АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1970

УДК 621.317.08+519.281

Б. М. ПУШНОЙ, Г. П. ЧЕЙДО
*(Новосибирск)*

# МЕТОД ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СТРУКТУРНОЙ ИЗБЫТОЧНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ОБРАБОТКЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ С СИСТЕМАТИЧЕСКИМИ ПОГРЕШНОСТЯМИ

Линейные статистические методы, например метод максимального правдоподобия, позволяют существенно снизить содержание случайной погрешности в результатах измерения, если измеряемый процесс описывается небольшим количеством параметров. В процессе поверки, когда измеряемая функция известна с точностью, существенно превышающей ожидаемую точность измерительной системы, можно выявить систематические погрешности, если они также могут быть выражены аналитически через ограниченную совокупность параметров. Наиболее распространенный компенсационный метод устранения систематических погрешностей путем обработки экспериментальных данных основывается на предположении, что полученные при поверке значения параметров систематических погрешностей не изменяются (или изменяются по заранее известному закону) при переходе системы из режима поверки в режим измерения. В некоторых особых случаях, например, когда измеряемый процесс и систематические погрешности имеют независимые аналитические описания, удается определить параметры погрешности и параметры измеряемого процесса непосредственно по экспериментальным данным без привлечения результатов поверки.

На практике измерительные системы часто работают в таких условиях, когда по тем или иным причинам: а) невозможно задать аналитическое выражение измеряемого процесса; б) невозможно ввести в систему поверочный сигнал, заданный с точностью, превышающей точность системы; в) нельзя задать аналитическое выражение систематической погрешности или нет возможности получить оценки ее параметров, или, если даже оценки параметров получены, нет уверенности в том, что они сохраняются при переходе системы в режим измерения; г) невозможно осуществить эксперимент таким образом, чтобы на вход системы поступал много раз хотя и неизвестный априори, но повторяющийся в неизменном виде сигнал. Иными словами, осреднение результатов в их обычном виде неприменимо.

Ясно, что в таких условиях обычные методы анализа систематических погрешностей непригодны. Требуется существенно иной подход. В качестве одного из них в настоящей работе рассматривается использование структурной избыточности измерительной системы.

Структурная избыточность системы здесь определяется следующим образом. Сложный процесс, подлежащий исследованию на интервале времени $[T_0, T]$, может быть охарактеризован в общем случае значительным количеством функций $\Theta_i(t)$. Обычно требуется исследовать какое-то определенное свойство процесса, и экспериментатор выбирает ограниченную совокупность $k$ доступных непосредственному измерению функций $\Theta_i(t)$, выражающих только это свойство. Среди $k$ функций $\Theta_i(t)$ можно найти минимальное количество $q \leqslant k$ функций, которые характерны тем, что ни одна из них не может быть выражена через другие. Система, измеряющая $q$ функций, не имеет структурной избыточности. Избыточная система измеряет $k>q$ функций.

Предполагается, что априорные сведения о структуре исследуемого процесса и структуре измерительной системы позволяют найти $r=k-q$ независимых уравнений связи (называемых в дальнейшем контрольными условиями), которым удовлетворяют измеряемые избыточной системой функции $\Theta_i(t)$:

$$F_j[\Theta_1(t), \ldots, \Theta_k(t)] = 0; \; j = \overline{1, r}. \tag{1}$$

Эти уравнения выражают требование согласованности значений всех измеряемых функций и выполняются только при отсутствии погрешностей. При подстановке в (1) результатов измерений

$$l_i(t) = \Theta_i(t) + x_i(t); \; i = \overline{1, k},$$

содержащих погрешности $x_i(t)$, контрольные условия нарушаются:

$$F_j[l_1(t), \ldots, l_k(t)] = v_j(t); \; j = \overline{1, r}. \tag{2}$$

Возникшие в правых частях функции $v_j(t)$ можно рассматривать как невязки измерений. Допуская разложимость контрольных условий в ряд Тейлора и выполняя разложение в окрестностях точек $[\Theta_1(t), \ldots, \Theta_k(t)]$, с учетом (1) имеем

$$v_j(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F_j}{\partial \Theta_i} x_i(t) + \ldots \tag{3}$$

Обычно на практике погрешности существенно меньше сигнала, что позволяет пренебречь в (3) членами порядка выше первого. Тогда

$$v_j(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F_j[\Theta_1(t), \ldots, \Theta_k(t)]}{\partial \Theta_i} x_i(t) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i^{(j)}(t)\, x_i(t). \tag{4}$$

