АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1970

ЦИФРОВЫЕ ПРИБОРЫ И ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

УДК 621.378

В. И. ЛЕВИН

(Рига)

ТОЧНОСТЬ ЦИФРОВОГО ИЗМЕРЕНИЯ В ПРИСУТСТВИИ ВНУТРЕННИХ ПОМЕХ

При построении цифровых измерительных приборов (ЦИП) возникает сложная задача обеспечения требуемой точности измерений. Последняя определяется точностью преобразования «аналог — код». Принято считать, что погрешность аналого-цифрового преобразователя вызывается в основном квантованием преобразуемой величины по уровню и времени и неидеальностью характеристик аналоговых элементов [1]. Помимо указанных факторов, влияющих на точность работы ЦИП, необходимо учитывать помехоустойчивость цифровой части ЦИП [2]. Последний фактор при определенном уровне внешних и внутренних помех может оказывать значительное влияние.

Рассмотрим ЦИП, построенные по принципу последовательного счета [1]. В этих приборах основным источником погрешности, связанной с действием помех, является счетчик числа импульсов, пропорционального измеряемой величине. На рис. 1 показан обычный n-разрядный двоичный счетчик на триггерах. Каждый триггер под действием единичного импульса меняет состояние на противоположное, причем, если он совершает переход из состояния 1 в состояние 0, на его выходе появляется единичный импульс, который запускает следующий триггер. На вход первого триггера, образующего младший разряд, поступает последовательность единичных импульсов. В результате действия этой последовательности счетчик совершает циклические переходы: 00...0 (состояние 1) $\to$ 10...0 (состояние 2) $\to$ ...01...1 (состояние $2^n - 1$) $\to$ 11...1 (состояние 2^n) $\to$ состояние 1 и т. д., так что код состояния счетчика показывает в двоичной записи число поданных на него единичных импульсов. В случае измерений счетчик работает непрерывно лишь в течение времени, не превышающего один цикл. Однако в общем случае он может работать непрерывно в течение любого числа циклов. Такая ситуация, например, имеется в многоканальных устройствах автоконтроля, где счетчики используются для периодического переключения датчиков.

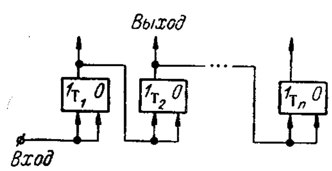

Рис. 1. n-разрядный двоичный счетчик.

Описанная картина работы счетчика искажается под действием случайных помех следующим образом; триггер i-го разряда может не сработать, когда это необходимо (вероятность такой ошибки равна $\varepsilon_{iн}$), либо сработать, когда этого не требуется (вероятность такой ошибки равна $\varepsilon_{iл}$). Указанные ошибки приводят к погрешности показаний счетчика. Задача состоит в нахождении распределения вероятностей этой погрешности при любом числе разрядов n и после любого числа t входных импульсов (тактов). Решение этой принципиальной задачи позволяет найти различные статистические характеристики погрешности показаний счетчика.

Имеется готовый математический аппарат (теория возмущения матричных произведений [3]), который позволяет получить решение поставленной задачи для каждого отдельного (но не слишком большого) n. Для решения в общем виде здесь применим другой прием.

На каждом такте в триггере i-го ($i=1, 2,..., n$) разряда возможна одна из следующих ситуаций, связанных с появлением ошибки:

a) несрабатывание; число A_i, содержащееся в старших разрядах, начиная с i-го, отлично от 11...1; при этом погрешность показаний счетчика -2^{i-1};

b) ложное срабатывание при $A_i \neq 11...1$; погрешность 2^{i-1};

c) несрабатывание при $A_i = 11\ldots1$; погрешность $\sum\limits_{k=i-1}^{n-1} 2^k = 2^n - 2^{i-1}$;

d) ложное срабатывание при $A_i = 11\ldots1$; погрешность $-\sum\limits_{k=i-1}^{n-1} \times 2^k = -2^n + 2^{i-1}$.

Обозначим через $B_{ri}(t)(r=a, b, c, d)$ число тактов (из общего их числа t), в которых возможно событие r в i-м триггере. Примем линейное приближение относительно $\varepsilon_{iн}$, $\varepsilon_{iл}$, т. е. будем считать, что за время t может произойти не более одной ошибки одного триггера. Тогда распределение вероятностей погрешности в счетчике, проработавшем t тактов, может быть представлено таблицей.

