А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1970

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 621.317.088+519.2

В. Н. БОЙКОВ, Ю. М. КРЕНДЕЛЬ

(*Новосибирск*)

О МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ГРУППОЙ ЦИФРОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

Рассматривается следующая система массового обслуживания. Имеется m одинаковых объектов, каждый из которых посылает простейший поток заявок с параметром λ на некоторую обслуживающую систему. Поток заявок от каждого объекта представляет собой поток реализаций случайной величины x, распределенной на интервале $[0, L]$ с плотностью вероятностей $f(x)$, одинаковой для всех объектов.

Система обслуживания представляет собой n цифровых приборов двоичного уравновешивания, призванных производить измерение реализаций величины x по соответствующим заявкам, поступающим на систему. Если заявка от какого-либо объекта принята к обслуживанию, то данный объект не посылает заявок в продолжение всего времени обслуживания этой заявки и прибор в течение этого времени считается занятым. По окончании обслуживания заявки прибор становится свободным, а поток заявок от этого объекта мгновенно восстанавливает свои первоначальные свойства.

Если в момент поступления заявки от одного из объектов имеется свободный прибор, то заявка обслуживается этим прибором (если свободных приборов несколько, то обслуживание поступающей заявки осуществляет один из них). Если в момент появления заявки все приборы заняты, то заявка получает отказ (теряется), и все дальнейшее происходит так, как если бы этой заявки не было. Если заявка принята к обслуживанию, то погрешность измерения соответствующей реализации величины x не превышает погрешности квантования. Если же заявке отказано в обслуживании, то соответствующей реализации величины x присваивается значение математического ожидания величины x.

В качестве критерия оценки работы описанной системы может быть использована одна из метрологических характеристик: средний модуль погрешности, средний квадрат погрешности и т. п. Здесь в качестве критерия оценки берется средний модуль погрешности измерения. Погрешность измерения складывается из погрешности квантования и погрешности, образующейся за счет потерянных заявок, поэтому средний модуль погрешности измерения M определяется выражением

$$M = (1-p)\, M_x + p M_a, \tag{1}$$

где p — вероятность отказа заявке в обслуживании; M_x — средний модуль погрешности квантования; M_a — средний модуль погрешности, образующейся за счет необслуженных заявок. $M_x = \int_0^L \{x\}_r f(x)\,dx$ (здесь $\{x\}_r = x - [x]_r$ — погрешность квантования; $[x]_r$ — результат измерения величины x; r — число разрядов цифрового прибора). Введем обозначение $[x]_r = \frac{[x]\,L}{2^r}$, после чего выражение для M_x запишем в виде

$$M_x = \int_0^L \left(x - \frac{[x]\,L}{2^r}\right) f(x)\,dx = a - \frac{L}{2^r} \sum_{i=1}^{2^r} (i-1) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx,$$

где $x_i = \frac{L}{2^r} i$ $\left(\frac{L}{2^r}\right.$ — величина одного кванта при фиксированном r; i — номер кванта); a — математическое ожидание величины x; $M_a = \int_0^L |x - a|\,f(x)\,dx$.

Пусть $f(x)$ — симметричная функция на $[0, L]$ относительно точки $\frac{L}{2}$ $\left(\text{очевидно, что } a = \frac{L}{2}\right)$. Тогда

$$M_x = \frac{L}{2 \cdot 2^r}; \tag{2}$$

$$M_a = \left| a - 2\int_0^{L/2} x f(x)\,dx \right| = L\,c,$$

где $0 \leqslant c \leqslant \frac{1}{2}$.

Будем говорить, что система находится в состоянии k, если в данный момент занято k ($k=0, 1, \ldots, n$) приборов. Ясно, что заявка получает отказ в случае, когда система находится в n-м состоянии.

Пусть $[k]$ — вероятность состояния k, т. е. отношение длительности состояния k за (большой) промежуток времени T к длине T этого промежутка.

Определим вероятность p отказа заявке в обслуживании, как отношение числа заявок, которым отказано в обслуживании, к общему числу заявок, поступивших на обслуживающую систему за промежуток времени T; тогда

$$p = \frac{T\,[n]\,\lambda\,(m-n)}{T\,[n]\,\lambda\,(m-n) + \frac{T}{s}\sum\limits_{k=1}^{n} k\,[k]}, \tag{3}$$

где $T[n]\lambda(m-n)$ — число заявок, которым отказано в обслуживании за время T; $\frac{T}{S}\sum\limits_{k=1}^{n} k\,[k]$ — число обслуженных заявок за время T, полученное следующим образом.

