А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1970

УДК 681.14

Ю. С. ШАРИН
(*Свердловск*)

СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ КОЛЬЦЕВЫХ КОДИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Введение. Кольцевое кодирующее устройство (ККУ) состоит из двух частей: считывающего кольца (СК) и однодорожечной кодовой шкалы (ОШ). СК и ОШ суть слова длиной p из алфавита $\{0, 1\}$. Символ 1 слова СК соответствует наличию считывающего элемента, а символ 0 — его отсутствию; символ 1 слова ОШ соответствует наличию активного участка шкалы (токо-, свето-, магнитопроводящего и др.), а символ 0 — наличию пассивного участка; обозначим через n вес слова СК, через h вес слова ОШ. Наложим слово СК на слово ОШ и выпишем символы слова ОШ, совпадающие с символами 1 слова СК. Результат: слово длиной n из алфавита $\{0, 1\}$ назовем кодовой комбинацией; обозначим через l вес кодовой комбинации. Введем операцию — циклическую перестановку слова ОШ. Каждой однократной циклической перестановке соответствует одна кодовая комбинация. Будем считать, что слова СК и ОШ совместимы и образуют ККУ в том случае, если p последовательных кодовых комбинаций не повторяются.

Известны кодовые кольца как способ представления множества кодовых комбинаций [1]. Они могут рассматриваться как ККУ, в которых n символов 1 слова СК размещены в смежных разрядах. В [2, 3] предложен способ синтеза ККУ при $p=10$ и произвольном расположении символов 1 слова СК. Сущность способа сводится к полному перебору при помощи ЦВМ всех слов СК и ОШ длиной $p=10$ и нахождению совместимых пар. С увеличением p трудоемкость способа настолько возрастает, что полный перебор будет невозможен даже для ЦВМ. Нами в [4] предложен способ построения ККУ для произвольного значения p и произвольного слова СК. В настоящей статье рассмотрен частный случай, когда символы 1 слова СК, включая последний и первый, равноотстоят друг от друга, т. е. числа p и n связаны соотношением

$$p = M_и n, \tag{1}$$

где $M_и$ — целое положительное число, причем

$$p \leqslant 2^n. \tag{2}$$

Формирование слова однодорожечной шкалы. Условимся записывать слово СК таким образом, чтобы последний символ 1 стоял в конце слова, например 010 101, 001 001 001 001 и т. д.; обозначим символы 1 слова СК слева направо: 1, 2, . . . , n.

Отметим, что множество кодовых комбинаций длины n и веса l может быть разбито на попарно непересекающиеся подмножества — классы, элементы которых суть комбинации, полученные циклической перестановкой символов.

Пусть ККУ образовано словами СК — 00 010 001 000 100 010 001 — и ОШ — 10 110 111 101 000 000 000; оно формирует двадцать комбинаций: 11 000, 11 100, 01 000, 10 100, 01 100, 01 110, 00 100, 01 010, 00 110, 00 111, 00 010, 00 101, 00 011, 10 011, 00 001, 10 010, 10 001, 11 001, 10 000, 01 001. Комбинации принадлежат к четырем классам, причем вначале формируется четыре комбинации по одной из каждого класса (назовем их исходными), затем четыре комбинации, полученные из исходных при их однократной циклической перестановке, далее комбинации, полученные из исходных при двукратной циклической перестановке, и т. д.

Отсюда следует, что, проверяя совместимость слов СК и ОШ, не нужно перебирать все p комбинаций, достаточно убедиться, что исходные комбинации принадлежат к разным классам. Коэффициент $M_{и}$ в (1) — число используемых классов:

$$M_{и} = \frac{p}{n}. \tag{3}$$

Само слово ОШ удобнее записать в виде $(M_{и} \times n)$-матрицы

11 000
11 100
01 000
10 100

Слово ОШ получим, если считывать символы матрицы снизу вверх и слева направо; строки матрицы суть исходные кодовые комбинации. Вес слова ОШ равен сумме весов исходных комбинаций:

$$h = \sum_{1}^{M_{и}} l_i. \tag{4}$$

Если порядок класса (число комбинаций в нем) равен n, то назовем такие классы полными, если меньше n — неполными. Последние классы появляются в том случае, если числа n и l имеют общие делители d. Например, классы 0101, 1010 содержат только две комбинации вместо четырех, классы 110 110, 011 011, 101 101 только три комбинации и т. д. При построении ККУ допускается использование только полных классов. Если использовать неполные классы, то ККУ будет формировать d групп повторяющихся кодовых комбинаций и слова СК и ОШ окажутся несовместимыми.