Функции $\varphi_i^j(t)$ — частные производные контрольных условий по измеряемым функциям $\Theta_i(t)$, относящиеся к текущему моменту времени $t$; они являются «весами», с которыми погрешности участвуют в образовании невязок. Невязки $v_j(t)$ и функции $\varphi_i^{(j)}(t)$ при заданных $F_j$ вычисляются по результатам измерений. Заметим, что в отличие от обычного разложения Тейлора здесь частные производные вычисляются не в точках разложения $[\Theta_1(t), \ldots, \Theta_k(t)]$, а в близких к ним точках $[\Theta_1(t) + x_1(t), \ldots, \Theta_k(t) + x_k(t)]$. Возникающие вследствие этого ошибки имеют величину одного порядка малости с отбрасываемыми членами в разложении (3), и мы пренебрегаем ими на тех же основаниях.

Таким образом, благодаря использованию структурной избыточности удается сигнал и погрешность полностью разделить и получить взвешенные суммы погрешностей — невязки (4). Каждая невязка $v_j(t)$ содержит информацию о погрешностях измерений всех функций $\Theta_i(t)$, охваченных $j$-м контрольным условием. Задача заключается в получении из этой совокупной информации сведений о систематической погрешности каждой измеряемой функции. Путь решения этой задачи мы проследим вначале для случая минимальной избыточности $(r=1)$, затем обобщим на случай произвольного $r>1$.

Примем следующую модель погрешностей:

$$x_i(t) = \sum_{p=1}^{m} a_i^{(p)} z_i^{(p)}(t) + \xi_i(t) = c_i(t) + \xi_i(t);\; i = \overline{1, k}, \tag{5}$$

где $a_i^{(p)}$ — неизвестные неслучайные числовые параметры, подлежащие определению; $z_i^p(t)$ — известные линейно независимые функции; $\xi_i(t)$ — случайная погрешность измерений, нормальный стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием.

Линейная форма $c_i(t) = \sum a_i^{(p)} z_i^{(p)}(t)$ представляет собой систематическую составляющую погрешностей. Требуется оценить параметры $a_i^{(p)}$ систематических погрешностей. Оценивание нельзя произвести обычным способом, так как не представляется возможным получить в явном виде реализации $x_i(t)$. Однако оценивание параметров $a_i^{(p)}$ можно осуществить, используя невязку $v(t)$. Подставив (5) в выражение невязки (4), получим

$$v(t) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(t) \sum_{p=1}^{m} a_i^{(p)} z_i^{(p)}(t) + \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(t)\, \xi_i(t), \tag{4a}$$

что для случая дискретных измерений $(t=1, 2, \ldots, n)$ можно переписать в матричной форме

$$V = \sum_{i=1}^{k} \Phi_i X_i = \sum_{i=1}^{k} \Phi_i Z_i A_i + \sum_{i=1}^{k} \Phi_i \Xi_i. \tag{6}$$

Здесь $V$ — $n$-мерный вектор невязок; $X_i$ — $n$-мерный вектор суммарных погрешностей; $A_i$ — $m$-мерный вектор параметров систематической погрешности измерения функции $\Theta_i(t)$; $\Xi_i$ — $n$-мерный вектор случайных погрешностей; $Z_i$ — матрица аналитического описания систематической погрешности:

$$Z_i = \begin{Vmatrix} z_i^{(1)}(1) & z_i^{(2)}(1) & \ldots & z_i^{(m)}(1) \\ z_i^{(1)}(2) & z_i^{(2)}(2) & \ldots & z_i^{(m)}(2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_i^{(1)}(n) & z_i^{(2)}(n) & \ldots & z_i^{(m)}(n) \end{Vmatrix};$$

$\Phi_i$ — диагональная матрица размерности $n\times n$, элементы которой — значения функции $\varphi_i(t)$ в последовательные моменты времени:

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \varphi_i(1) & & & \\ & \varphi_i(2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi_i(n) \end{pmatrix}.$$

Вводя составные векторы

$$A=A_{km,1}=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_k \end{pmatrix}, \quad \Xi=\Xi_{kn,1}=\begin{pmatrix} \Xi_1 \\ \Xi_2 \\ \dots \\ \Xi_k \end{pmatrix}$$