Вероятность	$B_{ai}(t)\,\varepsilon_{iн}$	$B_{bi}(t)\,\varepsilon_{iл}$	$B_{ci}(t)\,\varepsilon_{iн}$	$B_{di}(t)\,\varepsilon_{iл}$	$1-\sum\limits_{i=1}^{n}\{\varepsilon_{iн}(B_{ai}(t)+B_{ci}(t)) + \varepsilon_{iл}(B_{bi}(t)+B_{di}(t))\}$
Погрешность	-2^{i-1}	2^{i-1}	2^n-2^{i-1}	-2^n+2^{i-1}	0
	$i-1,2,\cdots,n$				

Таким образом, поставленная задача свелась к нахождению функций $B_{ri}(t)$. Последнее можно выполнить геометрически. Действительно, при работе счетчика интервалы с $A_i = 11\ldots1$ (обозначим их B) и с $A_i \neq 11...1$ (обозначим их A) чередуются и имеют длину соответственно 2^{i-1} и $2^n - 2^{i-1}$ тактов. В то же время такты, в которых должен сработать i-й триггер (обозначим их Q), следуют с периодом 2^{i-1}. Поэтому работу счетчика можно изобразить графически (рис. 2). В терминах рис. 2 искомые функции интерпретируются таким образом: $B_{ai}(t)$ — число тактов вида Q в интервалах A (событий QA) за время t; $B_{bi}(t)$ — число тактов вида R в интервалах A (событий RA) за время t; $B_{ci}(t)$ — число тактов вида Q в интервалах B (событий QB) за время t; $B_{di}(t)$ — число тактов вида R в интервалах B (событий RB) за время t.

Теперь для нахождения функций $B_{ri}(t)$ остается выполнить по рис. 2 несложные подсчеты. Начнем с функции $B_{ci}(t)$.

Обозначим $N_F(T)$ число событий F в интервале времени T. Тогда

$$B_{ci}(t) = N_{QB}(t). \qquad (1)$$

Поскольку события Q следуют с периодом, равным длине интервала B, на каждый полный интервал B приходится ровно одно событие QB (см. рис. 2). Кроме того, одно событие QB может содержаться в последнем, усеченном, интервале B. Отсюда

$$N_{QB}(t) = \left[\frac{t}{2^n}\right] + 1\,(D - l), \qquad (2)$$

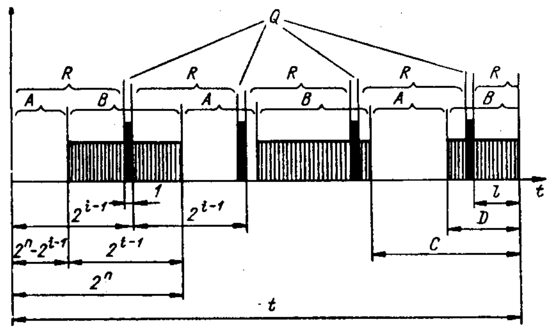

Рис. 2. График работы счетчика.

где $[x]$ — целая часть x;

$$1\,(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Из рис. 2 видно, что

$$l = t - \left[\frac{t}{2^{i-1}}\right] 2^{i-1}; \qquad (4)$$

$$D = \left(t - \left[\frac{t}{2^n}\right] 2^n - 2^n + 2^{i-1}\right)_+, \qquad (5)$$

где

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Из полученных выражений после необходимых упрощений находим

$$B_{ci}(t) = \left[\frac{t}{2^n}\right] + 1\left\{\left[\frac{t}{2^{i-1}}\right] 2^{i-1} + 2^{i-1} - \left[\frac{t}{2^n}\right] 2^n - 2^n\right\}. \qquad (7)$$

Функцию $B_{ai}(t)$ можно записать следующим образом:

$$B_{ai}(t) = N_{QA}(t) = N_Q(t) - N_{QB}(t) = N_Q(t) - B_{ci}(t). \qquad (8)$$

Поскольку

$$N_Q(t) = \left[\frac{t}{2^{i-1}}\right], \qquad (9)$$

получаем

$$B_{ai}(t) = \left[\frac{t}{2^{i-1}}\right] - \left[\frac{t}{2^n}\right] - 1\left\{\left[\frac{t}{2^{i-1}}\right] 2^{i-1} + 2^{i-1} - \left[\frac{t}{2^n}\right] 2^n - 2^n\right\}. \qquad (10)$$