Итак, чтобы построить ККУ, достаточно составить $(M_{и} \times n)$-матрицу, для чего нужно для заданных значений p и n знать число полных классов.

Разбиение кодовых множеств на классы. Для перебора классов введем взаимно однозначное отображение

$$B_i = f(T_i),$$

где B_i — кодовая комбинация; T_i — набор целых положительных чисел, названный номером класса. Поясним понятие номера более подробно.

Пусть комбинация $B_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\}$ образована n символами. Каждая пара смежных символов (включая последний и первый) разделяется интервалом. Обозначим символы 1 слева направо $1, 2, \ldots, l$

и определим t_{12} — число интервалов между первой и второй единицами, t_{23} — число интервалов между второй и третьей единицами и т. д., t_{l1} — число интервалов между последней и первой единицами. Составим числовую последовательность

$$t_{12} - t_{23} - \ldots - t_{l1}$$

и назовем ее номером. Знак «—» не выражает здесь какого-либо алгебраического действия, а служит лишь для разделения частей номера. Нетрудно видеть, что число частей номера равно l, а сумма частей равна n.

Условимся номера, полученные циклической перестановкой частей, считать тождественными. Тогда все комбинации одного класса будут иметь одинаковый номер, все комбинации разных классов разные номера. Порядок класса равен $\frac{n}{d}$, где d — число периодов номера класса. Если числа n и l взаимно простые, то $d=1$ и все классы имеют порядок n; если n и l имеют общие делители, то наряду с однопериодными номерами есть d-периодные номера и соответствующие классы имеют порядок $\frac{n}{d}$.

Обозначим $M_{l(n)}$ — число классов комбинаций длиной n и веса l, $M_{(n)}$ — общее число классов комбинаций длиной n. Если речь пойдет только о полных классах, будем пользоваться дополнительным индексом «п», для неполных классов используем «н», а для d-периодных неполных классов — «d».

Для рассматриваемого примера $n=5$: $M_{1(5)}=1$, номер 5; $M_{2(5)}=2$, номера 1—4, 2—3; $M_{3(5)}=2$, номера 1—1—3, 1—2—3; $M_{4(5)}=1$, номера 1—1—1—2; $M_{(5)\text{п}} = 6$.

Вне этих классов остаются две комбинации: 00 000 и 11 111; обе комбинации принадлежат к неполным классам порядка 1. Для построения ККУ для $p=20$ из 6 полных классов нужно выбрать четыре. В нашем примере выбраны классы: 1—4 с исходной комбинацией 11 000; 1—1—3 с исходной комбинацией 11 100; 5 с исходной комбинацией 01 000; 2—3 с исходной комбинацией 10 100.

Число классов отдельно для каждого из делителей, начиная с наибольшего общего делителя, можно определить по рекуррентному соотношению

$$M_{l\,(n)\,d_i} = \frac{d_i}{n}\left[\binom{\frac{n}{d_i}}{\frac{l}{d_i}} - n\sum \frac{M_{l\,(n)\,d_j}}{d_j}\right], \qquad (5)$$

где $M_{l\,(n)\,d_i}$ — число d_i-периодных классов; $M_{l\,(n)\,d_j}$ — число d_j-периодных классов; d_i — делители чисел n и l; d_j — делители чисел n и l, кратные d_i; $\binom{\frac{n}{d}}{\frac{l}{d}}$ — число сочетаний по $\frac{l}{d}$ из $\frac{n}{d}$.

Число полных классов определяем по (5) при $d=1$; классы порядка 1 при $l=0$ и $l=n$ не рассматриваем.

