АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1970

УДК 681.2+082/083

И. В. СМЕРТИНЮК

(Новосибирск)

УЛУЧШЕНИЕ ОЦЕНОК ПОЛЕЗНЫХ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ МЕШАЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ

Введение и постановка задачи. В [1] был рассмотрен метод получения нелинейных оценок полезных параметров $\psi_1, \ldots, \psi_s$ сигналов $x_j(t)$, измеряемых с аддитивными гауссовыми погрешностями $\xi_j(t_i)$:

$$x_j(t_i) = \Theta_j \varphi_j(t_i) + \xi_j(t_i) \quad (j = \overline{1, k};\ i = \overline{1, n_j}), \tag{1}$$

где $\Theta_j = \Theta_j(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ — функции, зависящие от неизвестных постоянных $\psi_1, \ldots, \psi_k$; $\varphi_j(t)$ — произвольные функции времени; $\xi_j(t_i)$ — некоррелированные нормально распределенные центрированные величины с дисперсиями σ_{ji}^2; n_j — число измерений величины x_j; $\psi_{s+1}, \ldots, \psi_k$ — мешающие параметры $(s \leqslant k)$.

Задача сводилась к отысканию функций-оригиналов $\hat{\psi}_i(T_1, \ldots, T_k)$ $(i = \overline{1, s})$ кратного двустороннего преобразования Лапласа по известным функциям-изображениям $\psi_i(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ $(i = \overline{1, s})$. Здесь $T_1, \ldots, T_k$ — достаточные статистики для $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$.

Оценки имели вид линейных комбинаций полиномов Эрмита от достаточных статистик $T_1, \ldots, T_k$, являющихся функциями непосредственно измеряемых величин $x_j(t_i)$ и сохраняющих всю информацию об интересующих нас параметрах.

Задача решалась также в предположении, что между величинами Θ_j отсутствуют функциональные зависимости. Вследствие этого получаемые оценки являлись единственными и оптимальными по критерию минимума дисперсии в классе несмещенных оценок.

Однако в практических приложениях приходится часто сталкиваться с ситуацией, когда при измерении совокупности сигналов вида (1) известны также функциональные зависимости между величинами Θ_j:

$$\Pi_j(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) = 0 \quad (j = \overline{1, m}). \tag{2}$$

Зависимости вида (2) существуют в тех случаях, когда измеряется большее количество сигналов $\Theta_j \varphi_j(t)$, чем это необходимо для однозначного определения функций $\psi_i(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$, либо когда существуют функциональные связи непосредственно между самими параметрами $\psi_i\ (i = \overline{1, k})$. Последний случай, в конечном счете, сводится к первому;

поэтому в примере, приведенном в конце статьи, рассмотрен именно первый случай.

Построение оптимальных оценок по критерию минимума дисперсии с учетом (2) означает, что мы используем дополнительные измерения либо дополнительную информацию о параметрах для повышения точности их оценок.

Будем предполагать, что функции $\Pi_j(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ являются полиномами от $\Theta_j\ (j = \overline{1, k})$. Это требование не является существенным ограничением, так как любую непрерывную функцию можно представить с необходимой точностью полиномом конечной степени в ограниченной области $\Theta_j \leqslant B_j$, где B_j — заданные числа.

К функциям $\Theta_j(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ предъявляются те же требования, что и в [1], обеспечивающие существование однозначных и непрерывных функций $\psi_i(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$, обладающих необходимым количеством частных производных. Там же было показано, что в задачах, встречающихся в практике измерений, эти требования, как правило, выполняются.

По-прежнему будем заниматься отысканием оценки только для параметра ψ_1, обозначаемого в дальнейшем ψ, поскольку построение оценок для остальных параметров производится совершенно аналогично.

Несмещенные оценки нуля. Решать поставленную задачу будем следующим образом. Вначале построим семейство несмещенных оценок $\hat{\psi}^{(s)}$ параметра ψ. Затем из этого семейства выберем оценку с наименьшей дисперсией.

