АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1970

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АВТОМЕТРИИ

УДК 621.372.44

Р. Д. БАГЛАЙ

(Новосибирск)

ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ МОМЕНТОВ И ИХ СВЯЗИ С ОБОБЩЕННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ

При экспериментальном определении моментов α_i функции $f(t)$, $0<t<T$, представленной сигналом, приходится физически моделировать выражение

$$\alpha_i = \int_0^T f(t)\, t^i\, dt, \quad i=0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

что приводит к двум технически трудно выполнимым операциям: перемножению сигналов и «чистому» интегрированию. Если заранее известен интервал $(0, T)$, то легко избавиться от перемножения сигналов. В самом деле, интегрируя (1) по частям i раз, получим

$$\alpha_i = \int_0^T f(t)\, t^i\, dt = T^i \int_0^T f(t)\, dt - i T^{i-1} \int_0^T \int_0^t f(t)\, dt\, dt + \\ + \ldots + (-1)^i\, i!\, f^{(-i)}(t). \tag{2}$$

Здесь $f^{(-i)}(t)$ означает i-кратное интегрирование сигнала $f(t)$ в пределах $(0, T)$. Структура преобразователя, соответствующая выражению (2), очевидна. В таком преобразователе не требуется устройство перемножения сигналов, однако нужны и в большом числе устройства «чистого» интегрирования. Если же заранее интервал $(0, T)$ не известен, то можно применить формулу Коши [1], связывающую однократный интеграл с многократным. В наших обозначениях эта формула выглядит так:

$$\int_0^T f(t)\, (T-t)^n\, dt = \int_0^T dt \cdot 1 \int_0^t dt \cdot 2 \int_0^t dt \ldots n \int_0^t f(t)\, dt. \tag{3}$$

Из (3) непосредственно следует структура преобразователя для экспериментального определения так называемых зеркальных моментов сигнала $f(t)$ [2]. Поскольку $\int_0^T f(t)\,(T-t)^n\,dt = \int_0^T f(T-t)\,t^n\,dt$, то зеркальные моменты $f(t)$ — это то же, что прямые моменты функции $f(T-t)$, зеркальной к $f(t)$ относительно прямой $t = \frac{T}{2}$. Зеркальные моменты функции $f(t)$ не менее информативны, чем ее прямые моменты, и могут использоваться наравне с последними.

В обоих изложенных выше приемах мы избавились от устройств, перемножающих сигналы, ценою многократного применения устройств «чистого» интегрирования. Это высокая цена, если учесть трудность реализации интеграторов и неизбежное накопление погрешностей при многократном их использовании. По этой причине (2) и (3) малопригодны для аппаратурного определения высших моментов α_i, $i>1$. Между тем высшие моменты позволяют решать задачи, связанные со структурным анализом сигнала, построением классификаторов [3] и др.

В настоящей работе показано, как можно одновременно избавиться от устройств перемножения сигналов и устройств «чистого» интегрирования при экспериментальном определении моментов α_i. Кроме того, установлена связь между моментами α_i и коэффициентами разложения сигнала $f(t)$ по различным ортогональным системам полиномов и на ее основе выявлена зависимость между спектрами разложения сигнала $f(t)$ по ортогональным системам с различными весовыми функциями.

Введем в рассмотрение коэффициенты Пуассона (β_i) сигнала $f(t)$ [4], т. е.

$$\beta_i = \frac{1}{i!}\int_0^\infty f(t)\, t^i e^{-t}\, dt = \frac{1}{i!}\, \gamma_i. \tag{4}$$

Покажем, что моменты α_i можно представить взвешенной суммой β_i, а коэффициенты β_i экспериментально получить из сигнала $f(t)$ с помощью последовательного набора ненагружающих друг друга апериодических звеньев. Вначале рассмотрим принципиальную сторону дела, а затем — практическую целесообразность.