и блочные матрицы

$$\Phi=\Phi_{n,kn}=(\Phi_1\ \Phi_2\ \dots\ \Phi_k),$$

$$Z=Z_{kn,km}=\begin{pmatrix} Z_1 & & & \\ & Z_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Z_k \end{pmatrix},$$

вектор невязок $V$ можно представить в виде

$$V=\Phi ZA+\Phi\Xi. \tag{7}$$

Корреляционная матрица вектора $V$

$$B_V=\Phi B_\Xi \Phi^T. \tag{8}$$

Здесь $B_\Xi$ — корреляционная матрица совокупного вектора случайных погрешностей $\Xi$. Составив функцию правдоподобия вектора $V$ и используя принцип максимума правдоподобия, из (7) получаем оценку вектора $A$ параметров систематических погрешностей [1]

$$\tilde{A}_{\text{м.п}}=[Z^T\Phi^T(\Phi B_\Xi\Phi^T)^{-1}\Phi Z]^{-1}Z^T\Phi^T(\Phi B_\Xi\Phi^T)^{-1}V. \tag{9}$$

Корреляционная матрица ошибок вектора оценок

$$B_{\tilde{A}_{\text{м.п}}}=[Z^T\Phi^T(\Phi B_\Xi\Phi^T)^{-1}\Phi Z]^{-1}.$$

В общем случае учет корреляции вектора $V$ в (9) сильно усложняет алгоритм оценивания. Кроме того, корреляционные связи погрешностей, как правило, бывают слабо изученными и корреляционная матрица неизвестна. В силу этого часто при заведомо коррелированных погрешностях применяют метод наименьших квадратов, который дает оценки, по эффективности мало уступающие оценкам метода максимального правдоподобия [2]. Пренебрегая корреляцией, т. е. считая $B_V=\sigma^2 I$, получаем оценку вектора $A$ по методу наименьших квадратов

$$\tilde{A}_{\text{н.к}}=(Z^T\Phi^T\Phi Z)^{-1}Z^T\Phi^T V; \tag{10}$$

корреляционная матрица ошибок этой оценки

$$B_{\tilde{A}_{\text{н.к}}}=(Z^T\Phi^T\Phi Z)^{-1}Z^T\Phi^T\Phi B_\Xi\Phi^T\Phi Z(Z^T\Phi^T\Phi Z)^{-1}.$$

В нашей задаче имеется возможность использовать еще один алгоритм оценивания, а именно: в корреляционной матрице (8) вектора $V$ можно игнорировать корреляционные связи вектора $\Xi$, но учесть весовые матрицы $\Phi$, т. е. рассматривать матрицу $B_V=\sigma^2\Phi\Phi^T$. Приходим, таким образом, к оценке

$$\tilde{A}=[Z^T\Phi^T(\Phi\Phi^T)^{-1}\Phi Z]^{-1}Z^T\Phi^T(\Phi\Phi^T)^{-1}V, \tag{11}$$

корреляционная матрица которой

$$B_{\tilde{A}} = [Z^T \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} \Phi Z]^{-1} Z^T \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} \times$$

$$\times \Phi B_\Xi \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} \Phi Z [Z^T \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} \Phi Z]^{-1}.$$

Эта оценка является эффективной, если вектор $\Xi$ не коррелирован и ее точность заведомо выше точности оценки наименьших квадратов (10). При наличии корреляции алгоритм (11), естественно, дает менее точные оценки, чем оценки (9) по методу максимального правдоподобия. Однако и в этом случае можно показать, что точность оценок (11) будет по-прежнему выше точности оценок по методу наименьших квадратов, т. е. алгоритм (11) имеет преимущества перед методом наименьших квадратов в смысле точности оценок, причем в практической реализации алгоритм (11) лишь незначительно сложнее метода наименьших квадратов. Дополнительные операции сводятся к простому вычислению диагональной матрицы $\Phi\Phi^T$ и обращению ее.

Алгоритм (11), кроме более высокой точности, имеет еще одно преимущество перед методом наименьших квадратов. Это преимущество связано с наличием в системе структурной избыточности и сводится к независимости оценок (11) от преобразований контрольных условий. Рассмотрим более подробно эту особенность алгоритма (11).

Благодаря избыточности мы налагаем на результаты измерений контрольные условия. Эти условия отражают связи между измеряемыми функциями, присущие самой системе. Число контрольных условий, очевидно, равно числу избыточных измеряемых функций. Однако форма записи их может быть различной.