Для функции $B_{di}(t)$ справедливо выражение

$$B_{di}(t) = N_{RB}(t) = N_B(t) - N_{QB}(t) = N_B(t) - B_{ci}(t). \qquad (11)$$

Но из рис. 2 видно, что

$$N_B(t) = \left[\frac{t}{2^n}\right] 2^{i-1} + D. \qquad (12)$$

Теперь с учетом (5), (7) находим

$$B_{di}(t) = \left[\frac{t}{2^n}\right](2^{i-1} - 1) + \left(t - \left[\frac{t}{2^n}\right] 2^n - 2^n + 2^{i-1}\right)_+ -$$
$$- 1\left\{\left[\frac{t}{2^{i-1}}\right] 2^{i-1} + 2^{i-1} - \left[\frac{t}{2^n}\right] 2^n - 2^n\right\}. \qquad (13)$$

Наконец, для функции $B_{bi}(t)$ можно записать

$$B_{bi}(t) = t - \{N_Q(t) + N_B(t) - N_{QB}(t)\} =$$
$$= t - N_Q(t) - N_B(t) + B_{ci}(t). \qquad (14)$$

Подставляя в правую часть (14) найденные выше выражения, установим

$$B_{bi}(t) = t - \left[\frac{t}{2^{i-1}}\right] - \left[\frac{t}{2^n}\right] 2^{i-1} - \left(t - \left[\frac{t}{2^n}\right] 2^n - 2^n + 2^{i-1}\right)_+ +$$
$$+ \left[\frac{t}{2^n}\right] + 1\left\{\left[\frac{t}{2^{i-1}}\right] 2^{i-1} + 2^{i-1} - \left[\frac{t}{2^n}\right] 2^n - 2^n\right\}. \qquad (15)$$

Формулы (7), (10), (11), (15) совместно с таблицей задают распределение вероятностей погрешности счетчика в общем случае. Однако наибольший практический интерес представляют следующие два частных случая: 1) работа счетчика в течение времени t, не превышающего цикл, т. е. $t \leqslant 2^n - 1$ (режим счета); 2) работа счетчика в течение времени t, значительно превышающего цикл, т. е. $t \gg 2^n$ (режим периодического переключения 2^n объектов). В первом случае выражения функции $B_{ri}(t)$ принимают вид:

$$B_{ci}(t) = 0; \qquad (16)$$

$$B_{ai}(t) = \left[\frac{t}{2^{i-1}}\right]; \qquad (17)$$

$$B_{di}(t) = (t - 2^n + 2^{i-1})_+; \qquad (18)$$

$$B_{bi}(t) = t - \left[\frac{t}{2^{i-1}}\right] - (t - 2^n + 2^{i-1})_+. \qquad (19)$$

Во втором случае в выражениях (7), (10), (11), (15) можно пренебречь слагаемыми $(...)_+$, $1\{...\}$. В результате функции $B_{ri}(t)$ после простых преобразований запишем так:

$$B_{ci}(t) = \left[\frac{t}{2^n}\right]; \qquad (20)$$

$$B_{ai}(t) = \left[\frac{t}{2^{i-1}}\right] - \left[\frac{t}{2^n}\right]; \qquad (21)$$

$$B_{di}(t) = (2^{i-1} - 1)\left[\frac{t}{2^n}\right]; \qquad (22)$$

$$B_{bi}(t) = t - \left[\frac{t}{2^{i-1}}\right] - (2^{i-1} - 1)\left[\frac{t}{2^n}\right]. \qquad (23)$$

Сравнивая между собой функции $B_{ri}(t)$ можно по таблице установить наиболее вероятные значения погрешности. При этом выявляется определенное различие двух рассмотренных режимов работы. Если $t \leqslant$

$\leqslant 2^n - 1$, то для i младших разрядов счетчика наиболее вероятной оказывается величина погрешности -2^{i-1}, а для старших разрядов 2^{i-1} и $2^{i-1} - 2^n$. Если же $t \gg 2^n$, то для младших разрядов наиболее вероятны величины погрешности 2^{i-1} и -2^{i-1}, а для старших 2^{i-1} и $2^{i-1} - 2^n$.