Вместо экспоненты e^{-t} подставим в (4) ее ряд Маклорена. Затем, почленно интегрируя, получим:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{1}{0!}\left[\alpha_0 - \frac{\alpha_1}{1!} + \frac{\alpha_2}{2!} - \frac{\alpha_3}{3!} + \frac{\alpha_4}{4!} - \frac{\alpha_5}{5!} + \dots\right];\\
\beta_1 &= \;.\;.\; \frac{1}{1!}\left[\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{1!} + \frac{\alpha_3}{2!} - \frac{\alpha_4}{3!} + \frac{\alpha_5}{4!} - \dots\right];\\
\beta_2 &= \;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{1}{2!}\left[\alpha_2 - \frac{\alpha_3}{1!} + \frac{\alpha_4}{2!} - \frac{\alpha_5}{3!} + \dots\right];\\
\beta_3 &= \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{1}{3!}\left[\alpha_3 - \frac{\alpha_4}{1!} + \frac{\alpha_5}{2!} - \dots\right];\\
\beta_4 &= \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{1}{4!}\left[\alpha_4 - \frac{\alpha_5}{1!} + \dots\right];
\end{aligned} \tag{5}$$

Каждый ряд, записанный в скобках правой части системы (5), равномерно сходится к своему γ_i для реально встречающихся сигналов $f(t)$ при любом конечном t. Суммируя ряды (5), начиная с первого, получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\gamma_i = \alpha_0. \tag{6}$$

Если суммировать ряды (5), начиная со второго, т. е. с $i=1$, с весом i, то можно убедиться, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\,\beta_i = \sum_{i=1}^{\infty} i\,\frac{1}{i!}\,\gamma_i = \alpha_1. \tag{7}$$

Если же начать с $i=2$, с весом $i(i-1)$, то

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)\beta_i = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{i(i-1)}{i!}\gamma_i = \alpha_2 \tag{8}$$

и вообще

$$\sum_{i=k}^{\infty} i(i-1)\ldots(i-k+1)\beta_i = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{i(i-1)\ldots(i-k+1)}{i!}\gamma_i =$$

$$= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{(i-k)!}\gamma_i = \alpha_k. \tag{9}$$

Обозначив $i-k=r$, можно (9) записать еще и так:

$$\alpha_к = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\gamma_{r+k}. \tag{10}$$

Как видим, моменты (α) выражаются бесконечными суммами коэффициентов Пуассона (β). Практически нас интересуют такие суммы, которые при небольшом числе членов давали бы хорошее приближение искомых моментов. Поэтому представляет интерес сила сходимости рядов типа (10). Однако здесь все в порядке: коэффициенты γ ограничены, следовательно, в рядах типа (10) остаток, выражающий погрешность приближения, может быть записан в виде

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r!}\gamma_{r+k} \leqslant \gamma_{\max} \sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r!}, \tag{11}$$

где $\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r!}$ — остаток быстро сходящегося ряда, представляющего число e.

Для того чтобы полнее выяснить практическую целесообразность экспериментального определения моментов излагаемым методом, остановимся подробнее на определении нулевого момента (α_0), т. е. на определении интеграла от сигнала $f(t)$*. Пусть сигнал $f(t)$ подключен ко входу последовательной цепочки апериодических ненагружающих друг друга звеньев с передаточными функциями $\frac{1}{p+1}$. Напряжение на выходе i-го звена обозначим через $u_i(p)$, $i=1, 2,\ldots, n$, $p=\sigma+j\omega$. Тогда можем записать:

$$u_1(p) = \frac{1}{p+1} f(p) = \frac{1}{p} f(p) - \frac{1}{p} u_1(p)$$

или

$$u_1(T) = \int_0^{\infty} f(T-t)\, e^{-t}\, dt;$$

$$u_2(p) = \left(\frac{1}{p+1}\right)^2 f(p) = \frac{1}{p} u_1(p) - \frac{1}{p} u_2(p)$$

---

* Для разработки образцовых индуктивностей этот вопрос обсуждается в [5].