Рассмотрим снова систему с минимальной структурной избыточностью, которая характеризуется одним контрольным условием

$$F_0 [\Theta_1 (t), \ldots, \Theta_k (t)] = 0. \tag{12}$$

При наличии погрешностей измерений получаем невязку

$$v_0 = F_0 [l_1 (t), \ldots, l_k (t)].$$

Невязку всегда можно представить как разность двух величин

$$v_0 = F_0 [l_1 (t), \ldots, l_k (t)] = \beta_1 (l_1, \ldots, l_k) - \beta_2 (l_1, \ldots, l_k). \tag{13}$$

Если погрешности отсутствуют, эти величины равны, что дает $v_0 = 0$. Очевидно, что любые трансформации (13) вида

$$F_\nu (l_1, \ldots, l_k) = f_\nu (\beta_1) - f_\nu (\beta_2) \tag{14}$$

или

$$F_\nu (l_1, \ldots, l_k) = f_\nu (\beta_1 - \beta_2) \tag{14a}$$

могут использоваться в качестве контрольных условий. (Заметим, что при использовании трансформации (14а) естественным ограничением является требование $f_\nu (0) = 0$.) Число возможных преобразований (14) и (14а) неограниченно. Возникает вопрос, к каким изменениям оценок приводит переход от контрольной функции $F_0$ к $F_\nu$.

Из выражения (7) видно, что изменение невязки при трансформации контрольного условия может происходить единственным образом — через изменения матрицы частных производных $\Phi$. Следовательно, можно ожидать, что алгоритмы оценивания, учитывающие влияние матрицы $\Phi$ [т. е. алгоритмы (9) и (11)] дадут оценки систематических погрешностей, инвариантные к преобразованиям контрольных условий. Докажем это.

Определим частные производные по измеряемым функциям исходного контрольного условия (12):

$$\varphi_0^{(j)}(t) = \frac{\partial F_0}{\partial \theta_j} = \frac{\partial \beta_1(t)}{\partial \theta_j} - \frac{\partial \beta_2(t)}{\partial \theta_j}.$$

Соответствующие частные производные контрольной функции, преобразованной к виду (14) и (14а), выражаются так:

$$\varphi_\nu^{(j)}(t) = \frac{\partial F_\nu}{\partial \theta_j} = \varphi_0^{(j)}(t)\,\frac{df_\nu\,[\beta_{1,2}(t)]}{d\,\beta_{1,2}(t)};\quad \varphi_\nu^{(j)}(t) = \varphi_0^{(j)}(t)\,\frac{df_\nu\,[\beta_1(t) - \beta_2(t)]}{d\,[\beta_1(t) - \beta_2(t)]}.$$

Таким образом, преобразование контрольной функции приводит к тому, что все частные производные $\varphi_0^{(j)}(t)$ исходной контрольной функции умножаются на одну и ту же функцию:

$$p_\nu(t) = \begin{cases} \dfrac{df_\nu\,[\beta_{1,2}(t)]}{d\,\beta_{1,2}(t)} & \text{при преобразовании} \qquad (14); \\[2ex] \dfrac{df_\nu\,[\beta_1(t) - \beta_2(t)]}{d\,[\beta_1(t) - \beta_2(t)]} & \text{при преобразовании} \qquad (14а). \end{cases}$$

В матричных выражениях это учитывается умножением матрицы $\Phi$ слева на диагональную матрицу

$$P = P_{n,n} = \begin{vmatrix} p_\nu(1) & & & \\ & p_\nu(2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_\nu(n) \end{vmatrix},$$

которая содержит значения функции $P_\nu(t)$ в соответствующие моменты времени. Произведя замену $\Phi$ на $P\Phi$ в (7), имеем $V_\nu = P\,V$, где $V_\nu$ — вектор невязок нового контрольного условия; $V$ — вектор невязок исходного контрольного условия $F_0$. С учетом этих преобразований получаем следующие выражения для оценок:

$$\widetilde{A}_{\text{м.п}} = (Z^T \Phi^T P\,(P\Phi B_\Xi \Phi^T P)^{-1} P\Phi Z)^{-1} Z^T \Phi^T P\,(P\Phi B_\Xi \Phi^T P)^{-1} P\,V; \quad (9а)$$

$$\widetilde{A}_{\text{н.к}} = (Z^T \Phi^T P P \Phi Z)^{-1} Z^T \Phi^T P P\,V. \quad (10а)$$

$$\widetilde{A} = (Z^T \Phi^T P\,(P\Phi \Phi^T P)^{-1} P\Phi Z)^{-1} Z^T \Phi^T P\,(P\Phi\Phi^T P)^{-1} P\,V; \quad (11а)$$