Естественно предположить, что каждый прибор загружен в среднем одинаково за время T, поэтому наработку за это время одного прибора можно представить выражением

$$T\left(\frac{[1]}{C_n^1}C_n^0+\frac{[2]}{C_n^2}C_{n-1}^1+\ldots+\frac{[k]}{C_n^k}C_{n-1}^{k-1}+\ldots+\frac{[n]}{C_n^n}C_{n-1}^{n-1}\right)=$$

$$=\frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n}k\,[k],$$

откуда наработка за время T для всех приборов составляет $T\sum_{k=1}^{n}k\ [k]$ и число обслуженных заявок за это время равно $\frac{T}{s}\sum_{k=1}^{n}k\ [k]$ (s — среднее время обслуживания одной заявки). Здесь предполагается, что время обслуживания заявок имеет произвольный закон распределения. Основываясь на методе, изложенном в работе*, можно показать, что при произвольном законе распределения времени обслуживания заявок вероятность состояния k выражается так:

$$[k]=C_m^k\,(s\,\lambda)^k\,[0]. \tag{4}$$

Теперь (3) запишем следующим образом:

$$p=\frac{(m-n)\,C_m^n\,(s\,\lambda)^n}{\sum\limits_{k=0}^{n}(m-k)\,C_m^k\,(s\,\lambda)^k}. \tag{5}$$

Если обслуживание в рассматриваемой системе осуществляется цифровыми приборами поразрядного уравновешивания, то $s=r\tau$, где τ — длительность одного такта, и (1) с учетом (2) и (5) имеет вид

$$M=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}(m-k)\,C_m^k\,(\lambda\,\tau)^k\,r^k}{\sum\limits_{k=0}^{n}(m-k)\,C_m^k\,(\lambda\,\tau)^k\,r^k}\;\frac{L}{2\cdot 2^r}+\frac{(m-n)\,C_m^n\,(\lambda\,\tau)^n\,r^n}{\sum\limits_{k=0}^{n}(m-k)\,C_m^k\,(\lambda\,\tau)^k\,r^k}\,L\,c. \tag{6}$$

Если же при обслуживании используются цифровые приборы развертывающего уравновешивания, то, учитывая предположение о симметричности $f(x)$, имеем

$$s=\int_0^L\tau\,[x]\,f(x)\,dx=\tau\sum_{i=1}^{2r}(i-1)\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,dx=\tau\,\frac{2^r-1}{2}. \tag{7}$$

---

* А. Я. Хинчин. Работы по математической теории массового обслуживания. М., Физматгиз, 1963.

В этом случае (1) с учетом (2), (5) и (7) имеет вид

$$M = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (m-k)\, C_m^k (\lambda\tau)^k \left(\frac{2^r-1}{2}\right)^k}{\sum_{k=0}^{n} (m-k)\, C_m^k (\lambda\tau)^k \left(\frac{2^r-1}{2}\right)^k} \frac{L}{2\cdot 2^r} + \frac{(m-n)\, C_m^n (\lambda\tau)^n \left(\frac{2^r-1}{2}\right)^n}{\sum_{k=0}^{n} (m-k)\, C_m^k (\lambda\tau)^k \left(\frac{2^r-1}{2}\right)^k} L c. \tag{8}$$

Нетрудно убедиться в том, что M, как функция аргумента r, имеет единственный минимум, поэтому можно непосредственно из выражений (6) и (8) определить оптимальное значение r, дающее минимум среднего модуля погрешности измерения, полагая при этом r непрерывным. Однако в ряде случаев для упрощения вычисления оптимального r можно воспользоваться уравнениями, найденными дифференцированием (6) и (8) по r (полагая здесь r непрерывным) и приравниванием полученных выражений нулю.

Для приборов поразрядного и развертывающего уравновешивания оптимальное значение r находится соответственно из уравнений:

$$(c\cdot 2^r-1)(m-n)\, C_m^n (\lambda\tau)^n r^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)(m-k)\, C_m^k (\lambda\tau)^k r^k - \ln 2 \left[\sum_{k=0}^{n-1} (m-k)\, C_m^k (\lambda\tau)^k r^k\right]\left[\sum_{k=0}^{n} (m-k)\, C_m^k (\lambda\tau)^k r^k\right] = 0; \tag{9}$$

$$c(2^r-1)\, 2^r \left(\frac{2^r-1}{2}\right)^{n-1} (m-n)\, C_m^n (\lambda\tau)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{2} (m-k)\, C_m^k (\lambda\tau)^k \times \left(\frac{2^r-1}{2}\right)^k - \left[\sum_{k=0}^{n-1} (m-k)\, C_m^k (\lambda\tau)^k \left(\frac{2^r-1}{2}\right)^k\right] \times \left[\sum_{k=0}^{n} (m-k)\, C_m^k (\lambda\tau)^k \left(\frac{2^r-1}{2}\right)^k\right] = 0. \tag{10}$$