или

$$u_2(T) = \int_0^\infty f(T-t)\,\frac{t}{1!}\,e^{-t}\,dt; \tag{12}$$

$$u_n(p) = \left(\frac{1}{p+1}\right)^n f(p) = \frac{1}{p}u_{n-1}(p) - \frac{1}{p}\,u_n(p)$$

или

$$u_n(T) \doteq \int_0^\infty f(T-t)\,\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-t}\,dt.$$

Здесь $u_1(T)$, $u_2(T)$,..., $u_n(T)$ — коэффициенты Пуассона функции $f(T-t)$. Суммируя выходные напряжения каждого звена, получим

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(p) = \frac{1}{p} f(p) - \frac{1}{p}\,u_n(p) = \frac{1}{p}\,f(p)\left[1 - \left(\frac{1}{p+1}\right)^n\right]. \tag{13}$$

Видим, что ошибка обусловлена комплексным членом

$$\left(\frac{1}{p+1}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2 + (\sigma+1)^2}}\right)^n e^{jn\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{\omega}{\sigma+1}\right)} \tag{14}$$

и зависит от степени «n», т. е. от числа используемых звеньев. Если для нижней частоты $\omega_н$ входного сигнала подкоренное выражение $\omega_н^2 + (\sigma+1)^2 \simeq 10$, то модуль числа (14) для одного апериодического звена ($n=1$) составит величину порядка 1/3, в то время как при трех последовательно включенных звеньях ($n=3$) модуль числа (14) уменьшается приблизительно до $\frac{1}{100}$. Это свидетельствует о достаточно быстром уменьшении погрешности при физическом моделировании оператора $\frac{1}{p}$.

Заметим, что цепочка звеньев с передаточными функциями $\frac{p}{p+1}$ дает

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(p) = pf(p)\left[1 - \left(\frac{p}{p+1}\right)^n\right]. \tag{15}$$

Это указывает на возможность физического моделирования оператора $p = \frac{d}{dt}$. И вообще выражение

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(p) = Af(p)\left[1 - \left(\frac{A}{A-1}\right)^n\right] \tag{16}$$

можно рассматривать как алгоритм физического моделирования линейного однородного оператора A, который может быть представлен отношением сопротивлений (проводимостей) двух двухполюсных цепей.

Обратим внимание на то, когда сигнал $f(t)$ представляет собой воспроизведение какой-либо характеристики физического объекта или зависимости, заданной графиком. В таких случаях достаточно изменить порядок воспроизведения, т. е. осуществить его от конца к началу, и мы получим зеркальный к $f(t)$ сигнал, а именно $f(T-t)$; свертка $f(T-t)$ с $\frac{t^i}{i!}e^{-t}$ дает коэффициенты Пуассона сигнала $f(t)$. Ясно также, что для симметричных сигналов коэффициенты Пуассона функций $f(t)$ и $f(T-t)$ совпадают, если отсчеты взяты в момент $t=T$.

Далее рассмотрим связь моментов α_i с коэффициентами разложения сигнала по ортогональным полиномам Якоби, Лежандра, Лягерра, Чебышева и системе импульсных функций. Если в нормированных полиномах Лежандра

$$P_i(x)=\sqrt{\frac{2i+1}{2}}\,\frac{1}{2^i\,i!}\,\frac{d^i}{dx^i}\,(x^2-1)^i,$$

ортогональных на $(-1\leqslant x\leqslant+1)$, осуществить подстановку $x=\frac{2}{T}\,t-1$ и таким образом сместить интервал ортогональности на $(0\leqslant t\leqslant T)$, то i-й коэффициент d_i разложения сигнала $f(t)$ по $P_i\left(\frac{2}{T}\,t-1\right)$ можно выразить через α_i следующим очевидным образом:

$$d_i=\frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\,P_i\left(\frac{2}{T}\,t-1\right)dt=\sum_{k=0}^{i}(-1)^k D_{k,\,i,\,T}\,\alpha_{i-k}. \qquad (17)$$

Здесь $D_{i,\,k,\,T}$ — числа, которые можно получить, если раскрыть бином $(x^2-1)^i$, предварительно выполнив указанную выше подстановку, а затем дифференцировать i раз полученную сумму. (В случае применения полиномов Якоби коэффициенты разложения также будут выражаться через линейную комбинацию моментов α_i). С другой стороны, коэффициенты (c_i) разложения сигнала $f(t)$ по полиномам Лягерра $L_i=$ $=\sum\limits_{k=0}^{i}C_i^k\,\frac{(-t)^k}{k!}$, ортогональным с весом e^{-t}, исключительно просто выражаются через коэффициенты Пуассона (β):

$$c_i=\int\limits_0^\infty f(t)\sum_{k=0}^{i}C_i^k\,\frac{(-t)^k}{k!}\,e^{-t}\,dt=\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\,\beta_k, \qquad (18)$$

где C_i^k — числа сочетаний.