Если числа n и l взаимно простые, то все классы полные $(d=1)$:

$$M_{l\,(n)\,\text{п}}=\frac{1}{n}\binom{n}{l}, \tag{6}$$

где $\binom{n}{l}$ — число сочетаний по l из n.

Примеры. Пусть $n=5$, $l=2$, $d=1$:

$$M_{2\,(5)\,\text{п}}=\frac{1}{5}\binom{5}{2}=\frac{10}{5}=2.$$

Пусть $n=8$, $l=4$, $d_i=1, 2, 4$. Тогда

1) 4-периодные номера, $d_i=4$:

$$M_{4\,(8)\,d=4}=\frac{4}{8}\binom{2}{1}=\frac{4\cdot 2}{8}=1;\ \text{номера } 2—2—2—2;$$

2) 2-периодные номера, $d_i=2$, $d_j=4$:

$$M_{4\,(8)\,d=2}=\frac{2}{8}\left[\binom{4}{2}-\frac{8}{4}\right]=\frac{2}{8}\left(6-\frac{8}{4}\right)=1;\quad \text{номера } 1—3—1—3;$$

3) однопериодные номера полных классов $d_i=1$, $d_j=2{,}4$:

$$M_{4\,(8)\,\text{п}}=\frac{1}{8}\left[\binom{8}{4}-8\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{8}\left(70-8\frac{3}{4}\right)=8;$$ номера 1—1—1—5, 1—1—2—4, 1—1—3—3, 1—1—4—2, 1—2—1—4, 1—2—2—3, 1—2—3—2, 1—3—2—2.

Таким образом, имеется 10 классов комбинаций; из них 8 полных и 2 неполных. Порядок классов равен $\frac{8}{d}$. Так, класс 2—2—2—2 содержит две комбинации: 10 101 010, 01 010 101; класс 1—3—1—3 — четыре комбинации: 11 001 100, 01 100 110, 00 110 011, 10 011 001; класс 1—1—1—5 — восемь комбинаций: 11 110 000, 01 111 000, 00 111 100, 00 011 110, 00 001 111, 10 000 111, 11 000 011, 11 100 001 и т. д.

Построение ККУ. Пусть даны p, n, удовлетворяющие (1) и условию

$$\frac{p}{n}\leqslant M_{(n)\,\text{п}}. \tag{7}$$

Надо определить слово ОШ, совместимое со словом СК.

Алгоритм построения $(M_{\text{и}}\times n)$-матрицы: 1) из $M_{(n)\,\text{п}}$ полных классов выбираем $\frac{p}{n}$ используемых классов; 2) из каждого используемого класса выбираем по одной исходной комбинации; 3) выписывая исходные комбинации друг под другом, получаем $(M_{\text{и}}\times n)$-матрицу.

Алгоритм построения ККУ (см. рисунок, *а*): 1) окружность произвольного радиуса (шкалу) разбиваем на p равных частей; 2) вокруг шкалы с равными интервалами размещаем n считывающих элементов; в направлении по часовой стрелке элементы обозначаем: 1, 2, . . . , n; 3) на шкалу от последнего считывающего элемента по часовой стрелке наносим кодовый рисунок в соответствии с символами слова ОШ.

Изложенное решение (см. рисунок, *а*) не является единственным. Если выбрать другие классы или другие исходные комбинации, то получим другие ККУ. Число вариантов выбора $M_{\text{и}}$ классов из $M_{(n)\,\text{п}}$ равно числу размещений $M_{\text{и}}$ элементов из $M_{(n)\,\text{п}}$, исключая все размещения, полученные друг из друга циклической перестановкой элементов; отсюда