Заметим также, что «улучшение» работы системы можно производить за счет увеличения числа n обслуживающих приборов; в частности, при $m=n$ вся погрешность измерения определяется погрешностью квантования. При одном обслуживающем приборе ($n=1$) уравнения (9) и (10) соответственно имеют вид ($m \geqslant 2$):

$$\begin{gathered} \lambda\tau (m-1)(c\, 2^r - 1) - \ln 2\, [1 + (m-1)\lambda\tau r] = 0; \\ 2^r (2^r-1)\, [c\lambda\tau (m-1)] + (m-1)\lambda\tau (2^r-1) - 2 = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Из последнего уравнения получаем

$$r = \frac{\ln\left[-\frac{1-c}{2c} + \sqrt{\left(\frac{1+c}{2c}\right)^2 + \frac{2}{c\lambda\tau(m-1)}}\right]}{\ln 2}. \tag{12}$$

После определения величины r из уравнений (9) — (12) необходимо взять целую часть найденного r и вычислить соответствующее значение M для $[r]$ и $[r]+1$; за оптимальное r нужно принять то из этих двух значений, которому соответствует наименьшее значение M.

логичны первоначальной постановке. Здесь также в качестве критерия оценки работы данной системы используем средний модуль погрешности измерения и все обозначения аналогичны ранее введенным.

Заметим, что для данной системы вероятность p отказа заявке в обслуживании, как нетрудно убедиться, равна вероятности $[n]$ состояния n. Согласно работе,* $p[n] = \frac{(\lambda s)^n}{n!}[0]$, где $[0] = \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda s)^k}{k!}\right\}^{-1}$. Полагаем $f(x)$ симметричной на $[0, L]$; тогда

$$M = M_x(1 - [n]) + M_a[n] = \frac{L}{2 \cdot 2^r}\left[1 + \frac{2c \cdot 2^r - 1}{n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(\lambda s)^{n-k} k!}}\right].$$

Для приборов поразрядного уравновешивания

$$M = \frac{L}{2 \cdot 2^r}\left[1 + \frac{2c \cdot 2^r - 1}{n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k! (\lambda \tau)^{n-k} r^{n-k}}}\right]. \qquad (13)$$

Для приборов развертывающего уравновешивания

$$M = \frac{L}{2 \cdot 2^r}\left[1 + \frac{2c \cdot 2^r - 1}{n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k! (\lambda \tau)^{n-k}}\left(\frac{2}{2^r - 1}\right)^{n-k}}\right]. \qquad (14)$$

Относительно (13) и (14) имеет место замечание, сделанное для (6) и (8). Оптимальное значение r, дающее минимум среднего модуля погрешности измерения, для приборов поразрядного и развертывающего уравновешивания, находится соответственно из уравнений:

$$(2c \cdot 2^r - 1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k) r^{k-n-1}}{k! (\lambda \tau)^{n-k}} -$$

$$- \ln 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{k-n}}{k! (\lambda \tau)^{n-k}} \left(n! \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{k-n}}{k! (\lambda \tau)^{n-k}} - 1\right) = 0; \qquad (15)$$

* См. указ. соч.

$$2\left[1-n!\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^r-1}{2}\right)^{k-n}\frac{1}{k!\,(\lambda\tau)^{n-k}}\right]\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^r-1}{2}\right)^{k-n}\frac{1}{k!\,(\lambda\tau)^{n-k}}+$$

$$+2^r(2c\cdot 2^r-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{k!\,(\lambda\tau)^{n-k}}\left(\frac{2^r-1}{2}\right)^{k-n-1}=0. \qquad (16)$$

В частности, когда $n=1$, из (15) и (16) оптимальное значение r для приборов поразрядного и развертывающего уравновешивания находим соответственно из уравнений:

$$2^r-r\frac{\ln 2}{2c}-\frac{\lambda\tau+\ln 2}{2c\lambda\tau}=0; \qquad (17)$$

$$r=\frac{\ln\left[\frac{1}{2c}+\sqrt{\frac{\lambda\tau-2c\lambda\tau+4c}{4c^2\lambda\tau}}\right]}{\ln 2}. \qquad (18)$$

Для (15)—(18) справедливо замечание, сделанное относительно (9)—(12).

Таким образом, в работе получены аналитические выражения, позволяющие при заданных характеристиках потока заявок на измерение параметров некоторой системы и распределении этих параметров определять оптимальное число разрядов цифровых приборов; причем некоторые из этих выражений [(12) и (18)] позволяют непосредственно находить оптимальное число разрядов, другие же [(6), (8)—(11) и (13)—(17)] могут быть разрешены относительно числа разрядов либо графоаналитическим методом, либо с помощью ЭВМ.

Поступила в редакцию
28 января 1970 г.,
окончательный вариант —
19 февраля 1970 г.