В выражениях (9а) и (11а) $P$, $\Phi B_\Xi \Phi^T$ и $\Phi\Phi^T$ — квадратные невырожденные матрицы; это позволяет сделать следующие преобразования:

$$(P\Phi B_\Xi \Phi^T P)^{-1} = P^{-1}\,(\Phi B_\Xi \Phi^T)^{-1} P^{-1},\quad (P\Phi\Phi^T P)^{-1} = P^{-1}\,(\Phi\Phi^T)^{-1} P^{-1},$$

после чего, учитывая очевидное равенство $PP^{-1}=P^{-1}P=I$, видим, что (9а) и (11а) совпадают с (9) и (11) соответственно. Тем самым доказана инвариантность оценок (9) и (11) к преобразованиям контрольного условия. Из (10а) легко видеть, что оценки метода наименьших квадратов таким свойством не обладают.

Распространим теперь метод оценивания систематических погрешностей на случай системы с произвольной избыточностью ($r>1$). В такой системе $r$ контрольных условий позволяют получить $r$ векторов невязок:

$$V_j = F_j\,[l_1(t), \ldots, l_k(t)];\ j = \overline{1, r};\ t = \overline{1, n}.$$

Одна и та же измеряемая функция может охватываться несколькими контрольными условиями. Анализируя в отдельности каждый вектор невязок, получающийся в результате применения этих контрольных условий, можно получить несколько оценок систематических погрешностей данной измеряемой функции. Причем в общем случае эти оценки могут различаться. Для получения согласующихся оценок следует рассматривать совместную функцию правдоподобия всех векторов невязок. С этой целью введем совокупный $rn$-мерный вектор невязок

$$V^* = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_r \end{pmatrix}.$$

Аналогично выражению (7) для вектора невязок системы с минимальной избыточностью можно записать выражение

$$V^* = \Phi^* Z A + \Phi^* \Xi. \tag{15}$$

Здесь $km$-мерный вектор $A$ параметров систематических погрешностей совокупный $kn$-мерный вектор $\Xi$ случайных погрешностей измерений и матрица $Z_{kn,\ km}$ аналитического описания систематических погрешностей имеют прежний смысл; матрица $\Phi^*$ имеет следующую структуру:

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} \Phi^{(1)} \\ \dots \\ \Phi^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(1)} & \Phi_2^{(1)} & \dots & \Phi_k^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_1^{(2)} & \Phi_2^{(2)} & \dots & \Phi_k^{(r)} \end{pmatrix},$$

где $\Phi_i^{(j)}$ $(i = \overline{1,\ k},\ j = \overline{1,\ r})$ — матрица частных производных $j$-го контрольного условия по $i$-й измеряемой функции.

Записав совместную функцию правдоподобия вектора (15) и применив принцип максимального правдоподобия, получим оценку вектора $A$

$$\tilde{A}^*_{\text{м.п}} = [Z^T \Phi^{*T} (\Phi^* B_\Xi \Phi^{*T})^{-1} \Phi^* Z]^{-1} Z^T \Phi^{*T} (\Phi^* B_\Xi \Phi^{*T})^{-1} V^*, \tag{9б}$$

которая по форме совпадает с оценкой (9) для системы с минимальной избыточностью. Выражения для оценки по алгоритму (11) и по методу наименьших квадратов (10) совпадают с (11) и (10) соответственно; следует лишь помнить о различии векторов $V$ и $V^*$ и матриц $\Phi$ и $\Phi^*$. Легко убедиться, что и здесь оценки, получаемые по алгоритму (11) и по методу максимального правдоподобия, инвариантны к преобразованиям контрольных условий. Действительно, в данном случае переход к новым контрольным условиям приводит к умножению $\Phi^*$ слева на матрицу

$$P^* = \begin{pmatrix} P^{(1)} & & & \\ & P^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & P^{(r)} \end{pmatrix},$$

которая по-прежнему диагональна. Следовательно, здесь справедливы выводы, полученные для системы с минимальной избыточностью.

