АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1970

УДК 62-50

М. С. ХАЙРЕТДИНОВ
(*Новосибирск*)

К ВОПРОСУ О ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБОЧНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ШУМОВЫХ СИГНАЛОВ

При решении задачи классификации шумовых сигналов, представляющих собой случайные нормальные процессы, на классы, последние часто могут быть представлены в пространстве некоторой системы функций от исходных сигналов — признаков — пересекающимися между собой многомерными нормальными распределениями с разными векторами средних значений и отличающимися ковариационными матрицами. В этом случае оптимальной разделяющей поверхностью является гиперквадратическая поверхность. При вынесении решения в классификаторе сигналов гиперквадратической поверхности можно поставить в соответствие квадратичную дискриминантную функцию (к. д. ф.). Для классификации указанных сигналов с помощью гиперплоскости решение будем принимать на основе линейной дискриминантной функции (л. д. ф.). Если в процессе решения сглаживать значения дискриминантной функции, то можно уменьшать вероятности ошибочной классификации исходных сигналов. Предполагая, что оба типа дискриминантных функций являются непрерывными функциями времени, интересно установить для каждой из них зависимость вероятности ошибочной классификации от времени сглаживания T. На основании полученной зависимости можно найти соотношение между временами сглаживания для к. д. ф. и л. д. ф. в случае равных вероятностей ошибочной классификации для обеих функций. Последняя задача возникает тогда, когда вопросы простоты конструкции классификатора сигналов и ограничения времени анализа их для принятия решения имеют первостепенное значение.

Пусть шумовой сигнал, принадлежащий к одному из двух классов — 1-му или 2-му, определен совокупностью признаков $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в n-мерном пространстве. Считаем, что соответствующие векторы средних значений и ковариационные матрицы совместного n-мерного распределения вероятностей признаков для каждого из классов не равны между собой. Каждый из признаков представляет собой стационарный нормальный случайный процесс с математическим ожиданием m_i и корреляционной функцией вида $D_i e^{-\beta|\tau|}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Примем, что признаки не коррелированы друг с другом. Гиперквадратической разделяющей поверхности при принятии решения поставим в соответствие квадратичную дискриминантную функцию вида [1] $y_k = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + \sum_{i=1}^{n} w_{ii}^2 x_i^2$, а разделяющей поверхности в виде гиперплоскости — линейную дискриминантную функцию $y_л = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$. Пусть времени сглаживания к. д. ф. $T_к$ соответствует вероятность ошибочной классификации α_k, а в случае л. д. ф. при времени сглаживания $T_л$ получим ошибку $\alpha_л$. При указанных условиях необходимо определить зависимости $\alpha_л = f_1(T)$, $\alpha_к = f_2(T)$ и установить соотношение $T_к = f(T_л)$ при $\alpha_к = \alpha_л$. С учетом того, что распределения признаков $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются нормальными, $y_л(t)$ также будет иметь нормальное распределение $N(\mu_{1л}, \sigma_{1л})$ в случае 1-го класса и $N(\mu_{2л}, \sigma_{2л})$ в случае 2-го класса. Здесь $\mu_{1л}, \mu_{2л}$ и $\sigma_{1л}, \sigma_{2л}$ — математические ожидания и среднеквадратичные значения распределений для 1-го и 2-го классов соответственно.

Пусть решение о принадлежности образа к одному из классов принимается не по мгновенным значениям $y_л(t)$, а на основе оценки его математического ожидания, полученной за время усреднения T, что, например, эквивалентно пропусканию процесса $y_л(t)$ через апериодическое звено 1-го порядка с постоянной времени T. Тогда с использованием [2] полная вероятность ошибочной классификации может быть записана в виде

$$\alpha_л = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_л}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) dz.$$

Для возможности пользования таблицей интеграла ошибок это выражение запишем так:

$$\alpha_л = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a_л} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) dz\right) = 2\,(1 - \Phi(a_л)). \tag{1}$$

Здесь $a_л = \dfrac{M[\overset{*}{\mu}_{1л}] - M[\overset{*}{\mu}_{2л}]}{\overset{*}{\sigma}_{1л} + \overset{*}{\sigma}_{2л}}$ — величина, характеризующая расстояние между классами; $\overset{*}{\mu}_{1л}, \overset{*}{\mu}_{2л}$ — оценки математических ожиданий $y_л(t)$ для 1-го и 2-го классов; $\overset{*}{\sigma}_{1л}, \overset{*}{\sigma}_{2л}$ — соответственно среднеквадратические значения оценок; $\Phi(a_л)$ — интеграл вероятности ошибки.