Оказывается, что это не всегда возможно осуществить, поскольку оптимальная оценка при наличии соотношений (2) существует только в ряде строго определенных случаев. Если же функции $\Pi_j(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ являются линейными формами относительно $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$, то оптимальные оценки существуют всегда и находятся довольно простым способом.

Оценки параметра ψ будем искать в виде функций от достаточных статистик $T_i\ (i = \overline{1, k})$, а не от первоначально измеряемых величин $x_j(t_i)$.

Если между величинами $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ существуют функциональные связи, то теорема единственности не выполняется и несмещенных оценок может быть много [2]. Пусть $\hat{\psi}^{(0)}(T_1, \ldots, T_k)$ — одна из этих оценок, тогда любая несмещенная оценка $\hat{\psi}^{(s)}$ параметра ψ может быть представлена в виде

$$\hat{\psi}^{(s)}(T_1, \ldots, T_k) = \hat{\psi}^{(0)}(T_1, \ldots, T_k) + \chi^{(s)}(T_1, \ldots, T_k), \tag{3}$$

где $\chi^{(s)}(T_1, \ldots, T_k) = \hat{\psi}^{(s)}(T_1, \ldots, T_k) - \hat{\psi}^{(0)}(T_1, \ldots, T_k)$ — несмещенная оценка нуля.

Таким образом, для получения семейства несмещенных оценок параметра ψ достаточно иметь описание совокупности несмещенных оценок нуля $\chi^{(s)}$.

Несмещенные оценки нуля $\chi^{(s)}$ характеризуются только одним свойством: их математическое ожидание равно нулю для всех $\Theta_j\ (j = \overline{1, k})$, принадлежащих конечной области D, границы которой задаются условиями задачи:

$$E_\Theta\{\chi^{(s)}(T_1, \ldots, T_k)\} = 0;\ \Theta_1, \ldots, \Theta_k \in D.$$

В [1] было показано, как находить функцию от $T_1, \ldots, T_k$, математическое ожидание $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ которой известно и является полиномом от $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$. А именно задача сводилась к отысканию функции-оригинала $m(\tau_1, \ldots, \tau_k) \exp\left\{-\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \tau_i^2\right\}$ k-кратного преобразования Лапласа по заданной функции-изображению $\varphi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) = \psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) \times \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} \frac{\Theta_i^2}{4\alpha_i^2}\right\}$, где α_i — известные величины. Здесь $\varphi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ — аналитическая функция от комплексных переменных $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$.

Перед нами сейчас возникает необходимость построить семейство аналитических функций от $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$, обращающихся в нуль при $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$, и являющихся функциями-изображениями кратного двустороннего преобразования Лапласа. Получаемые при обратном преобразовании Лапласа функции-оригиналы как раз и будут искомыми несмещенными оценками нуля.

Повторив рассуждения, приведенные в [2] для случая одностороннего преобразования Лапласа, можно получить общее выражение для семейства искомых функций $\varphi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$:

$$\varphi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) = \sum_{l=1}^{m} \Pi_l(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)\, G_l(\Theta_1, \ldots, \Theta_k), \qquad (4)$$

где $G_l(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ — аналитические функции от $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$, характеризующиеся тем, что произведения $\Pi_l(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)\, G_l(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ являются функциями-изображениями k-кратного двустороннего преобразования Лапласа.

Поскольку функция $\exp\left\{\sum_{i=1}^{k} \frac{\Theta_i^2}{4\alpha_i^2}\right\}$ не равна нулю в конечной области $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$, то (4) можно переписать в виде

$$\varphi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) = \sum_{l=1}^{m} \Pi_l(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) \times$$

$$\times G_l'(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} \frac{\Theta_i^2}{4\alpha_i^2}\right\}. \qquad (5)$$

Здесь $G_l'(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) = G(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) / \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} \frac{\Theta_i^2}{4\alpha_i^2}\right\}$ также является аналитической функцией.

Известно, что в ограниченной области аналитические функции с любой точностью могут быть аппроксимированы степенными полиномами. Поэтому мы будем рассматривать функции $G_l'(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ в виде полиномов

$$G_l'(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) = \sum_{i=1}^{p} g_i \prod_{j=1}^{k} \Theta_j^{s_j(ij)}, \qquad (6)$$

где g_i — произвольные коэффициенты; p — число, определяемое степенью полинома.

