

Р. Д. БАГЛАЙ, В. Г. ВОРОНОВ  
 (Новосибирск)

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПО ОПИСЫВАЮЩИМ ФУНКЦИЯМ ВЫСШИХ ГАРМОНИК

В [1, 2] дан метод точного решения задачи определения (идентификации) однозначных нелинейных зависимостей по описывающим функциям нулевой и первой гармоник испытательного сигнала. В основе метода лежит следующее. Пусть  $\varphi(x)$  — искомая нелинейная зависимость, где  $x = \alpha \sin \theta$  — испытательный сигнал;  $\theta = \omega(t)$ ; тогда

$$a_0(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Phi_0(\alpha \sin \theta) d\theta; \quad (1)$$

$$a_1(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Phi_1(\alpha \sin \theta) \sin \theta d\theta. \quad (2)$$

Здесь  $a_0(\alpha)$  и  $a_1(\alpha)$  — известные ненормированные описывающие функции соответственно нулевой и первой гармоник;  $\Phi_0(\alpha \sin \theta) = \varphi(\alpha \sin \theta) + \varphi(-\alpha \sin \theta)$ ;  $\Phi_1(\alpha \sin \theta) = \varphi(\alpha \sin \theta) - \varphi(-\alpha \sin \theta)$ . Выражение (1) есть интегральное уравнение Шлемильха, решение  $\Phi_0(\alpha)$  которого известно [3]. Соотношение (2) может быть сведено к уравнению Шлемильха. По решениям  $\Phi_0(\alpha) = \varphi(\alpha) + \varphi(-\alpha)$  и  $\Phi_1(\alpha) = \varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)$  определяется искомая зависимость  $\varphi(\alpha)$ .

В [4] дан эффективный метод решения этой задачи с применением интерполяционных квадратур. В [2, 5] рассмотрен случай, когда искомая зависимость меняется с изменением амплитуды испытательного сигнала  $\varphi = \varphi(\alpha \sin \theta, \alpha)$ . Уравнения типа (1), (2) сведены в [5] к интегральному уравнению Абеля. Показано также, что задача идентификации может иметь неоднозначное решение. Наконец, в обзорной работе [6] даны общая характеристика и перспективы этого направления исследования.

В настоящей работе дается точное решение задачи идентификации искомой зависимости с использованием описывающей функции второй гармоники, а также решение задачи определения двух взаимосвязанных зависимостей по описывающим функциям первой, второй и третьей гармоник. Приводится краткое описание схемы разработанного прибора компенсационного типа для измерения описывающих функций.

**Идентификация с использованием описывающей функции второй гармоники.** Практическая потребность в использовании описывающей

функции второй гармоники  $a_2(\alpha)$  возникает, когда технически трудно или невозможно выполнить измерение функции  $a_0(\alpha)$ . Так, при исследованиях нелинейных реактивных элементов электроники, в которых выполняется операция дифференцирования испытательного сигнала (заданного напряжения на вариконде или тока в индуктивности), выходной сигнал (ток, напряжение) не содержит нулевой гармоники. В этих случаях вместе (1) приходится рассматривать уравнение

$$a_2(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Phi_0(x \sin \theta) \cos 2\theta d\theta; \quad \varphi(0) = 0, \quad (3)$$

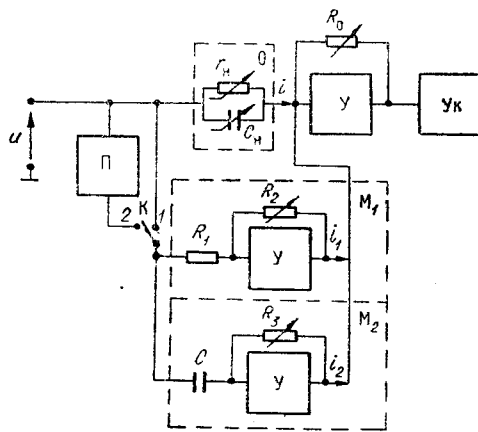
которое не сводится к упомянутым выше уравнениям Шлемильха или Абеля.