Если оценки $\overset{*}{\mu}_{1л}$ и $\overset{*}{\mu}_{2л}$ получаются путем пропускания $y_л(t)$ через апериодическое звено 1-го порядка с постоянной времени T, то [3]

$$M[\overset{*}{\mu}_{1л}] = \mu_{1л}\,(1 - e^{-T_у/T}); \quad M[\overset{*}{\mu}_{2л}] = \mu_{2л}\,(1 - e^{-T_у/T}),$$

где $T_у$ — время установления процесса на выходе апериодического звена, по истечении которого считываются оценки. По условию $x_i(t)$ имеет корреляционную функцию $D_i e^{-\beta|\tau|}$; тогда $y_л(t)$ будет иметь корреляционную функцию аналогичного вида:

$$R_л(\tau) = D_л\, e^{-\beta|\tau|}, \tag{2}$$

где $D_л = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 D_i$. Действительно,

$$R_л(\tau) = M[\overset{\circ}{y}_л(t_1)\, \overset{\circ}{y}_л(t_2)] = M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i(t_1) - \mu_1\right) \times\right.$$

$$\times\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i (t_2) - \mu_2\Big)\Big] = M\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i (x_i(t_1) - m_i)\Big)\times$$

$$\times\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i (x_i(t_2) - m_i)\Big)\Big] = M\Big[\sum_{i=1}^{n} w_i \overset{\circ}{x}_i (t_1) \sum_{i=1}^{n} w_i \overset{\circ}{x}_i (t_2)\Big] =$$

$$= M\Big[\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \overset{\circ}{x}_i (t_1) \overset{\circ}{x}_i (t_2) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \overset{\circ}{x}_i (t_1) \overset{\circ}{x}_j (t_2)\Big] \quad (i \neq j).$$

Используя условие некоррелированности x_i и y_j между собой, на основании приведенных выводов получим соотношение (2). Если корреляционная функция $y_л(t)$ описывается выражением (2), дисперсии оценок $\mu_{1л}^*$ и $\mu_{2л}^*$, согласно [2], будут соответственно равны:

$$D_{1л}^* = \frac{D_{1л}}{\beta T + 1}(1 - e^{-2T_у/T}); \quad D_{2л}^* = \frac{D_{2л}}{\beta T + 1}(1 - e^{-2T_у/T}).$$

С учетом значений $M[\mu_{1л}^*]$, $M[\mu_{2л}^*]$, $D_{1л}^*$, $D_{2л}^*$ зависимость $a_л$ от T может быть представлена в виде

$$a_л = \frac{\mu_{1л} - \mu_{2л}}{\sigma_{1л} + \sigma_{2л}} \sqrt{\frac{1 - e^{-T_у/T}}{1 + e^{-T_у/T}}}\sqrt{\beta T + 1}.$$

Для получения истинных значений $M[\mu_{1л}^*]$ и $M[\mu_{2л}^*]$ необходимо, чтобы выполнялось неравенство $T_у/T \geqslant 3$. Тогда $\sqrt{\frac{1 - e^{-T_у/T}}{1 + e^{-T_у/T}}} \approx 1$. Обозначив $\frac{\mu_{1л} - \mu_{2л}}{\sigma_{1л} + \sigma_{2л}} = к_1$, получим

$$a_л = к_1 \sqrt{\beta T + 1}. \qquad (3)$$

Так как $\alpha_л$ является функцией от $a_л$, то в конечном итоге $\alpha_л$ является **функцией от T — времени сглаживания случайного процесса** $y_л(t)$. Таким образом, получаем зависимость $\alpha_л = f_1(T)$.