В [3] показано, что функции-оригиналы кратного двустороннего преобразования Лапласа существуют для функций-изображений вида (5) при любых g_i и $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$.

Таким образом, несмещенные оценки нуля можно получить тем же методом, что и в [1], рассматривая математическое ожидание их в виде

$$\varphi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) = \sum_{j=1}^{m} \Pi_j(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) \sum_{i=0}^{p} g_i \prod_{l=1}^{k} \Theta_l^{s(il)}. \tag{7}$$

Действительно, мы с самого начала предположили, что функции $\Pi_j(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ имеют вид полиномов, поэтому (7) можно переписать так:

$$\varphi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) = \sum_{l=0}^{q(p)} c_l(g_1, \ldots, g_p) \prod_{j=1}^{k} \Theta_j^{r(lj)}, \tag{8}$$

где $c_l(g_1, \ldots, g_p)$ — линейные функции от $g_1, \ldots, g_p$.

В [1] было выведено соответствие между функциями $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$, представляемыми в виде полиномов, и их несмещенными оценками. Это соответствие применительно к нашему случаю и с учетом (8) дает следующее выражение для несмещенной оценки нуля:

$$\chi(T_1, \ldots, T_k) = \sum_{l=0}^{q(p)} c_l(g_1, \ldots, g_p) \prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{r(lj)} H_{r(lj)}(\lambda_j T_j),$$

где $H_{r(lj)}(\lambda_j T_j)$ — полином Эрмита порядка $r(lj)$ от $\lambda_j T_j$;

$$\lambda_j = \left[2 \sum_{i=1}^{n_j} \varphi_j^2(t_i)\, \sigma_{ji}^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}; \quad T_j = \sum_{i=1}^{n_j} x(t_i)\, \varphi_j(t_i)\, \sigma_{ji}^2.$$

Пользуясь методикой, разработанной в [1], можно также представить дисперсию несмещенной оценки $\hat{\psi}^{(s)}(T_1, \ldots, T_k)$ параметра $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ (3) в виде линейной комбинации полиномов Эрмита, где коэффициенты g_i будут произвольными.

Будем выбирать эти коэффициенты с таким расчетом, чтобы дисперсия оценки $\hat{\psi}^{(s)}(T_1, \ldots, T_k)$ была минимальна. Полученная таким способом несмещенная оценка $\hat{\psi}^{(s)}(T_1, \ldots, T_k)$ параметра $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ будет наилучшей по критерию минимума дисперсии в классе несмещенных оценок при удовлетворении условиям (2).

Таким образом, дисперсия оценки $\hat{\psi}^{(s)}(T_1, \ldots, T_k)$ будет равна

$$D\{\hat{\psi}^{(s)}(T_1, \ldots, T_k)\} = \max_{\Theta_1, \ldots, \Theta_k \in D} \min_{g_1, \ldots, g_p} F(\Theta_1, \ldots, \Theta_k; g_1, \ldots, g_p), \tag{9}$$

где $F(\Theta_1, \ldots, \Theta_k; g_1, \ldots, g_p)$ — дисперсия оценки;

$$\hat{\psi}^{(s)}(T_1, \ldots, T_k) = \hat{\psi}^{(0)}(T_1, \ldots, T_k) + \sum_{l=0}^{q(p)} c_l(g_1, \ldots, g_p) \prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{r(lj)} H_{r(lj)}(\lambda_j T_j).$$

Коэффициенты $g_1, \ldots, g_p$, выбранные в соответствии с (9), однозначно определяют оценки $\hat{\psi}^{(s)}(T_1, \ldots, T_k)$.

В любой конкретной задаче, вследствие существования верхней границы допустимой сложности расчетов, максимальная степень полиномов (6) будет фиксирована. Поэтому получаемое по формулам (8), (9) семейство оценок ψ будет более узким, чем это позволяют соотношения (2).