Однако методику решения уравнения Шлемильха можно распространить и на интегральное уравнение (3). В настоящей работе показано (см. приложение 1), что

$$\Phi_0(x) = - \int_0^{\pi/2} \left[ x a'_2(x \sin \psi) + 2 \frac{a_2(x \sin \psi)}{\sin \psi} \right] d\psi. \quad (4)$$

Располагая решениями  $\Phi_1(\alpha)$  и  $\Phi_0(\alpha)$  соответственно уравнений (2) и (3), можно определить искомую функцию  $\varphi(\alpha)$ .

Упрощенная структура прибора, обеспечивающего достаточно точные измерения мгновенных значений описывающих функций  $a_1(\alpha)$ ,  $a_2(\alpha)$ , показана на рисунке. Прибор компенсационного типа выполнен на широкополосных усилителях переменного тока с высокоомным входом (входные каскады собраны на полевых транзисторах) и глубокой отрицательной обратной связью: петлевое усиление больше  $10^3$  в диапазоне  $10-10^4$  гц. Исследуемый нелинейный объект включается (на рисунке объект представлен эквивалентной  $r_n C_n$ -схемой) в цепь обратной связи усилителя; при этом на объекте строго поддерживается заданный режим по напряжению. Когда измеряется  $a_1(\alpha)$ , ключ К находится в положении 1. При выбранной частоте и амплитуде испытательного сигнала дискретными переключениями  $R_2$ ,  $R_3$  можно осуществить независимое уравнивание по синфазной и квадратурной составляющим первой гармоники тока  $i$  соответственно токами  $i_1$  и  $i_2$ . Равновесие может контролироваться по минимуму показаний указателя действующего или амплитудного значения. В последнем случае указатель содержит избирательный усилитель. При измерениях  $a_2(\alpha)$  (ключ К в положении 2) процедура измерений остается прежней. Переключения  $R_1$ ,  $R_2$  могут градуироваться в значениях амплитуд синфазной и квадратурной составляющих первой и второй гармоник тока  $i$ .



Структурная схема прибора:

$u$  — испытательный синусоидальный сигнал;  $O$  — нелинейный объект (эквивалентная  $r_n C_n$  схема вариконда);  $U$  — широкополосный усилитель переменного тока;  $U_K$  — указатель действующего или амплитудного значения;  $M_1$ ,  $M_2$  — линейные модели;  $P$  — синфазный удвоитель частоты;  $K$  — переключатель;  $R_0$  — регулировка чувствительности.

Изложенная процедура измерения легко подтверждается аналитически, если воспользоваться передаточными функциями линейных моделей  $M_1$  и  $M_2$ , а для описания усилителя, включающего нелинейный объект, использовать эквивалентную передаточную функцию по первой и второй гармоникам.

Пример. Простоты ради положим, что искомая вольт-кулонная характеристика вариконда  $\varphi_C(x) = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4$ . Тогда  $\Phi_0(x) = \varphi_C(x) + \varphi_C(-x) = 2(A_2 x^2 - A_4 x^4)$ . Описывающая функция  $a_2(\alpha)$  должна быть задана или определена экспериментально. Здесь мы ее просто вычислим:

$$a_2(\alpha) = 2 \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (A_2 \alpha^2 \sin^2 \theta + A_4 \alpha^4 \sin^4 \theta) \times \\ \times \cos 2\theta d\theta = -\frac{1}{2} (A_2 \alpha^2 + A_4 \alpha^4).$$

Следовательно,  $a_2'(\alpha) = -(A_2 \alpha + 2 A_4 \alpha^3)$ . По формуле (4) находим

$$\Phi_0(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \left[ \alpha (A_2 \alpha \sin \psi + 2 A_4 \alpha^3 \sin^3 \psi) + \right. \\ \left. + 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{(A_2 \alpha^2 \sin^2 \psi + A_4 \alpha^4 \sin \psi)}{\sin \psi} \right] d\psi = 2 A_4 \alpha^2 \int_0^{\pi/2} \sin \psi d\psi + \\ + 3 A_4 \alpha^4 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \psi d\psi = 2 (A_2 \alpha^2 + A_4 \alpha^4) = \varphi_C(\alpha) + \varphi_C(-\alpha).$$

Рассматривая это решение совместно с решением  $\Phi_1(\alpha) = \varphi_C(\alpha) - \varphi_C(-\alpha)$ , определим искомую зависимость.