Аналогичную функциональную зависимость от T можно получить и для $\alpha_к$. Действительно, если число признаков $n \geqslant 5$, то, используя [4], можно показать, что распределение $y_к(t)$ достаточно точно аппроксимируется нормальным распределением с параметрами $\mu_{1к}$, $\sigma_{1к}$ для 1-го класса и $\mu_{2к}$, $\sigma_{2к}$ для 2-го класса.

По аналогии с рассуждениями, использовавшимися при выводе соотношения для $\alpha_л$, выражение для $\alpha_к$ можно записать в виде

$$\alpha_к = 2(1 - \Phi(a_к)), \qquad (4)$$

где

$$a_к = \frac{M[\mu_{1к}^*] - M[\mu_{2к}^*]}{\sigma_{1к}^* + \sigma_{2к}^*}.$$

При рассмотрении данного случая можно показать, что корреляционная функция $R_к(\tau)$ стационарного случайного процесса $y_к(t)$ при определенных условиях может быть аппроксимирована выражением вида $D_к e^{-\beta|\tau|}$. Рассмотрим это:

$$R_к(\tau) = M[\overset{\circ}{y}_к(t_1)\,\overset{\circ}{y}_к(t_2)] = M\Big[\sum_{i=1}^{n} w_i \overset{\circ}{x}_i(t_1) + \sum_{i=1}^{n} w_{ii} \overset{\circ}{x}{}_i^2(t_1)\Big] \times$$

$$\times \Big(\sum_{i=1}^{n} w_i \overset{\circ}{x}_i(t_2) + \sum_{i=1}^{n} w_{ii} \overset{\circ}{x}{}_i^2(t_2)\Big)\Big].$$

Здесь $\overset{\circ}{x}{}_i^2 = x_i^2 - M[x_i^2]$. Раскрывая скобки и имея в виду условие некоррелированности x_i с x_j, а также то, что в соответствии с [5]

$$M[\overset{\circ}{x}_i(t_1)\,\overset{\circ}{x}{}_i^2(t_2)] = 2\,m_i D_i;\quad M[\overset{\circ}{x}{}_i^2(t_1)\,\overset{\circ}{x}{}_i^2(t_2)] = 4\,m_i^2 D_i + 2\,D_i^2,$$

получим

$$R_к(\tau) = e^{-\beta|\tau|}\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i^2 D_i + 4\sum_{i=1}^{n} w_i w_{ii} m_i D_i + 4\sum_{i=1}^{n} w_{ii}^2 m_i^2 D_i\Big) +$$

$$+ e^{-2\beta|\tau|}\, 2\sum_{i=1}^{n} w_{ii}^2 D_i^2.$$

Если первое слагаемое значительно больше второго (в частности, когда $D_i < 1$, вторым слагаемым можно пренебречь по сравнению с первым как членом второго порядка малости),

$$R_к(\tau) = D_к e^{-\beta|\tau|},\ \text{где}\ D_к = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 D_i + 4\sum_{i=1}^{n} w_i w_{ii} m_i D_i +$$

$$+ 4\sum_{i=1}^{n} w_{ii}^2 D_i m_i^2.$$

С учетом этого получим

$$a_к = к_2\sqrt{\beta T + 1}, \tag{5}$$

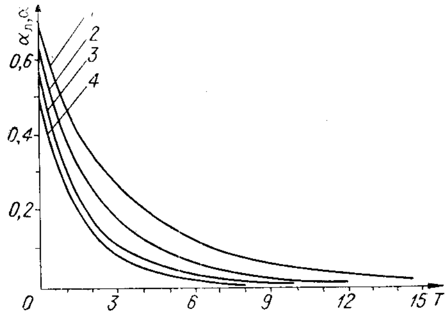
где $к_2 = \frac{\mu_{1к} - \mu_{2к}}{\sigma_{1к} + \sigma_к}$. Отсюда вытекает зависимость $\alpha_к = f_2(T)$. Значения $к_1$ и $к_2$ могут быть получены экспериментально или расчетным путем. Так, например, если классификатор построен с использованием критерия минимума среднего квадрата ошибки [6], то оптимальный вектор $\overline{w}$ будет определяться соотношением

$$\overline{w} = \frac{1}{4}(\overline{m}_1 - \overline{m}_2)^T\Big(\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \Gamma\Big)^{-1},$$

