А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1970

УДК 53.088.3 : 517.31

В. А. ГАМИЙ

(Москва)

К ВОПРОСУ О ТОЧНОСТИ ДИСКРЕТНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

При использовании цифровых вычислительных устройств интегрирование непрерывных физических величин $F(t)$ производится различными приближенными численными методами, в ряде случаев методом прямоугольников путем замены непрерывной величины ступенчатой кривой и суммированием дискретных значений по формуле

$$I^*(T) = \Delta t \sum_{i=1}^{k} F(t_i) \approx \int_0^T F(t)\, dt = I(T), \qquad (1)$$

где $I^*(T)$ — приближенное значение интеграла $I(T)$; $\Delta t = \frac{1}{f_п}$ — шаг преобразования (шаг квантования) непрерывной величины во времени; $f_п = \frac{\omega_п}{2\pi}$ — частота преобразования; $k = \frac{T}{\Delta t}$ — число отсчетных значений функции на интервале интегрирования $[0, T]$; $F(t_i)$ — отсчетные значения функции $F(t)$ в моменты времени t_i, соответствующие серединам интервалов $[(n-1)\Delta t, n\Delta t]$.

Возникающие при этом погрешности определяются видом интегрируемой функции. Известные формулы оценки погрешности метода прямоугольников для детерминированных функций не дают ясного представления о степени погрешности вычисления [1]. Еще более затруднительна оценка этой погрешности для случайных функций [2]. Поэтому представляет практический интерес уточнить оценку относительной ошибки интегрирования для ряда детерминированных функций и, в первую очередь, для часто встречающейся экспоненциальной функции $F_э(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$, так как выходные цепи радиотехнических устройств и измерительные цепи реальных датчиков физических величин характеризуются постоянной времени τ, вследствие чего с достаточной степенью точности можно считать, что от этих устройств поступают сигналы, выражающиеся во времени экспоненциальными зависимостями даже при скачкообразном (на величину A) изменении измеряемых физических величин.

Как следует из выражения (1), ошибка дискретного интегрирования складывается из ошибки задания значений $F(t_i)$ функции в точках отсчета и ошибки, зависящей от шага квантования Δt. Точность задания отсчетных значений функции определяется качеством работы преобразователя аналоговых величин в цифровой код; требуемая точность достигается надлежащим выбором элементов схемы и достаточным количеством считываемых разрядов кода, что определяется достаточным числом различимых уровней.

В предположении, что функция в точках отсчета задается абсолютно точно, необходимо определить частоту квантования $f_п$, которая обеспечивает допустимую относительную ошибку дискретного интегрирования

$$\delta_1 = \frac{\Delta I}{I}, \tag{2}$$

где $\Delta I = I - I^*$. Ошибка δ_1 будет мала, если функция $F(t)$ медленно меняется на каждом из интервалов Δt. Это условие выполняется, если шаг Δt достаточно мал по сравнению с периодом наибольшей частоты в спектре интегрируемой функции. Базируясь на теореме Котельникова [3], в [2] показывается, что применение метода прямоугольников для интегрирования по бесконечному промежутку функции с ограниченным спектром $F(t,\ \omega_c)$ вообще не сопровождается ошибкой при условии, что частота квантования $f_п$ в два раза превышает верхнюю частоту спектра $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$, поэтому погрешность интегрирования методом прямоугольников функции $F(t)$ обусловлена только теми частотами в ее спектре, которые расположены выше частоты f_c.

Учитывая это, рассмотрим экспоненциальную функцию, заданную на бесконечном промежутке,

$$F_э(t) = \begin{cases} A e^{\frac{t}{\tau}}; & -\infty < t < 0; \\ A e^{-\frac{t}{\tau}}; & 0 < t < \infty, \end{cases} \tag{3}$$

и найдем зависимость относительной погрешности дискретного интегрирования δ_1 от частоты квантования $f_п$ и параметра функции τ.

Принимая во внимание ее симметричность, для относительной ошибки дискретного кодирования на интервале $[-\infty,\ \infty]$ можно иметь такое же значение, как и на интервалах $[-\infty,\ 0]$ или $[0,\ \infty]$, и в дальнейшем может рассматриваться экспоненциальная функция $F_э(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$ с интегрированием по бесконечному промежутку только при положительных значениях аргумента $0 < t < \infty$. Выводы, которые будут получены при интегрировании по бесконечному промежутку, могут быть распространены с достаточной точностью на ограниченный интервал интегрирования $[0,\ T_1]$, где $T_1 > 7\tau$, так как интегральное значение этой экспоненциальной функции на интервале $[T_1,\ \infty]$ меньше 0,1% от интегрального значения на интервале $[0,\ T_1]$.

Граничная частота $f_{с.э}$ спектра экспоненциальной функции определяется из условия, что относительное значение интеграла отброшенных гармоник спектра имеет заданное значение δ_1.