Обращаясь к полученным ранее соотношениям между α_i и β_i [см. (9)], можно выявить связь спектров разложения $f(t)$ по полиномам Лягерра, Лежандра, Якоби. Это означает, что с помощью преобразователя, составленного из последовательно включенных и не нагружающих друг друга апериодических звеньев, можно посредством взвешенного суммирования получить коэффициенты разложения по любой из названных выше ортогональных систем. А с учетом так называемого «телескопического сдвига», предложенного Ланциошем [6], получим разложение сигнала $f(t)$ по полиномам Чебышева. Но разложение $f(t)$ по полиномам Чебышева — это лишь иная трактовка разложения по косинусам функции $f(\cos\theta)$, четной относительно угла θ. Как видим, круг замыкается через обычное преобразование Фурье.

Для экспериментального определения коэффициентов разложения по полиномам и функциям Лягерра, по полиномам Лежандра и Якоби можно получить свои канонизированные преобразователи. Однако мы к ним не обращаемся, поскольку цель наша — установить связь между коэффициентами разложения по различным ортогональным системам.

В заключение заметим следующее. Как известно, моменты α_i исключительно просто вычисляются по изображению $f(p)=L[f(t)]$:

$$\alpha_i = (-1)^i \lim_{p\to 0} \frac{d^i}{dp^i} f(p),$$

а изображение $f(p)$ — по известным моментам:

$$f(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt = \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{\alpha_i}{i!} p^i.$$

Здесь e^{-pt} заменено рядом Маклорена; L — символ преобразования Лапласа. При этом обратное преобразование дает

$$f(t) = L^{-1}\left[\sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{\alpha_i}{i!} p^i\right] = \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{\alpha_i}{i!} \delta^{(i)}(t),$$

где $\delta^{(i)}_{(t)}$ — i-я производная импульсной функции. Нетрудно убедиться, что аналогичные соотношения связывают коэффициенты Пуассона с $f(p)$ и $f(t)$. Действительно, вычисление коэффициентов β_i по известному $f(p)$ осуществляется так же просто: дифференцируя $f(p)$ по $p=\sigma+j\omega$ и устремляя ω к нулю, можем записать

$$(-1) \lim_{\substack{\sigma=1\\ \omega\to 0}} \frac{d^i}{dp^i} f(p) = \lim_{\substack{\sigma=1\\ \omega\to 0}} \int_0^\infty f(t)\, t^i e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}\, dt = \gamma_i = i\,\beta_i. \quad (19)$$

И аналогично

$$f(t) = e^t \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \beta_i \delta^{(i)}(t). \quad (20)$$

Итак, экспериментальное определение моментов α_i дало бы возможность определять изображение искомого сигнала, а также коэффициенты разложения оригинала по импульсной системе функций.

Установленная связь между моментами сигнала и его коэффициентами Пуассона открывают дополнительные возможности аппаратурного определения моментов искомого сигнала, а также определения коэффициентов разложения его по ряду важнейших ортогональных и полных неортогональных систем функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1950.
2. В. Г. Поляков, В. С. Переверзев-Орлов. Некоторые применения последовательной цепи интеграторов.— Опознание образов. Теория передачи информации. Сб. Института проблем передачи информации АН СССР. М., «Наука», 1965.
3. В. В. Бабин. Обзор работ по опознанию с помощью моментов.— Опознание образов. Сб. Института проблем передачи информации АН СССР. М., «Наука», 1968.
4. L. P. Balgiano, M. J. Pivoso. Poisson Transforma Signal Analysis.— IEEE Transaction on Information Theory, 1968, v. IT-14, № 4.
5. С. М. Казаков. Синтез структур пропорциональных преобразователей пассивных комплексных величин в активные с электронной коррекцией погрешности.— Автометрия, 1970, № 1.
6. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.

Поступила в редакцию
31 декабря 1969 г.,
окончательный вариант —
17 марта 1970 г.