где Σ_1, Σ_2 — ковариационные матрицы случайного вектора $\overline{X}$ соответствующего класса; $\Gamma = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{2}\overline{m}_i\,\overline{m}_i^T - \frac{1}{2}\,\overline{m}\,\overline{m}^T\Big)$; $\overline{m}_1$, $\overline{m}_2$ — средние значения вектора $\overline{X}$ соответственно для 1-го и 2-го классов; $\overline{m} = \frac{1}{2}(\overline{m}_1 + \overline{m}_2)\Big)$.

Определив компоненты w_i вектора $\overline{W}$ и зная параметры признаков x_i, можно вычислить значения $\mu_{1л}$, $\mu_{2л}$, $\sigma_{1л}$, $\sigma_{2л}$ и $\mu_{1к}$, $\mu_{2к}$, $\sigma_{1к}$, $\sigma_{2к}$ по полученным выше соотношениям и построить зависимости $\alpha_л = f_1(T)$,

$\alpha_к = f_2(T)$. На рисунке для $\beta=2$ приведены указанные зависимости для значений $к_1$ и $к_2$, определенных экспериментально. Каждая пара значений $к_1$ и $к_2$ получалась за счет изменения расстояния между классами на входе классификатора. Расстояние менялось путем изменения соотношения между ковариационными матрицами обоих классов, т. е. $\Sigma_1 = \lambda \Sigma_2$.



Приведенные графики получены при следующих параметрах: $к_1 = 0{,}415$, $\lambda=1{,}8$ (кривая *1*); $к_2=0{,}51$, $\lambda=1{,}8$ (кривая *2*); $к_1=0{,}59$, $\lambda=1{,}2$ (кривая *3*); $к_2=0{,}64$, $\lambda=1{,}2$ (кривая *4*). При $\alpha_л = \alpha_к$ на основании соотношений (1), (3)—(5) следует, что $a_л = a_к$ или $к_1\sqrt{\beta T_л + 1} = к_2\sqrt{\beta T_к + 1}$. Отсюда

$$T_к = \frac{1}{\beta}\left[\frac{к_1^2}{к_2^2}(\beta T_л + 1) - 1\right].$$

Итак,

а) при $\alpha_л = \alpha_к$ и фиксированном значении β время сглаживания $T_к$ пропорционально времени сглаживания $T_л$ с коэффициентом пропорциональности $\left(\frac{к_1}{к_2}\right)^2$, определяемым соотношением расстояний между классами в случае л. д. ф. и к. д. ф.;

б) эффективная зависимость (см. рисунок) вероятностей ошибок $\alpha_л$ и $\alpha_к$ от времени сглаживания T проявляется в области больших ошибок. В области малых ошибок большие изменения T приводят к незначительным изменениям $\alpha_л$ и $\alpha_к$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Нильсон. Обучающиеся машины. М., «Мир», 1967.
2. Я у, Чжуан. О возможности использования линейных классификаторов для распознавания вероятностных классов образов.— ТИИЭР, 1966, т. 54, № 12.
3. Л. Л. Роткоп. Статистические методы исследования на электронных моделях. М., «Энергия», 1967.
4. М. Д. Юдин. Предельная теорема для сумм зависимых случайных величин.— ИВУЗ, Математика, 1962, № 1.
5. М. С. Хайретдинов. Об эффективности коррелированных признаков в задачах классификации образов.— Автометрия, 1970, № 1.
6. S. S. Yay and P. S. Chuang. Statistical Properties of Linear Multi-Category Pattern Classifiers Based on the Least-Mean-Square Error Criterion.— IEEE Trans. on Information Theory, 1968, v. IT-14, № 5.

Поступила в редакцию
18 декабря 1969 г.,
окончательный вариант —
4 февраля 1970 г.