**Идентификация двух взаимосвязанных зависимостей.** Принятая эквивалентная  $r_n C_n$ -схема нелинейного объекта (вариконда) (см. рисунок), по существу, приводит к необходимости идентифицировать две взаимосвязанные зависимости: вольт-кулонную и вольт-амперную характеристики. Однако решение такой задачи не вызывает принципиальных затруднений, поскольку составляющие выходного сигнала (тока  $i$ ), обусловленные соответственно элементами  $r_n$  и  $C_n$ , легко разделяются, и, таким образом, описывающие функции первой и второй гармоник для  $r_n$  и  $C_n$  могут быть получены экспериментально.

Рассмотрим иной класс задач идентификации двух взаимосвязанных нелинейных зависимостей, приводящих к необходимости применения описывающих функций более высоких гармоник.

В инженерной практике часто возникает необходимость определения таких двух взаимосвязанных зависимостей, одна  $f(x)$  из которых проявляет нелинейные свойства относительно действующего значения испытательного сигнала и остается практически линейной в отношении мгновенных его значений, вторая  $\varphi(x)$  является линейной к действующим и нелинейной к мгновенным значениям сигнала. Поскольку эти два свойства одновременно проявляются у большинства нелинейных элементов электронной техники (тиристовые сопротивления, транзисторы, лампы) и особенно в блоках микросхем, представляющих физически единый объект с наперед заданным числом полюсов, доступных экспе-

риментатору, то ясно, что в этих случаях невозможно порознь осуществить измерение каждой из искомым зависимостей. Ниже дается точное решение такого рода задач при следующем ограничении:  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ .

При синусоидальном испытательном сигнале  $f(x) = h(\alpha) \sin \theta$ . Ясно, что теперь для раздельного определения  $f(\alpha)$  и  $\varphi(\alpha)$  недостаточно знать описывающие функции  $a_1(\alpha)$  и  $a_2(\alpha)$  соответственно первой и второй гармоник, поскольку в  $a_1(\alpha)$ , кроме  $f(\alpha)$ , входит составляющая  $\tilde{a}_1(\alpha)$  от  $\varphi(\alpha)$ , т. е.  $a_1(\alpha) = h(\alpha) + \tilde{a}_1(\alpha)$ . Ясно также, что описывающая функция  $a_3(\alpha)$  не зависит от  $f(\alpha)$ , а с ее помощью можно идентифицировать нечетную часть  $\varphi(\alpha)$ , т. е.  $\Phi_1(\alpha) = \varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)$  при  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$  (когда  $\varphi'(0)$  не задана, то идентифицировать  $\Phi_1(\alpha)$  возможно лишь с точностью до ее линейной части). Затем по известной  $\Phi_1(\alpha)$  легко определяется  $\tilde{a}_1(\alpha)$ , а следовательно, и  $f(\alpha)$ . Таким образом, формально задача сводится к решению интегрального уравнения

$$a_3(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Phi_1(\alpha \sin \theta) \sin 3\theta d\theta. \quad (5)$$

Ниже (см. приложение 2) дано решение уравнения (5) при несущественных для технических задач ограничениях, налагаемых на вид функции  $a_3(\alpha)$ . Решение

$$\begin{aligned} \Phi_1(\alpha) = - \int_0^{\pi/2} \left[ a_3'(\alpha \sin \psi) \alpha \sin \psi + 5 a_3(\alpha \sin \psi) + \right. \\ \left. + 8 \alpha \sin \psi \int_0^{\alpha \sin \psi} \frac{a_3(\xi)}{\xi^2} d\xi \right] d\psi \end{aligned} \quad (6)$$

вместе с  $\Phi_0(\alpha)$  и  $a_1(\alpha)$  позволяет определить  $\varphi(\alpha)$  и  $f(\alpha)$ .

