А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 3 1970

УДК 621.503

Б. В. ДРОЗДОВ
(Москва)

К АНАЛИЗУ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЮЩИХ УСТРОЙСТВ

В системах автоматического контроля, измерения и управления исходная непрерывная информация может подвергаться квантованию по времени и представляться в виде последовательности равноотстоящих отсчетов. При сопряжении дискретных и непрерывных устройств возникает необходимость в обратном преобразовании дискретных последовательностей в непрерывные сигналы. Такое преобразование осуществляется в восстанавливающих (интерполирующих) устройствах. При проектировании таких систем выбор частоты следования отсчетов и типов интерполяторов определяется точностью рассматриваемого дискретно-непрерывного преобразования. Анализу этой точности были посвящены, например, работы [1—3].

Особенность настоящей статьи состоит в том, что проводится анализ наиболее распространенных на практике восстанавливающих устройств нулевого и первого порядка для класса случайных сигналов, корреляционные функции которых обладают некоторыми общими свойствами.

Пусть $x(t)$ — квазистационарный случайный сигнал модели Железнова [4], заданный коэффициентом корреляции $\rho(\tau)$, а T_0 — интервал квантования по времени. Рассмотрим довольно широкий класс недифференцируемых сигналов такого вида, у которых корреляционные функции в окрестности начала координат ($\tau=0$) описываются зависимостями:

$$R_1(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}; \tag{1}$$

$$R_2(\tau) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\beta_n|\tau|}; \tag{2}$$

$$R_3(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}\cos\omega\tau; \tag{3}$$

$$R_4(\tau) = \sigma^2\left(1 - \frac{|\tau|}{\Delta}\right) \text{ при } |\tau| \leqslant \Delta. \tag{4}$$

При достаточно малом T_0 функции (1)—(3) могут на интервале, не превышающем $2T_0$, аппроксимироваться линейной зависимостью. Для процесса (3) такая аппроксимация может быть выполнена с достаточной точностью при определенных значениях добротности $Q = \frac{\omega}{2\beta}$. Тогда корреляционная функция вида (4) будет являться аппроксимирующей в рассматриваемом диапазоне для сигналов (1)—(3). Величина Δ для (1) и (3) будет равна $\Delta = \frac{1}{\beta}$, а для сигналов (2)

$$\Delta = \sum_{n=1}^{N} a_n \Big/ \sum_{n=1}^{N} a_n \beta_n .$$

Для интерполятора нулевого порядка (ступенчатого интерполятора) относительная мгновенная дисперсия ошибки восстановления $\frac{D_\varepsilon}{D}$ определяется, согласно [5], соотношением

$$\frac{D_\varepsilon}{D} = 2\,[1 - \rho(\tau)]. \qquad (5)$$

Данный интерполятор при восстановлении исходного непрерывного сигнала вносит запаздывание $T_0/2$. Для систем, где возникающие «чистые» запаздывания не сказываются на их работе, точность интерполятора можно характеризовать относительной дисперсией отклонения формы выходной функции от входной (т. е. ошибкой без учета запаздывания):

$$\frac{D_{\varepsilon 1}}{D} = 2\left[1 - \rho\left(\tau - \frac{T_0}{2}\right)\right]. \qquad (6)$$

Интерполятор первого порядка без учета запаздывания имеет относительную дисперсию ошибки [6]

$$\frac{D_{\varepsilon 1}}{D} = 2 - 2\,\frac{\tau}{T_0}\left(1 - \frac{\tau}{T_0}\right)[1 - \rho(T_0)] - 2\left(1 - \frac{\tau}{T_0}\right)\rho(\tau) - $$
$$- 2\,\frac{\tau}{T_0}\rho(T_0 - \tau). \qquad (7)$$

Физически реализуемый интерполятор первого порядка вносит запаздывание на величину интервала квантования T_0. Формулу для относительной дисперсии ошибки этого интерполятора с учетом запаздывания получаем из (7) путем замены в аргументах коэффициента корреляции величины τ на $\tau + T_0$.

При восстановлении сигналов «в темпе» с поступлением данных (т. е. с учетом запаздывания) может применяться экстраполятор первого порядка, осуществляющий линейное предсказание сигнала вперед по двум ближайшим прошлым отсчетам. Формулу для относительной дисперсии ошибки восстановления этого экстраполятора можно получить из (7), если заменить τ на $\tau + T_0$:

$$\frac{D_\varepsilon}{D} = 2 + 2\,\frac{\tau}{T_0}\left(1 + \frac{\tau}{T_0}\right)[1 - \rho(T_0)] + \frac{2\tau}{T_0}\rho(\tau + T_0) - $$
$$- 2\left(1 - \frac{\tau}{T_0}\right)\rho(\tau). \qquad (8)$$