Компонента распределения погрешности (см. таблицу), которой соответствует погрешность 0, означает вероятность $\bar{p}(t)$ правильного показания счетчика при t поданных на его вход единичных импульсах. Поскольку, согласно (7), (10), (13), (15),

$$B_{ai}(t) + B_{ci}(t) = \left[\frac{t}{2^{i-1}}\right]; \tag{24}$$

$$B_{bi}(t) + B_{di}(t) = t - \left[\frac{t}{2^{i-1}}\right], \tag{25}$$

получаем

$$\bar{p}(t) = 1 - t\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{i\text{л}} - \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_{i\text{н}} - \varepsilon_{i\text{л}}) \left[\frac{t}{2^{i-1}}\right]. \tag{26}$$

Как видно из (26), несрабатывание триггеров, по сравнению с их ложными срабатываниями, оказывают слабое влияние на надежность показаний счетчика. Причина такого явления в том (см. рис. 2), что такты Q, в которые возможна ошибка в виде несрабатывания триггера, составляют незначительную часть остального времени работы счетчика, когда возможны ложные срабатывания триггеров.

По распределению вероятностей погрешности можно найти статистические характеристики погрешности. Вычислим две из них — математическое ожидание Δ и среднеквадратическое отклонение σ. Имеем:

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} B_{ai}(t)\,\varepsilon_{i\text{н}} + \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} B_{bi}(t)\,\varepsilon_{il} + \sum_{i=1}^{n} (2^n - 2^{i-1}) B_{ci}(t)\,\varepsilon_{i\text{н}} + \sum_{i=1}^{n} (2^{i-1} - 2^n) B_{di}(t)\,\varepsilon_{i\text{л}}; \tag{27}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} 2^{2i-2} B_{ai}(t)\,\varepsilon_{i\text{н}} + \sum_{i=1}^{n} 2^{2i-2} B_{bi}(t)\,\varepsilon_{i\text{л}} + \sum_{i=1}^{n} (2^{2n} - 2^{n+i} + 2^{2i-2}) B_{ci}(t)\,\varepsilon_{i\text{н}} + \sum_{i=1}^{n} (2^{2n} - 2^{n+i} + 2^{2i-2}) B_{di}(t)\,\varepsilon_{i\text{л}}. \tag{28}$$

Положим, что вероятность ошибки триггера не зависит от номера разряда, т. е. $\varepsilon_{i\text{н}} = \varepsilon_\text{н}$, $\varepsilon_{i\text{л}} = \varepsilon_\text{л}$. Будем рассматривать только случаи $t \leqslant 2^n - 1$ и $t \gg 2^n$. Подставляя в (27), (28) выражения функций $B_{ri}(t)$ и выполняя суммирование, найдем:

$$\Delta = \Delta_\text{н}\,\varepsilon_\text{н} + \Delta_\text{л}\,\varepsilon_\text{л}; \tag{29}$$

$$\sigma = \sqrt{m_\text{н}\,\varepsilon_\text{н} + m_\text{л}\,\varepsilon_\text{л}}\,, \tag{30}$$

$$-2^n 1(t-2^{n-1})\cdot 1(2^n-t)\{t-0{,}5\,(n+\log_2(2^n-t)+1)\times$$
$$\times\,(n-\log_2(2^n-t))\}; \qquad (32)$$

$$m_н = t\,(2^{\min(n,\,\log_2 t+1)}-1)+2^{n+1}\left[\frac{t}{2^n}\right](2^{n-1}n-2^n+1); \qquad (33)$$

$$m_л = t\left(\frac{4^n}{3}-2^{\min(n,\,\log_2 t+1)}+\frac{2}{3}\right)+2^{n+1}\left[\frac{t}{2^n}\right]\times$$
$$\times\left(\frac{4^n}{6}-2^{n-1}(n-1)-\frac{2}{3}\right)+2^{n+1}1\,(t-2^{n-1})\cdot 1\,(2^n-t)\times$$
$$\times\left\{\frac{5\cdot 2^{n-1}t}{3}-\frac{2t^2}{3}-2^{n-2}(n+\log_2(2^n-t)+1)\,(n-\log_2(2^n-t))\right\} \qquad (34)$$

представляют собой коэффициенты слагаемых математического ожидания и дисперсии погрешности, учитывающих несрабатывания (н) и ложные срабатывания (л) триггеров. Графики функций $\Delta_н(t)$, $\Delta_л(t)$, $m_н(t)$, $m_л(t)$ показаны на рис. 3—6. Анализ этих функций приводит к следующим выводам.

