секунд) информация должна предварительно накапливаться, чтобы затем передаваться для обработки на вычислительную машину. Предварительное хранение накапливаемых данных осуществляется на первом этапе (в организации, эксплуатирующей самолеты) на перфорированной ленте, т. е. на носителе с очень ограниченным объемом запоминаемых сведений. Это определяет жесткие требования к разрядности результата каждого отдельного измерения, и поэтому в разрабатываемой системе номер кванта, в который попала измеряемая величина, запоминается в виде трехразрядного двоичного числа.

Экспериментально полученные распределения вероятностей измеряемых параметров авиационного двигателя в процессе эксплуатации заданы с помощью гистограмм следующего вида: указаны точки $y_1^{(i)}, \dots, y_k^{(i)}$, разбивающие диапазон измерения на непересекающиеся интервалы, а также числа $p_1^{(i)}, \dots, p_k^{(i)}$ — вероятности того, что i -я случайная величина попадает в соответствующий интервал; распределение внутри $[y_l^{(i)}, y_{l+1}^{(i)}]$ предполагается равномерным (см. табл. 1—4).

Во всех случаях считается, что измеряемые величины могут принимать значения из промежутка $[0, 8]$ (единицы измерения условные).

При численном решении сформулированных задач были опробованы все описанные в данной работе алгоритмы. Наиболее эффективным (и это, по-видимому, является общим для задач такой сложности) оказался метод последовательных приближений, подробно изученный выше. Экспериментальная проверка показала, что определенным недостатком процедуры, связанной с минимизацией функции (9), является

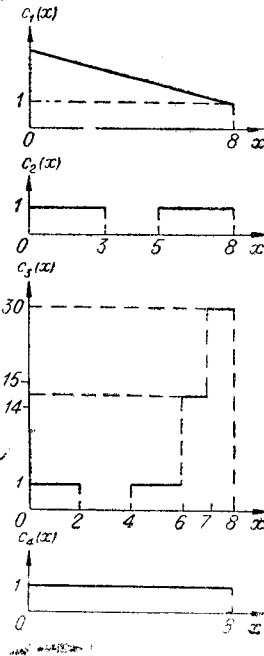


Таблица 1

l	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_l^{(1)}$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
$p_l^{(1)}$	0,08	0,12	0,04	0,20	0,12	0,24	0,08	0,12

Таблица 2

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_l^{(2)}$	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6	6,4	7,2	8,0
$p_l^{(2)}$	0,125	0,208	0,041	0,083	0,041	0,291	0,041	0,083	0,041	0,041

Таблица 3

l	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_l^{(3)}$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
$p_l^{(3)}$	0,136	0,136	0,136	0,045	0,227	0,181	0,090	0,045

Таблица 4

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_l^{(4)}$	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6	6,4	7,2	8,0
$p_l^{(4)}$	0,041	0,125	0,125	0,125	0,250	0,041	0,125	0,041	0,041	0,083

значительная «чувствительность» алгоритма к выбору шага. Расчеты проводились с помощью ЭЦВМ БЭСМ-6. Результаты сведены в табл. 5—8, из которых видно, что применение оптимальных методов позволяет уменьшить «средние потери» в точности при измерении тяги на 12%, числа оборотов вала на 31%, расхода топлива на 13%, температуры газов на 41%.

Таблица 5

j	1	2	3	4	5	6	7	8	$M_{x,z}^{(опт)} \varphi_1(x,z)$	$M_{x,z}^{(равн)} \varphi_1(x,z)$
$x_j^{(1)}$	0,776	1,402	2,538	3,591	4,519	5,455	6,610	8,000	0,425	0,481
$z_j^{(1)}$	0,382	1,171	1,833	3,242	3,941	5,096	5,815	7,405		

Таблица 6

j	1	2	3	4	5	6	7	8	$M_{x,z}^{(опт)} \varphi_2(x,z)$	$M_{x,z}^{(равн)} \varphi_2(x,z)$
$x_j^{(2)}$	0,548	0,997	1,345	2,067	3,100	5,966	6,867	8,000	0,084	0,125
$z_j^{(2)}$	0,274	0,823	1,171	1,519	2,614	5,633	6,300	7,435		

Таблица 7

j	1	2	3	4	5	6	7	8	$M_{x,z}^{(опт)} \varphi_3(x,z)$	$M_{x,z}^{(равн)} \varphi_3(x,z)$
$x_j^{(3)}$	4,0	4,833	5,708	6,374	6,788	7,196	7,597	8,000	0,498	0,840
$z_j^{(3)}$	1,0	4,416	5,250	6,167	6,581	6,935	7,397	7,797		

Таблица 8

j	1	2	3	4	5	6	7	8	$M_{x,z}^{(опт)} \varphi_4(x,z)$	$M_{x,z}^{(равн)} \varphi_4(x,z)$
$x_j^{(4)}$	1,328	2,122	2,917	3,571	4,499	5,734	6,859	8,000	0,171	0,198
$z_j^{(4)}$	0,930	1,725	2,520	3,314	3,822	5,172	6,297	7,421		

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Max. Quantizing for Minimum Distortion.— IRE Trans. on IT, 1960, IT-6, № 1.
2. А. И. Величкин. Квантование непрерывных сообщений с минимальной квадратической ошибкой.— Радиотехника, 1963, т. 19, № 3.
3. А. И. Величкин. Среднеквадратическая ошибка при квантовании непрерывных сообщений с шумом.— Изв. АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика, 1964, № 4.
4. T. Fine. Properties of an Optimum Digital Systems and Applications.— IEEE Trans. on IT, 1964, IT-10, № 4.
5. C. M. Roe. Quantizing for Minimum Distortion.— IEEE Trans. on IT, 1964, IT-10, № 4.
6. P. E. Fleisher. Sufficient Conditions for Achieving Minimum Distortion in a Quantized.— IEEE Internat. Convention Record, 1964, pt 1.
7. J. D. Bruce. On the Optimum Quantization on the Stationary signals.— IEEE Internat. Convention Record, 1964, pt 1.
8. Р. Л. Стратонович, Б. А. Гришанин. Ценность информации при невозможности прямого наблюдения оцениваемой величины.— Изв. АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика, 1966, № 3.
9. Б. А. Гришанин. Об асимптотическом решении задачи оптимального квантования.— Изв. АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика, 1968, № 1.
10. З. А. Лившиц. К вопросу об оптимальном квантовании по уровню.— Сб. «Вероятностные методы в измерении и контроле», вып. 1, Новосибирск, «Наука», 1968.
11. З. А. Лившиц. Исследование и применение некоторых статистических методов оценки и повышения точности средств измерения. Реферат канд. дисс. Новосибирск, 1969.
12. З. А. Лившиц. О критериях сравнения средств измерения.— Автометрия, 1967, № 6.
13. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.

Поступила в редакцию
10 декабря 1969 г.