$$W_1 = \frac{M_{(n)\,п}!}{M_и\,(M_{(n)\,п} - M_и)!}. \qquad (8)$$

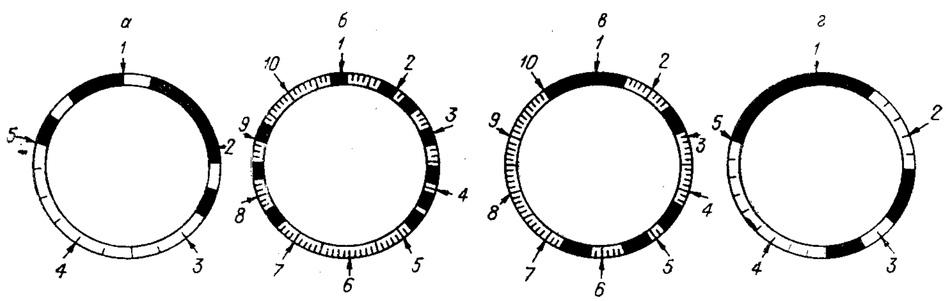
Определим число вариантов выбора исходных комбинаций. Имеется один вариант выбора исходной комбинации первого класса, n вариантов второго, n вариантов третьего и т. д., всего

$$W_2 = n^{M_и - 1} \qquad (9)$$

вариантов выбора. Общее число вариантов решения равно

$$W = W_1 \cdot W_2. \qquad (10)$$

Для условий нашего примера $W_1 = 90$, $W_2 = 125$, $W = 11250$. Пусть, например, $p = 100$, $n = 10$. Число полных классов $M_{(n)\,п} = 99$; отсюда $W = \frac{99!}{89!} \cdot 10^8$. Число вариантов столь велико, что перебрать их невозможно даже с помощью ЦВМ, но этого и не требуется. Обычно задача сужается за счет определенных требований к коду и к конструкции шкалы.



Кольцевые кодирующие устройства:

а — $p=20$, $n=5$; *б* — $p=100$, $n=10$, код на одно сочетание; *в* — $p=100$, $n=10$, однопеременный код; *г* — $p=30$, $n=5$, код с минимальной избыточностью.

Поясним требования к конструкции. Совокупность символов 1 слова ОШ, расположенных в смежных разрядах, будем называть пачкой единиц; обозначим число пачек через H, а их длину (число единиц в пачке) через g. Слово ОШ на рисунке, *а* имеет $H=4$, $g_1=1$, $g_2=2$, $g_3=4$, $g_4=1$. Более технологичной в изготовлении будет шкала с минимальным числом пачек, а еще лучше — с пачками постоянной длины $g = \text{const}$.

Слово ОШ (для тех же условий $p=20$, $n=5$) 11111100011000000000 имеет всего две пачки, а слово 00111011100011100000 имеет три пачки постоянной длины.

Посмотрим теперь, как учитываются требования к коду.

Код на одно сочетание. Для реализации кода необходимо и достаточно выбрать $M_и$ классов комбинаций постоянного веса $l = \text{const}$. Если при этом требуется получить минимальное число пачек постоянной длины, то надо так выбрать исходные комбинации классов, чтобы любые смежные комбинации отличались только в двух разрядах (двухпеременный код). Пусть надо построить ККУ для кода на одно сочетание для $p=100$. Согласно таблице, выбираем код «3 из 10», т. е. $n=10$, $l=3$; из 12 полных классов выбираем следующие 10: 1—1—8, 1—2—7, 1—7—2,