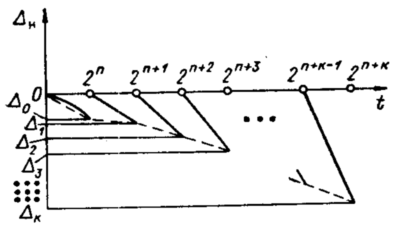

Рис. 3. График функции $\Delta_н(t)$:
$\Delta_0 = -n(2^n-1)$; $\Delta_i = -n(2^{n+i} - 2^{n+i-1} - 1)$; $i = 1, 2, \dots, k$.

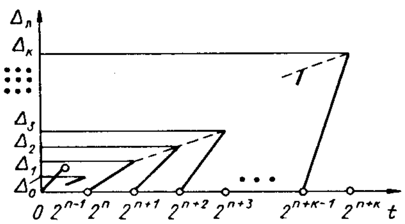

Рис. 4. График функции $\Delta_л(t)$:
$\Delta_0 = 2^{n-1}(n(n-1)-2)+1$; $\Delta_i = (2^n - n - 1)(2^{n+k} - 2^{n+k-1} - 1)$; $i = 1, 2, \dots, k$.

1. Математическое ожидание погрешности равно нулю при $t=0$; 2^{k+r} ($k=0, 1, 2, \dots$) (см. рис. 3, 4).

2. Составляющая $\Delta'_н = \Delta_н \varepsilon_н$ математического ожидания погрешности, учитывающая несрабатывания ($\Delta'_л = \Delta_л \varepsilon_л$ — ложные срабатывания) триггеров, неположительна (неотрицательна) (см. рис. 3, 4).

3. Пусть $t \gg 2^n$ или $t \leqslant 2^{n-1}$. Тогда при $\varepsilon_н \approx \varepsilon_л$ или $\varepsilon_л \gg \varepsilon_н$ уже для небольшого числа n разрядов имеет место $|\Delta'_л| \gg |\Delta'_н|$; если же $\varepsilon_н \gg \varepsilon_л$ (т. е. ошибки в триггере происходят главным образом в момент действия опрокидывающего входного импульса), то для малых n выполняется неравенство $|\Delta'_н| \gg |\Delta'_л|$, а для больших n — неравенство $|\Delta'_л| \gg |\Delta'_н|$. В случае $2^{n-1} < t \leqslant 2^n - 1$ порядок величины $|\Delta'_л| / |\Delta_н|$ равен порядку величины $\varepsilon_л/\varepsilon_н$.

4. Дисперсия σ^2 погрешности является ступенчатой монотонно возрастающей функцией от t (см. рис. 5, 6).

5. Если $\varepsilon_н \approx \varepsilon_л$ или $\varepsilon_л \gg \varepsilon_н$, то $m_л' = m_л \varepsilon_л \gg m_н' = m_н \varepsilon_н$ (т. е. составляющая дисперсии погрешности, связанная с ложными срабатываниями, превалирует), причем в случае $\varepsilon_н \approx \varepsilon_л$ это соотношение выполняется при $n \gtrsim 7$, а в случае $\varepsilon_л \gg \varepsilon_н$ — при любом n. Если же $\varepsilon_л \ll \varepsilon_н$, то указанное неравенство выполняется лишь при достаточно больших n (порядка $n \gtrsim 12$), в то время как при малых n (порядка $n \lesssim 5$) имеет место $m_л' \ll m_н'$ (превалирует составляющая дисперсии погрешности, связанная с несрабатываниями триггеров).

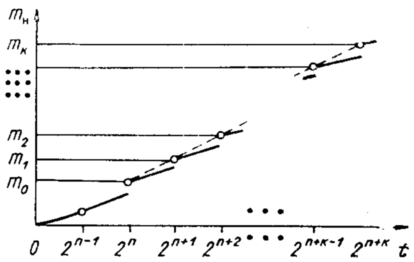

Рис. 5. График функции $m_н(t)$: $m_i = 2^{n+i}((n+1)2^n - 2^n + 1 + 1)$; $i = 0, 1, \ldots, k$.