## Приложение 1

Пусть в уравнении

$$a_2(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Phi_0(\alpha \sin \alpha) \cos 2\theta d\theta \quad (1П)$$

функция  $a_2(\alpha)$  непрерывно дифференцируется на интервале  $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ . Продифференцируем (1П) по  $\alpha$ :

$$a_2'(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Phi_0'(\alpha \sin \theta) \sin \theta \cos 2\theta d\theta.$$

Заменяя  $\alpha$  на  $\alpha \sin \psi$  и интегрируя по  $\psi$ , получим

$$\int_0^{\pi/2} a_2'(\alpha \sin \psi) d\psi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \int_0^{\pi/2} \Phi_0'(\alpha \sin \psi \sin \theta) \sin \theta \cos 2\theta d\theta \right] d\psi.$$

Поменяем порядок интегрирования в повторном интеграле и введем вместо  $\psi$  переменную  $\chi$ , определяемую уравнением

$$\sin \chi = \sin \theta \sin \psi,$$

и, учитывая, что

$$d\psi = \frac{\cos \chi d\chi}{\sin \theta \cos \psi},$$

получим

$$\int_0^{\pi/2} a_2'(\alpha \sin \psi) d\psi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \int_0^{\theta} \frac{\Phi_0'(\alpha \sin \chi) \cos \chi \cos 2\theta}{\cos \psi} d\chi \right] d\theta.$$

Вновь меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$\int_0^{\pi/2} a_2'(\alpha \sin \psi) d\psi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Phi_0'(\alpha \sin \chi) \cos \chi \left[ \int_{\chi}^{\pi/2} \frac{\sin \theta \cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2 \chi - \cos^2 \theta}} d\theta \right] d\chi.$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{\chi}^{\pi/2} \frac{\sin \theta \cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2 \chi - \cos^2 \theta}} d\theta &= \int_{\chi}^{\pi/2} \frac{(1 - 2\cos^2 \theta) d\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \chi - \cos^2 \theta}} = \arcsin \frac{\cos \theta}{\cos \chi} \Big|_{\chi}^{\pi/2} + \\ &+ \cos \theta \sqrt{\cos^2 \chi - \cos^2 \theta} \Big|_{\chi}^{\pi/2} - \cos^2 \chi \arcsin \frac{\cos \theta}{\cos \chi} \Big|_{\chi}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} (\cos^2 \chi - 1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} a_2'(\alpha \sin \theta) d\theta &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Phi_0'(\alpha \sin \chi) \cos \chi \frac{\pi}{2} (\cos^2 \chi - 1) d\chi = \\ &= - \int_0^{\pi/2} \Phi_0'(\alpha \sin \chi) \sin^2 \chi d\sin \chi. \end{aligned}$$

Умножим последнее выражение на  $\alpha^3$ :

$$\alpha^3 \int_0^{\pi/2} a_2'(\alpha \sin \psi) d\psi = - \int_0^{\pi/2} \Phi_0'(\alpha \sin \theta) (\alpha \sin \theta)^2 d(\alpha \sin \theta) = - \int_0^{\alpha} \Phi_0'(u) u^2 du.$$

Дифференцируя по  $\alpha$  и преобразуя, окончательно получим

$$\Phi_0(\alpha) = - \int_0^{\pi/2} \left[ \alpha a_2'(\alpha \sin \psi) + 2 \frac{a_2(\alpha \sin \psi)}{\sin \psi} \right] d\psi. \quad (2\Pi)$$

Заметим, что законность проведенных выше операций дифференцирования и изменения порядка интегрирования следует из известных теорем математического анализа [3].

## Приложение 2

Пусть в уравнении

$$a_3(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Phi_1(\alpha \sin \theta) \sin 3\theta d\theta \quad (3\Pi)$$

функция  $a_3(\alpha)$  трижды непрерывно дифференцируема на интервале  $-\pi < \alpha \leq \pi$  (это предположение в дальнейшем можно ослабить).