n	l	$M_l(n)$ п	$p_{l\,\max}$	Номера
5	1	1	5	5
	2	2	10	1—4, 2—3
	3	2	10	1—1—3, 1—2—2
	4	1	5	1—1—1—2
6	1	1	6	6
	2	2	12	1—5, 2—4
	3	3	18	1—1—4, 1—2—3, 1—3—2
	4	2	12	1—1—1—3, 1—1—2—2
	5	1	6	1—1—1—1—2
7	1	1	7	7
	2	3	21	1—6, 2—5, 3—4
	3	5	35	1—1—5, 1—2—4, 1—3—3, 1—4—2, 2—2—3
	4	5	35	1—1—1—4, 1—1—2—3, 1—1—3—2, 1—2—1—3, 1—2—2—2
	5	3	21	1—1—1—1—3, 1—1—1—2—2, 1—1—2—1—2
	6	1	6	1—1—1—1—1—2
8	1	1	8	8
	2	3	24	1—7, 2—6, 3—5
	3	7	56	1—1—6, 1—2—5, 1—3—4, 1—4—3, 1—5—2, 2—2—4, 2—3—3
	4	8	64	1—1—1—5, 1—1—2—4, 1—1—3—3, 1—1—4—2, 1—2—1—4, 1—2—2—3, 1—2—3—2, 1—3—2—2
	5	7	56	1—1—1—1—4, 1—1—1—2—3, 1—1—1—3—2, 1—1—2—1—3, 1—1—2—2—2, 1—2—1—1—3, 1—2—1—2—2
	6	3	24	1—1—1—1—1—3, 1—1—1—1—2—2, 1—1—1—2—1—2
	7	1	7	1—1—1—1—1—1—2
9	1	1	9	9
	2	4	36	1—8, 2—7, 3—6, 4—5
	3	9	81	1—1—7, 1—2—6, 1—3—5, 1—4—4, 1—5—3, 1—6—2, 2—2—5, 2—3—4, 2—4—3
	4	14	126	1—1—1—6, 1—1—2—5, 1—1—3—4, 1—1—4—3, 1—1—5—2, 1—2—1—5, 1—2—2—4, 1—2—3—3, 1—2—4—2, 1—3—1—4, 1—3—2—3, 1—3—3—2, 1—4—2—2, 2—2—2—3
	5	14	126	1—1—1—1—5, 1—1—1—2—4, 1—1—1—3—3, 1—1—1—4—2, 1—1—2—1—4, 1—1—2—2—3, 1—1—2—3—2, 1—1—3—1—3, 1—1—3—2—2, 1—1—4—1—2, 1—2—1—2—3, 1—2—1—3—2, 1—2—2—1—3, 1—2—2—2—2
	6	9	81	1—1—1—1—1—4, 1—1—1—1—2—3, 1—1—1—1—3—2, 1—1—1—2—1—3, 1—1—1—2—2—2, 1—1—2—1—1—3, 1—1—2—1—2—2, 1—1—2—2—1—2, 1—1—1—3—1—2
	7	4	36	1—1—1—1—1—1—3, 1—1—1—1—1—2—2, 1—1—1—1—2—1—2, 1—1—1—2—1—1—2,
	8	1	9	1—1—1—1—1—1—1—2
10	1	1	10	10
	2	4	40	1—9, 2—8, 3—7, 4—6
	3	12	120	1—1—8, 1—2—7, 1—3—6, 1—4—5, 1—5—4, 1—6—3, 1—7—2, 2—2—6, 2—3—5, 2—4—4, 2—5—3, 3—3—4
	4	20	20	1—1—1—7, 1—1—2—6, 1—1—3—5, 1—1—4—4, 1—1—5—3, 1—1—6—2, 1—2—1—6, 1—2—2—5, 1—2—3—4, 1—2—4—3, 1—2—5—2, 1—3—1—5, 1—3—2—4, 1—3—3—3, 1—3—4—2, 1—4—2—3, 1—4—3—2, 1—5—2—2, 2—2—2—4, 2—2—3—3
	5	25	250	1—1—1—1—6, 1—1—1—2—5, 1—1—1—3—4, 1—1—1—4—3, 1—1—1—5—2, 1—1—2—1—5, 1—1—2—2—4, 1—1—2—3—3, 1—1—2—4—2, 1—1—3—1—4, 1—1—3—2—3, 1—1—3—3—2, 1—2—1—1—5, 1—2—1—2—4, 1—2—1—3—3, 1—2—1—4—2, 1—2—2—1—4, 1—2—2—2—3, 1—2—2—3—2, 1—3—1—1—4, 1—3—1—2—3, 1—3—1—3—2, 2—1—1—4—2, 2—1—2—3—2, 2—2—1—3—2