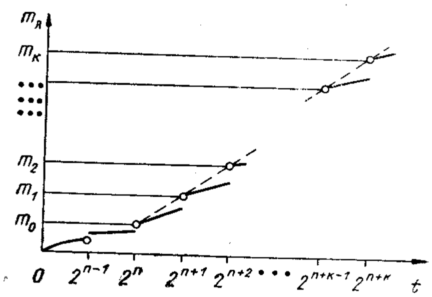

Рис. 6. График функции $m_л(t)$: $m_i = 2^{n+i}\left(\frac{2}{3}4^n - n2^n - \frac{2}{3}\right)$; $i = 0, 1, \ldots, k$.

6. Между среднеквадратическим σ погрешности и ее математическим ожиданием Δ существует соотношение $\sigma \gg |\Delta|$, справедливое для различных времен t ($t \leqslant 2^n - 1$ или 2^n) и практически для любых значений $n\varepsilon_н$ и $\varepsilon_л$.

7. Согласно п.п. 5, 6, доминирующим слагаемым погрешности показаний счетчика является: а) при $\varepsilon_н \approx \varepsilon_л$ и $n \gtrsim 7$ или $\varepsilon_л \gg \varepsilon_н$ и любых n или при $\varepsilon_л \ll \varepsilon_н$ и $n \gtrsim 12$ слагаемое $\sigma_л' = \sqrt{m_л \varepsilon_л}$; б) при $\varepsilon_л \ll \varepsilon_н$ и $n \lesssim 5$ слагаемое $\sigma_н' = \sqrt{m_н \varepsilon_н}$.

Из сделанных выводов следует, что, как правило, доминируют те составляющие погрешности счетчика, которые связаны с ложными срабатываниями триггеров [см. зависимости вероятности $\bar{p}(t)$, данной в (26)].

Полученные результаты позволяют вычислить, исходя из требуемой точности, максимально допустимое число n^* разрядов счетчика. Найдем n^* для случая, описанного в п. 7, а. Из формулы (34) можно получить следующую оценку для абсолютной погрешности показаний счетчика:

$$\sigma_л' \leqslant \begin{cases} 2^n \sqrt{\dfrac{2\varepsilon_л t}{3}}; & t \gg 2^n; \\ 2^{n+1}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_л t}{3}}; & t \leqslant 2^n - 1. \end{cases} \tag{35}$$

Переходя к относительным погрешностям δ, согласно

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_л'/t - 2^n\left[\dfrac{t}{2^n}\right]; & t \gg 2^n; \\ \sigma_л'/t; & t \leqslant 2^n - 1, \end{cases} \tag{36}$$

найдем

$$\delta = \begin{cases} 2^{n(1+0{,}5k)}\sqrt{0{,}66\,\varepsilon_л}\,; & t = 2^{nk} \gg 2^n, \\ 2^{n+1}\sqrt{0{,}33\,\varepsilon_л}\,; & t \leqslant 2^n - 1. \end{cases} \quad (37)$$

Отсюда

$$n^* = \begin{cases} \dfrac{\log_2\left(\delta/\sqrt{0{,}66\,\varepsilon_л}\right)}{1+0{,}5k}; & t = 2^{nk} \gg 2^n; \\ \log_2\left(\delta/\sqrt{0{,}33\,\varepsilon_л}\right) - 1; & t \leqslant 2^n - 1. \end{cases} \quad (38)$$

Пусть, например, требуется обеспечить $\delta = 10^{-2}$ в режиме счета (когда $t \leqslant 2^n - 1$), причем $\varepsilon_л = 10.^{-10}$ Тогда из (39) получим $n^* = 9$.

Этот пример показывает, что точность ЦИП, связанная с помехоустойчивостью цифровой части, в значительной степени определяет общую точность прибора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. И. Гитис. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных устройств. М., Госэнергоиздат, 1961.
2. В. Б. Смолов, Н. А. Смирнов (ред). Полупроводниковые кодирующие и декодирующие преобразователи. Л., «Энергия», 1967.
3. В. И. Левин. Вероятностный анализ ненадежных автоматов. Рига, «Зинатне», 1969.

Поступила в редакцию
14 июля 1969 г.,
окончательный вариант —
10 февраля 1970 г.