Функция, полученная после ограничения спектра функции частотой $f_{с.э}$, через спектральную плотность $S_э(\omega)$ выражается зависимостью

$$F_э(t, \omega_{с.э}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\omega_{с.э}}^{\omega_{с.э}} S_э(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega, \tag{4}$$

где

$$S'_э(\omega) = \int\limits_0^{\infty} F_э(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{A}{\dfrac{1}{\tau} + j\omega}. \qquad (5)$$

Интегральное значение $I_э(\omega_{с.э})$ на бесконечном интервале $[0, \infty]$ экспоненциальной функции с ограниченным спектром $F_э(t, \omega_{с.э})$ определяется путем предельного перехода на бесконечный интервал интегрального значения $I_э(T, \omega_{с.э})$, вычисленного на конечном интервале $[0, T]$:

$$I_э(\omega_{с.э}) = \lim_{T \to \infty} I_э(T, \omega_{с.э}) = \lim_{T \to \infty} \int\limits_0^T F_э(t, \omega_{с.э})\, dt. \qquad (6)$$

После несложных преобразований находим

$$I_э(\omega_{с.э}) = A\tau\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \omega_{с.э}\tau\right). \qquad (7)$$

Учитывая в выражении (7) все частоты спектра $\omega_{с.э} = \infty$, получим точное значение интеграла $I_э$ экспоненциальной функции $F_э(t)$, вычисленное на интервале $[0, \infty]$:

$$I_э = A\tau. \qquad (8)$$

Относительную ошибку дискретного интегрирования экспоненциальной функции δ_1, определяемую конечностью шага интегрирования, найдем из выражений (2), (7) и (8), где за приближенные значения интеграла I^* примем интегральное значение $I_э(\omega_{с.э})$ функции с ограниченным спектром $F_э(t, \omega_{с.э})$:

$$\delta_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \omega_{с.э}\tau, \qquad (9)$$

откуда определим граничную частоту спектра

$$f_{с.э} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(1 - 2\delta_1)\frac{1}{\tau}. \qquad (10)$$

Итак, для обеспечения дискретного интегрирования с относительной ошибкой δ_1 функции, изменяющейся по экспоненциальному закону с постоянной времени τ, необходима частота преобразования, равная

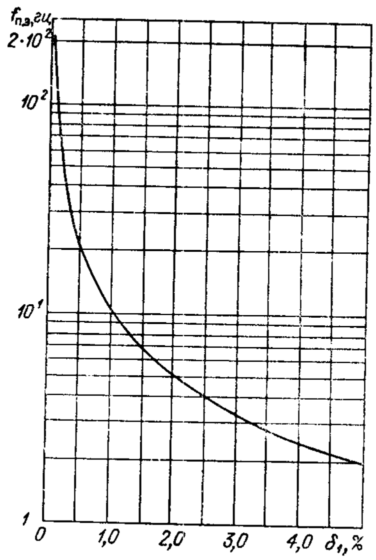
$$f_{п.э} = 2f_{с.э} = \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(1 - 2\delta_1)\frac{1}{\tau}. \qquad (11)$$

В таблице приведены расчетные значения граничной частоты

δ_1, %	$f_{с.э}$, *гц*	$f_{п.э}$, *гц*	$f'_{п.э}$, *гц*	$\dfrac{f'_{п.э}}{f_{п.э}}$
0,05	103,3	202,6	705980	3485
0,1	50,8	101,5	195405	1925
0,2	25,4	50,7	50081	988
0,3	16,9	33,8	22378	663
0,4	12,7	25,3	12612	498
0,5	10,2	20,3	8078	398
0,6	8,45	16,9	5612	332

δ_1, %	$f_{с.э}$, *гц*	$f_{п,э}$, *гц*	$f'_{п.э}$, *гц*	$\frac{f'_{п.э}}{f_{п.э}}$
0,7	7,25	14,5	4129	285
0,8	6,35	12,7	3156	249
0,9	5,65	11,3	2495	222
1,0	5,05	10,1	2022	200
1,5	3,38	6,75	899	133
2,0	2,53	5,06	506	100
2,5	2,02	4,04	324	80,1
3,0	1,68	3,37	225	66,7
3,5	1,44	2,88	164	56,9
4,0	1,26	2,52	126	50.0
4,5	1,12	2,24	100	44,7
5,0	1,01	2,01	80,9	40,2

$f_{с.э}$ и частоты преобразования $f_{я.э}$, необходимые для достижения относительной ошибки интегрирования δ_1. В этой же таблице приведены значения частоты преобразования $f'_{п.э}$, необходимые для воспроизведения мгновенных значений экспоненциальной функции с относительной ошибкой δ_1, найденные в [4] из условия, что энергия суммы отброшенных гармоник спектра не превышает энергии сигнала ошибки. Из сравнения следует, что для достижения одинаковой точности при интегрировании требуется на 2—3 порядка меньшая частота преобразования, чем при воспроизведении мгновенных значений экспоненциальной функции.



На рисунке представлен график зависимости частоты преобразования $f_{п.э}$ от ошибки интегрирования δ_1 при постоянной времени $\tau=1$ *сек*. Для других значений τ необходимо полученные из графика значения $f_{п.э}$ множить на коэффициент $\frac{1}{\tau}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Крылов. Приближенное вычисление интегралов. М., Физматгиз, 1959.
2. В. В. Быков, В. Н. Малайчук. О погрешности цифрового интегрирования стационарного случайного процесса.— Автоматика и телемеханика, 1966, № 2.
3. В. А. Котельников. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи.— Материалы по радиосекции к I Всесоюзному съезду по вопросам техники реконструкции связи, 1933.
4. Б. В. Анисимов, Ю. В. Виноградов. К вопросу точности представления непрерывно изменяющихся величин в цифровом коде.— Вычислительная техника, 1959, № 2.

Поступила в редакцию
25 октября 1968 г.,
окончательный вариант —
29 сентября 1969 г.