Преобразуя (3\Pi) так же, как и (1\Pi) в приложении 1 (за исключением дифференцирования), приведем его к виду

$$\int_0^{\pi/2} a_3(\alpha \sin \psi) d\psi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Phi_1(\alpha \sin \chi) \cos \chi \left[ \int_{\chi}^{\pi/2} \frac{\sin 3\theta d\theta}{\sqrt{\cos^2 \chi - \cos^2 \theta}} \right] d\chi.$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{\chi}^{\pi/2} \frac{\sin 3\theta d\theta}{\sqrt{\cos^2 \chi - \cos^2 \theta}} &= \int_{\chi}^{\pi/2} \frac{-1 + 4 \cos^2 \theta}{\sqrt{\cos^2 \chi - \cos^2 \theta}} d \cos \theta = \\ &= -\arcsin \frac{\cos \theta}{\cos \chi} \Big|_{\chi}^{\pi/2} - 2 \cos \theta \sqrt{\cos^2 \chi - \cos^2 \theta} \Big|_{\chi}^{\pi/2} + \\ &+ 2 \cos^2 \chi \arcsin \frac{\cos \theta}{\cos \chi} \Big|_{\chi}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} (2 \cos^2 \chi - 1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^{\pi/2} a_3 (\alpha \sin \psi) d\psi = \int_0^{\pi/2} \Phi_1 (\alpha \sin \chi) (1 - 2 \sin^2 \chi) d \sin \chi.$$

Умножая на  $\alpha^3$  и заменяя  $\alpha \sin \chi$  на  $u$ , получим

$$\alpha^3 \int_0^{\pi/2} a_3 (\alpha \sin \psi) d\psi = \alpha^2 \int_0^{\alpha} \Phi_1 (u) du - 2 \int_0^{\alpha} u^2 \Phi_1 (u) du. \quad (4 \Pi)$$

Продифференцируем (4П) 3 раза по  $\alpha$  и обозначим

$$- [\alpha^3 \int_0^{\pi/2} a_3 (\alpha \sin \psi) d\psi]''' = F(\alpha);$$

тогда

$$\alpha^2 \Phi_1'' (\alpha) + 2 \alpha \Phi_1' (\alpha) - 2 \Phi_1 (\alpha) = F(\alpha). \quad (5 \Pi)$$

Выражение (5П) является уравнением Эйлера и разрешимо в квадратурах. Общее решение уравнения (5П) с учетом того, что  $\Phi_1(0)$  ограничена, имеет вид

$$\Phi_1 (\alpha) = \alpha \int_0^{\alpha} \frac{F(\xi)}{3 \xi^2} d\xi - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\alpha} \frac{\xi F(\xi)}{3} d\xi + c \alpha. \quad (6 \Pi)$$

где  $c$  — произвольная константа. Подставляя в (6П)  $F(\alpha)$  и интегрируя несколько раз по частям в предположении, что функция  $\Phi_1(\alpha)$  нечетная, а  $\Phi_1'(0) = 0$ , окончательно получим

$$\Phi_1 (\alpha) = - \int_0^{\pi/2} \left[ a_3' (\alpha \sin \psi) \alpha \sin \psi + 5 a_3 (\alpha \sin \psi) + \left( 8 \int_0^{\alpha \sin \psi} \frac{a_3(\xi)}{\xi^2} d\xi \right) \alpha \sin \psi \right] d\psi.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Малюженец. О зависимости между амплитудной характеристикой и характеристикой нелинейного элемента.— Докл. АН СССР, 1946, т. LIV, № 6.
2. L. A. Zadeh. On the Identification Problem.— IRE Trans. on Circuit Theory, 1956, v. CT-3.
3. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа. М., Физматгиз, 1963.
4. Я. З. Цыпкин. О связи эквивалентного коэффициента усиления нелинейного элемента с его характеристикой.— Автоматика и телемеханика, 1956, т. 17, № 6.
5. Дж. Э. Гибсон, Э. К. ди Тада. Вычисление обратной описывающей функции.— Труды II Международного конгресса IFAC. Теория непрерывных автоматических систем. М., «Наука», 1965.
6. Н. М. Александровский, А. М. Дейч. Методы определения динамических характеристик нелинейных объектов (обзор).— Автоматика и телемеханика, 1968, № 1.

Поступила в редакцию  
27 ноября 1969 г.