Дисперсии ошибок, определяемые по формулам (5)—(8), зависят от временного сдвига τ, проявляя свойство высокочастотной нестационарности. Ввиду этого в качестве показателей статистической точности желательно брать максимальные дисперсии ошибок или усредненные по интервалу квантования дисперсии ошибок δ^2:

$$\delta^2 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{D_\varepsilon(\tau)}{D}\,d\tau. \qquad (9)$$

Тип восстанавливающего устройства		Мгновенная относительная дисперсия ошибки	Точка максимальной дисперсии	Максимальная дисперсия	Средняя по времени дисперсия
Интерполятор нулевого порядка	с учетом запаздывания	$2\frac{\tau}{\Delta}$	$\tau = T_0$	$2\frac{T_0}{\Delta}$	$\frac{T_0}{\Delta}$
	без учета запаздывания	$2\frac{\lvert \tau - T_0/2 \rvert}{\Delta}$	$\tau = 0;\ T_0$	$\frac{T_0}{\Delta}$	$\frac{T_0}{2\Delta}$
Интерполятор 1-го порядка	с учетом запаздывания	$2\frac{T_0}{\Delta}\left(1 - \frac{\tau}{T_0} + \frac{\tau^2}{T_0^2}\right)$	$\tau = 0;\ T_0$	$2\frac{T_0}{\Delta}$	$\frac{5}{3}\frac{T_0}{\Delta}$
	без учета запаздывания	$2\frac{\tau}{\Delta}\left(1 - \frac{\tau}{T_0}\right)$	$\tau = \frac{T_0}{2}$	$\frac{T_0}{2\Delta}$	$\frac{T_0}{3\Delta}$
Экстраполятор 1-го порядка	—	$2\frac{\tau}{\Delta}\left(1 + \frac{\tau}{T_0}\right)$	$\tau = T_0$	$4\frac{T_0}{\Delta}$	$\frac{5}{3}\frac{T_0}{\Delta}$
Оптимальная система восстановления, по Железнову	с учетом запаздывания	$\frac{T_0^2}{4\Delta^2} + \frac{\tau}{\Delta}\left(2 - \frac{2T_0}{\Delta} + \frac{3\tau^2}{\Delta^2}\right);\ 0 \leqslant \tau < \frac{T_0}{2}$ $\frac{T_0^2}{4\Delta^2} + \frac{\tau}{\Delta}\left(2 - \frac{\tau}{\Delta}\right);\ \frac{T_0}{2} \leqslant \tau \leqslant T_0$	$\tau = T_0$	$\frac{T_0}{\Delta}\left(2 - \frac{3T_0}{4\Delta}\right)$	$\frac{T_0}{4\Delta}\left(4 - \frac{5}{3}\frac{T_0}{\Delta} + \frac{T_0^2}{2\Delta^2}\right)$
	без учета запаздывания	$1 - \left(1 - \frac{\tau}{\Delta}\right)^2;\ 0 \leqslant \tau < T_0/2$ $1 - \left(1 - \frac{T_0 - \tau}{\Delta}\right)^2;\ \frac{T_0}{2} \leqslant \tau \leqslant T_0$	$\tau = \frac{T_0}{2}$	$\frac{T_0}{\Delta}\left(1 - \frac{T_0}{4\Delta}\right)$	$\frac{T_0}{2\Delta}\left(1 - \frac{T_0}{6\Delta}\right)$

Подставляя выражения для аппроксимирующего коэффициента корреляции

$$\rho(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{\Delta} \qquad (10)$$

в (5)—(8), производя усреднение по времени, согласно (9), и находя также максимальные величины этих ошибок, можно получить результаты для рассматриваемых типов восстанавливающих устройств (см. таблицу). В этой таблице приведены с целью сравнения данные для системы восстановления, обладающей максимальной верностью, по Железнову [4]. Согласно [4], наивысшая верность, под которой понимается средний квадрат ошибки, достигается, если импульсная переходная функция восстанавливающего устройства совпадает на интервале $\pm \frac{T_0}{2}$ с функцией корреляции исходного сигнала и равна нулю вне этого интервала. Выражение для предельной верности при этом будет равно [4]

$$\delta_0^2 = 1 - \frac{2}{T_0} \int\limits_0^{T_0/2} \rho^2(\tau)\, d\tau. \qquad (11)$$

Подставляя в (11) вместо $\rho(\tau)$ выражение (10), получаем

$$\delta_0^2 = \frac{T_0}{2\Delta}\left(1 - \frac{T_0}{6\Delta}\right).$$

Условие физической реализуемости требует, чтобы в процессе работы подобное восстанавливающее устройство вносило запаздывание $T_0/2$. Принцип работы устройства, обеспечивающего максимальную верность для сигналов с коэффициентом корреляции (10) (без учета запаздывания), отображает рис. 1. Отсюда можно определить мгновенную ошибку $\varepsilon(t)$, а по ней — дисперсию ошибки $\frac{D_\varepsilon}{D}$ и все остальные данные, приведенные в таблице.