Следовательно, указанный метод обеспечивает лишь частичное улучшение точности оценок в случае, если оптимальная оценка может быть получена только при использовании полиномов более высокой степени. Кроме того, как будет показано ниже, в ряде случаев может вообще не существовать такой конечной совокупности коэффициентов g_i, при которых оценка является оптимальной.

Существование оптимальных оценок. В работе [4] были определены необходимые и достаточные условия того, что существует оптимальная оценка параметра $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ при наличии условий (2) или, что то же самое, $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ задана в области $E_k \bigcap_{j=1}^{m} \Pi_j(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$, где E_k — линейное пространство размерности k с элементами $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$. Условия эти сводятся к следующим.

I. В пространстве E_k переменных $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ существует линейная система координат, в которой N_m — наименьшее алгебраическое многообразие, совпадающее с $E_k \bigcap_{j=1}^{m} \Pi_j(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$, — является цилиндром вида $L \times \nu$, где L — координатное подпространство $\Theta'_1 = \ldots \Theta'_r = 0$, а ν — некоторое множество в подпространстве $\Theta'_{r+1} = \ldots = \Theta'_k = 0$.

II. В соответствующей системе координат $T'_1, \ldots, T'_k$ в пространстве R^k значений $T_1, \ldots, T_k$ функция $\hat{\psi}(T'_1, \ldots, T'_k)$ зависит только от $T'_{r+1}, \ldots, T'_k$.

Следствием из этих условий является существование оптимальных оценок в случае, когда уравнения (2) являются линейными формами относительно $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$. Докажем это, показав попутно способ построения таких оценок.

Действительно, при этом $N = E_k \bigcap_{j=1}^{m} \Pi_j(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ является гиперплоскостью L' размерности $k - m < k$, определяемой видом $\Pi_j(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ $(j = \overline{1, m})$. Посредством ортогонального преобразования системы координат, сдвига ее начала в пространстве E_k и перехода к новым координатам $\Theta'_1, \ldots, \Theta'_k$ получим подпространство $(L\,\Theta'_1, \ldots, \Theta'_k)$. Множество ν (в подпространстве $\Theta'_{r+1} = \ldots = \Theta'_k = 0$) в данном случае вырождается в точку $\Theta'_1 = \ldots = \Theta'_k = 0$.

В завершение необходимо доказать, что оценка параметра $\hat{\psi}(T'_1, \ldots, T'_k)$ в новой системе координат $T'_1, \ldots, T'_k$ пространства R^k достаточных статистик будет зависеть только от $T'_{r+1}, \ldots, T'_k$. Из (8) и (9) видно, что для этого нужно показать, что полином $\psi(\theta)$ при подстановке $\Theta_i = f_i(\Theta'_1, \ldots, \Theta')$ $(i = \overline{1, k})$ не зависит от $\Theta'_1, \ldots, \Theta'_m$. В самом деле, m линейных условий (2) представляют в пространстве E_k m гиперплоскостей размерности k—1, пересечение которых образует гиперплоскость N размерности $k - m$.

Нетрудно убедиться в том, что можно подобрать такой сдвиг начала координат и такой поворот базиса, при которых гиперплоскость N перейдет в подпространство L размерности $k-m$ в соответствующей системе координат $\Theta_1', \ldots, \Theta_k'$:

$$\Theta' = I + C\Theta, \tag{10}$$

где I — вектор сдвига начала координат; C — матрица ортогонального преобразования; Θ, Θ' — векторы $\{\Theta_j\}$ $(j = \overline{1, k})$ и $\{\Theta_j'\}$ $(j = \overline{1, k})$ соответственно.

Гиперплоскости, определяемые в прежней системе координат уравнениями

$$\Pi_j(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) = 0 \quad (j = \overline{1, m}),$$

в новой системе координат можно заменить гиперплоскостями с уравнениями

$$\Theta_j' = 0 \quad (j = \overline{1, m}). \tag{11}$$

Действительно, область пересечения гиперплоскостей с учетом сдвига начала координат (10) в обоих случаях будет одной и той же.