n	l	$M_l(n)$ п	$p_{l\,\max}$	Номера
	6	20	20	1—1—1—1—1—5, 1—1—1—1—2—4, 1—1—1—1—3—3, 1—1—1—1—4—2, 1—1—1—2—1—4, 1—1—1—2—2—3, 1—1—1—2—3—2, 1—1—1—3—1—3, 1—1—1—3—2—2, 1—1—1—4—1—2, 1—1—2—1—1—4, 1—1—2—1—2—3, 1—1—2—1—3—2, 1—1—2—2—1—3, 1—1—2—2—2—2, 1—1—2—3—1—2, 1—1—3—1—2—2, 1—1—3—2—1—2, 1—2—2—2—1—2, 1—3—1—2—1—2,
	7	12	120	1—1—1—1—1—1—4, 1—1—1—1—1—2—3, 1—1—1—1—1—3—2, 1—1—1—1—2—1—3, 1— —1—1—1—2—2—2, 1—1—1—1—3—1—2, 1—1—1—2—1—1—3, 1—1— —1—2—2—1—2, 1—1—1—2—1—2—2, 1—1—2—1—1—1—3, 1—1—2— —1—1—2—2, 1—1—2—1—2—1—2,
	8	4	40	1—1—1—1—1—1—1—3. 1—1—1—1—1—1—2—2, 1—1—1—1—1—2— —1—2, 1—1—1—1—2—1—1—2
	9	1	10	1—1—1—1—1—1—1—1—2

1—3—6, 1—6—3, 1—4—5, 2—4—4, 2—5—3, 1—5—4, 2—6—2; строим (10×10)-матрицу

1110000000
1101000000
0101100000
0001100100
0000100110
0010000110
0010100010
0010100001
0001100001
0101000001

По матрице на рисунке, *б* построено ККУ; шкала имеет $H = M_и = 10$ постоянной длины $g=3$.

Одноперемеиный код. Для реализации кода необходимо так выбрать $M_и$ классов, чтобы вес комбинаций любых смежных классов (включая последний и первый) отличался на единицу, и так выбрать исходные комбинации классов, чтобы смежные комбинации отличались лишь в одном разряде. Пусть $p=100$, $n=10$; строим (10×10)-матрицу

1100000000
1110000000
1110100000
1110101000
1110111000
0110111000
0100111000
0100011000
0100010000
0100000000

ККУ на рисунке, *в* имеет $H=7$, $g=5$.

Код с минимальной избыточностью. В силу наличия неполных классов, которые не могут быть использованы при построении ККУ, мы не можем реализовать код без избыточности. Вопрос стоит лишь о реализации кода с минимальной избыточностью. Так, при $n=5$ $p_{max}=30$ вместо 32, при $n=6$ $p_{max}=54$ вместо 64; при $n=7$ $p_{max}=126$ вместо 128 и т. д. (см. таблицу).

Построим (6×5)-матрицу, если $p=30$, $n=5$, для однопеременного кода

$$
\begin{matrix}
10000\\
10100\\
11100\\
11110\\
11010\\
11000
\end{matrix}
$$

Соответствующее ККУ показано на рисунке, *г*. Подобным образом можно построить ККУ для кодов с основанием $m>2$, квазиэквидистантных кодов и т. д. В статье мы не останавливались на ККУ для $p=10$, поскольку последние в литературе известны [2, 3, 5, 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Радченко. Кодовые кольца как способ представления кодовых множеств.— Автоматика и телемеханика, 1959, № 7.
2. А. Р. Олейников и др. Синтез компактных двоичных кодов.— Автоматика и телемеханика, 1967, № 4.
3. О. Н. Дегтярев. Об одной группе кодовых колец для двоично-десятичных цифраторов перемещения.— Автометрия, 1968, № 4.
4. Ю. С. Шарин. О конструкции шкал преобразователей угла поворота в код.— ИВУЗ, Приборостроение, 1969, № 5.
5. Ф. Я. Галкин. Двоично-десятичные коммутаторы для счетных машин.— ИВУЗ, Приборостроение, 1964, № 3.
6. M. Shikata, A. Kamoi. Uniqueness of Decimal K—E Code.— Rep. Stat. Appl. Res. JUSE, 1966, v. 15, № 2.

Поступила в редакцию
11 июля 1969 г.,
окончательный вариант —
30 декабря 1969 г.