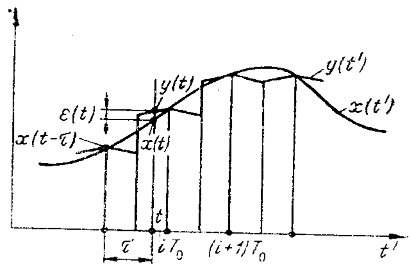

Рис. 1. Восстановление, обеспечивающее максимальную верность, по Железнову (без учета запаздывания).

Анализируя результаты, отраженные в таблице, можно сделать вывод о том, что для рассматриваемого класса случайных сигналов увеличение порядка восстанавливающего устройства выше нулевого дает весьма незначительное повышение точности, а в некоторых случаях (с учетом запаздывания) приводит к понижению точности восстановления. Для таких процессов, например, простейшая экстраполяция по одному отсчету более выгодна, чем по двум.

Можно показать, что для дифференцируемых (в среднеквадратичном) сигналов переход от восстанавливающих устройств нулевого порядка к первому дает уже существенный выигрыш в точности восстановления (при не слишком больших ошибках восстановления). Пусть вблизи начала координат коэффициент корреляции описывается зависимостью

$$\rho(\tau) = \frac{\sin \omega_m \tau}{\omega_m \tau}. \qquad (12)$$

Используя приведенные выше выражения (5)—(8) дисперсий ошибок восстановления, для случая (12) были рассчитаны зависимости относительных среднеквадратических ошибок восстановления δ и максимальных эффективных значений ошибок $\delta_m = \sqrt{(D_\varepsilon/D)_{\max}}$ от относительной частоты квантования по времени $l = 2\pi/T_0\omega_m$ (рис. 2). Как видно, в данном случае применение интерполятора первого порядка (без учета запаздывания) и экстраполятора первого порядка (с учетом запаздывания) дает уже значительное повышение точности восстановления по сравнению с простейшим устройством.

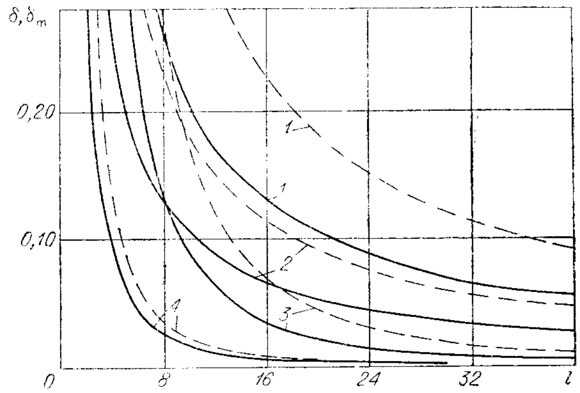

Рис. 2. Зависимости относительных среднеквадратических ошибок (сплошные линии) и максимальных ошибок (штриховые линии) от относительной частоты квантования $l = \frac{2\pi}{T_0\omega_m}$:

1 — интерполятор нулевого порядка (с учетом запаздывания); 2 — интерполятор нулевого порядка (без учета запаздывания); 3 — экстраполятор 1-го порядка; 4 — интерполятор 1-го порядка (без учета запаздывания).

Таким образом, эффективность применения восстанавливающих устройств первого порядка по отношению к нулевому определяется характером изменения корреляционной функции восстанавливаемого процесса вблизи начала координат.

Если учитывать только максимальные относительные дисперсии ошибки, которые для интерполятора нулевого и экстраполятора первого порядка достигаются при $\tau = T_0$, то, вычитая из (5) выражение (8) при $\tau = T_0$, получаем условие, при котором экстраполяция по двум отсчетам лучше, чем по одному:

$$3\rho(T_0) - \rho(2T_0) - 2 \geqslant 0.$$

Для того чтобы судить о сравнительной точности рассматриваемых устройств в смысле средних по времени ошибок, необходимо проводить расчеты для каждого конкретного случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Ефимов. Квантование по времени при измерении и контроле. М., «Энергия», 1969.
2. Ю. М. Быков. К определению среднеквадратичной ошибки интерполяции при дискретном измерении случайных сигналов.— Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, 1962, № 6.
3. Ю. М. Быков. О статистической точности восстанавливающих элементов при импульсной передаче случайных сигналов.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1965, № 1.
4. Н. А. Железнов. Принцип дискретизации стохастических сигналов с неограниченным спектром и некоторые результаты теории импульсной передачи сообщений.— Радиотехника и электроника, 1958, № 1.
5. Э. Л. Ицкович. Определение необходимой частоты измерений при дискретном контроле.— Автоматика и телемеханика, 1961, № 2.
6. А. С. Немировский, В. А. Волконский. Погрешность аппроксимации при дискретных измерениях непрерывных величин.— Измерительная техника, 1963, № 4.

Поступила в редакцию
30 октября 1968 г.,
окончательный вариант —
9 декабря 1969 г.