В полиноме $\psi(\Theta')$, полученном из $\psi(\Theta)$ в соответствии с (10) и (11), следует принять $\Theta_1' = \ldots = \Theta_m' = 0$. Тогда оценка $\hat{\psi}(T_1', \ldots, T_k')$ параметра $\psi(\Theta_1', \ldots, \Theta_k')$ не будет зависеть от $T_1', \ldots, T_m'$. Таким образом, существование оптимальных оценок в случае линейных зависимостей (2) доказано.

Для пространства параметров L_{k-m} выполняются условия теоремы единственности [2], поэтому любая другая оптимальная оценка будет совпадать с первоначально построенной с вероятностью 1.

Получать оптимальные оценки можно без указанных выше преобразований. А именно достаточно подставить в $\psi(\Theta)$ любые m величин

$$\Theta_j = \Pi_j'(\Theta_{m+1}, \ldots, \Theta_k) \quad (j = \overline{1, m}), \tag{12}$$

полученные из уравнений (2). В самом деле, при последующей замене переменных вида (12) функция $\psi(\Theta_1', \ldots, \Theta_k')$ не будет зависеть от $\Theta_1', \ldots, \Theta_m'$, поскольку указанная подстановка должна обеспечить выполнение равенств (11):

$$\Theta_1' = \ldots = \Theta_m' = 0. \tag{13}$$

Здесь, как и в предыдущем преобразовании, выбор величин Θ_j из совокупности $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ в (12) определяется видом уравнений (2) и переобозначение индексов, если это необходимо, производится в конце.

Однако семейство достаточных статистик при этом изменится. Покажем, как можно построить это новое семейство в явном виде.

Известно, что достаточными статистиками (при соблюдении условий, выполняющихся в нашей задаче) являются функции $T_j(x_j)$ от первоначально измеряемых величин $x_j(t_i)$, удовлетворяющие следующему соотношению:

$$f_\Theta(x_j) = g[\Theta, T(x_j)]\, h(x_j), \tag{14}$$

где $f_\Theta(x_j)$ — плотность распределения случайного вектора x_j; $g[\Theta, T(x_j)]$ — функция, зависящая от x_j только через посредство $T(x_j)$; $h(x_j)$ — функция, не зависящая от $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$.

Плотность распределения гауссовых случайных величин $x_j(t_i)$ $(j = \overline{1, k};\ i = \overline{1, n_j})$ можно записать следующим образом:

$$f(x) = C(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) \exp\left\{-\sum_{j=1}^{k} \Theta_j T_j(x_j)\right\} h(x), \qquad (15)$$

где $T_j(x_j) = \sum_{i=1}^{n_j} \sigma_{ji}^{-2} x_j(t_i) \varphi_j(t_i)$ — достаточные статистики для величин Θ_j.

При подстановке (12) функция $\sum_{j=1}^{k} \Theta_j T_j$ сведется к выражению

$$\sum_{j=1}^{k-m} \Theta_j T'_j. \qquad (16)$$

Разумеется, будут исключены не обязательно Θ_j с индексами $j = \overline{1, m}$, но с помощью переобозначений индексов всегда можно получить функцию вида (16).

Сопоставление (14)—(16) показывает, что достаточными статистиками в данном случае будут функции $T'_j(x)$, получаемые из (16). Если это необходимо, семейство T'_j ортогонализируется и нормируется с помощью добавления нужных констант, с тем чтобы выполнялось соотношение (9):

$$E\{T'_j(x) + c\} = \Theta_j \Phi_j^T \Sigma_j^{-1} S,$$

где $S = \{s_i\}$ $(i = \overline{1, n_j})$; $s_i = 1$. Это необходимо для выполнения соответствий между (8) и (9).

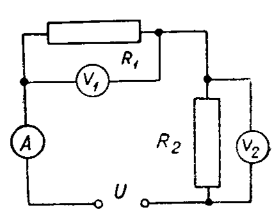
Таким образом, оценка $\hat{\psi}(T'_1, \ldots, T'_k)$, построенная по правилу, аналогичному соответствию между (8) и (9), где $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_{k-m})$ получена из $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ подстановкой (12), а величинам Θ_j соответствуют достаточные статистики $T'_j(x)$ вида (16), удовлетворяет обоим условиям существования оптимальных оценок.

Поскольку оптимальная оценка единственна, то она обязана совпадать с оценкой, построенной первоначальным путем, с использованием преобразований (10—12).

Оптимальную оценку можно построить еще одним способом, а именно: в пространстве E_k переменных $\Theta'_1, \ldots, \Theta'_k$ нужно построить несмещенные оценки нуля в соответствии с (8) и (9). Коэффициенты $c_l(g_1, \ldots, g_p)$ подбираются таким образом, чтобы оценка $\hat{\psi}(T'_1, \ldots, T'_k)$, получаемая из (3), удовлетворяла условиям **I** и **II**.

Аналогичные рассуждения полностью применимы к построению асимптотически оптимальных оценок с учетом (2) для повышения их точности.

Пример. Данный пример взят из [1]. Добавлен только дополнительный прибор — вольтметр V_2, использование показаний которого позволяет получить улучшенные оценки.



К источнику напряжения U подключены два сопротивления R_1 и R_2 (см. рисунок). Известны номинальные значения: $U = 100$ *в*; $R_{1н} = 50$ *ом*; $R_{2н} = 200$ *ом*. Допустимый разброс величин R_1 и R_2 не более 5% от их номинальных значений. С помощью вольтметров V_1 и V_2 и амперметра A

требуется определить величину R_1. Здесь мешающим параметром будет R_2. Выражения для тока i_s и напряжений u_{1s} и u_{2s} представляются в виде

$$i_s = \Theta_1 + \xi_s; \quad u_{1s} = \Theta_2 + \eta_s; \quad u_{2s} = \Theta_3 + \zeta_s,$$

где

$$\Theta_1 = \frac{U}{R_1 + R_2}; \quad \Theta_2 = \frac{UR_1}{R_1 + R_2}; \quad \Theta_3 = \frac{UR_2}{R_1 + R_2};$$

ξ_s, η_s, ζ_s — центрированные нормально распределенные погрешности с среднеквадратичными отклонениями, определяемыми по формулам:

$$\sigma_1 = \frac{\delta_1 U}{R_{1н} + R_{2н}}; \quad \sigma_2 = \frac{\delta_2 U R_{1н}}{R_{1н} + R_{2н}}; \quad \sigma_3 = \frac{\delta_3 U R_{2н}}{R_{1н} + R_{2н}}, \tag{17}$$

где δ_1, δ_2 и δ_3 задаются классом точности A, V_1 и V_2 соответственно: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_0 = 0{,}01$. Достаточными статистиками для Θ_1, Θ_2, Θ_3 будут величины:

$$T_1 = \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{s=1}^{n} i_s; \quad T_2 = \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{s=1}^{n} u_{1s}; \quad T_3 = \frac{1}{\sigma_3^2}\sum_{s=1}^{n} u_{2s},$$

где n — число измерений.

Величину $R_1 = \frac{\Theta_2}{\Theta_1}$ с относительной погрешностью $\delta_{max} = 10^{-4}$ можно представить в виде

$$R_1'(\Theta_1, \Theta_2) = 2{,}5\,\Theta_2\,(3 - 7{,}5\,\Theta_1 + 6{,}25\,\Theta_1^2).$$

Справедливо уравнение связи:

$$\Theta_2 + \Theta_3 - U = 0.$$

При подстановке в $\sum_{j=1}^{3} \Theta_j T_j$ величины $\Theta_3 = U - \Theta_2$ получим $\sum_{j=1} \Theta_j T_j'$, где $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2 - T_3 + \frac{nU}{\sigma_3^2}$. Тогда оценка $\hat{R}_1(T_1', T_2')$, обладающая относительным смещением $\delta_{max} = 10^{-4}$, имеет вид

$$\hat{R}_1(T_1', T_2') = 2{,}5\,\lambda_2 H_1(\lambda_2 T_2')\,[3 - 7{,}5\,\lambda_1 H_1(\lambda_1 T_1') + 6{,}25\,\lambda_1^2 H_2(\lambda_1 T_1')], \tag{18}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2n}}; \quad \lambda_2 = \frac{\sigma_2 \sigma_3}{\sqrt{2(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)\,n}}.$$

Наличие мультипликативной погрешности измерений (17) вместо аддитивной сказывается в появлении дополнительного смещения [за счет нулевого члена в $H_2(\lambda_1 T_1')$ (18)] порядка

$$\delta_{см} = \frac{30\,\delta_0^2}{n}.$$

Дисперсия $D\{\hat{R}_1(T_1, T_2')\}$, представляемая полиномом второго порядка, вычисляется аналогично [1]. В таблице приведены значения величины $\sqrt{D} = \frac{1}{R_{1н}}\sqrt{D\{\hat{R}_1(T_1, T_2')\}}$ и для сравнения значения $\sqrt{D'}$ для случая, когда отсутствуют дополнительные измерения [1].

n	50	500	1000	1500	2000	1500
$\sqrt{D}$	$2{,}54 \cdot 10^{-3}$	$8{,}02 \cdot 10^{-4}$	$5{,}66 \cdot 10^{-4}$	$4{,}64 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$3{,}58 \cdot 10^{-4}$
$\sqrt{D_a}$	$1{,}94 \cdot 10^{-3}$	$6{,}12 \cdot 10^{-4}$	$4{,}36 \cdot 10^{-4}$	$3{,}56 \cdot 10^{-4}$	$3{,}08 \cdot 10^{-4}$	$2{,}76 \cdot 10^{-4}$
$\sqrt{D'}$	$2{,}56 \cdot 10^{-3}$	$8{,}1 \cdot 10^{-4}$	$5{,}74 \cdot 10^{-4}$	$4{,}68 \cdot 10^{-4}$	$4{,}06 \cdot 10^{-4}$	$3{,}63 \cdot 10^{-4}$
$\sqrt{D_a'}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$6{,}32 \cdot 10^{-4}$	$4{,}47 \cdot 10^{-4}$	$3{,}65 \cdot 10^{-4}$	$3{,}16 \cdot 10^{-4}$	$2{,}83 \cdot 10^{-4}$

Асимптотически оптимальная оценка $\hat{R}_{1a}(T_1, T_2')$ будет определяться следующим образом:

$$\hat{R}_{1a}(T_1, T_2') = \frac{\lambda_2^2 T_2'}{\lambda_1^2 T_1}. \tag{19}$$

Выражение (19) дает асимптотически оптимальную оценку с дисперсией, нормированной относительно $R_{1н}$ [1]:

$$D_a = \frac{1{,}9\,\delta_0^2}{n}.$$

Соотношение для дисперсии D_a верно при $n \gg 1{,}5$. Значения $\sqrt{D_a}$ приведены в таблице, где для сравнения даны значения $\sqrt{D_a'}$ для случая, когда отсутствуют дополнительные измерения [1].

Заключение. Таким образом, из всего изложенного видно, что существует принципиальная возможность учета дополнительных измерений либо дополнительной информации об измеряемых сигналах для улучшения точности определяемых параметров при наличии мешающих параметров с помощью метода, рассмотренного в [1].

При наличии линейных связей между сигналами (без учета временно́го множителя) существует оптимальная оценка определяемого параметра, которую легко построить.

В остальных случаях можно использовать методику второго раздела для частичного улучшения точности получаемых оценок.

Существование связей между сигналами можно также использовать для улучшения точности асимптотически оптимальных оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Смертинюк. Нелинейные оценки полезных параметров сигналов, измеряемых с аддитивными гауссовыми погрешностями.— Автометрия, 1969, № 6.
2. Ю. В. Линник. Статистические задачи с мешающими параметрами. М., «Наука», 1966.
3. Ван дер Поль и Х. Бреммер. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
4. А. М. Каган. Теория оценивания для семейств с параметрами сдвига, масштаба и экспонентных.— Труды Математического института им. Стеклова, т. 104, Л., «Наука», 1968.

Поступила в редакцию
17 июля 1969 г.