Для разрешимости задачи определения систематических погрешностей рассмотренным методом, как следует из (9)—(11), необходима невырожденность матрицы $Z^T \Phi^{*T} \Phi^* Z$, что имеет место при отличии от нуля ее определителя. Строки матрицы $Z^T \Phi^{*T}$ представляют собой функции

$$\varphi_i^{(j)}(t)\, z_i^{(p)}(t) \quad (i = \overline{1,\ k};\ j = \overline{1, r};\ p = \overline{1,\ m}), \tag{16}$$

заданные на дискретном множестве точек $\{t\} = \overline{1,\ n}$. Таким образом, определитель матрицы $Z^T \Phi^{*T} \Phi^* Z$ есть определитель Грама системы функций (16). Как известно, определитель Грама отличен от нуля, если функции (16) линейно независимы на $\{t\} = \overline{1,\ n}$. Это условие является необходимым и достаточным для разрешимости задачи оценивания систематических погрешностей. Оно налагает некоторые требования на тип связей между измеряемыми функциями. Оказывается, не всякая избыточность позволяет достигнуть цели.

Выясним, каким требованиям должны удовлетворять контрольные условия для получения линейной независимой системы функций (16). Ограничимся для простоты рассмотрением системы с минимальной избыточностью, в которой требуется оценить постоянные составляющие систематических погрешностей. Здесь функции описания погрешностей $z^{(p)}(t) = 1$ и система (16) состоит из частных производных $\varphi_i(t)$ $(i = \overline{1, k})$ в чистом виде. Линейная зависимость их означает, что линейная форма

$$\alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) + \ldots + \alpha_k \varphi_k(t)$$

обращается в нуль при $\alpha_i$ $(i = \overline{1,k})$, не равных нулю одновременно. Приходим к уравнению $k$—1 независимой переменной

$$\alpha_1 \frac{\partial F}{\partial \Theta_1} + \alpha_2 \frac{\partial F}{\partial \Theta_2} + \ldots + \alpha_k \frac{\partial F}{\partial \Theta_k} = 0. \tag{17}$$

Уравнение (17) сводится к системе $k$—1 обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Theta_1}{\alpha_1} = \frac{d\Theta_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{d\Theta_k}{\alpha_k}.$$

Решением этой системы является

$$F\left(\frac{\alpha_k \Theta_1 - \alpha_1 \Theta_k}{\alpha_1 \alpha_k}, \ldots, \frac{\alpha_k \Theta_{k-1} - \alpha_{k-1} \Theta_k}{\alpha_{k-1} \alpha_k}\right),$$

где $F(x,\ y,\ldots, z)$ — произвольная функция своих аргументов. Таким образом, получаем результат в следующей отрицательной форме: для разрешимости задачи необходима такая структура измерительного комплекса, чтобы контрольное условие не приводилось к виду

$$F = \left(\frac{\alpha_k \Theta_1 - \alpha_1 \Theta_k}{\alpha_1 \alpha_k}, \ldots, \frac{\alpha_k \Theta_{k-1} - \alpha_{k-1} \Theta_k}{\alpha_{k-1} \alpha_k}\right) = 0, \tag{18}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — произвольные постоянные. Этот результат легко обобщается на случай произвольной избыточности — для каждого контрольного условия получается независимое уравнение (17). Проиллюстрируем полученный результат примерами.

Пример 1. Измерительная система состоит из двух однотипных датчиков, измеряющих функцию $\Theta(t)$. Оба датчика осуществляют одно и то же преобразование $\Phi(\Theta(t))$. Получаем два измерительных сигнала:

$$l_1(t) = k_1 \Phi(\Theta(t)) + x_1(t);\ l_2(t) = k_2 \Phi(\Theta(t)) + x_2(t).$$

Простейшим контрольным условием для этого случая является

$$F(l_1, l_2) = l_1(t) - \frac{k_1}{k_2} l_2(t) = 0.$$

что представляет собой частный случай (18) при $k=2$; $\alpha_1 = \frac{k_1}{k_2}$; $\alpha_2 = 1$. Следовательно, в такой системе нельзя оценить систематические погрешности; это видно и непосредственно из того, что частные производные $F$ по измеряемым величинам пропорциональны друг другу и, значит, линейно зависимы. То же происходит при любом числе однотипных приборов, измеряющих один сигнал $\Theta(t)$.

Пример 2. Пусть для измерения той же функции $\Theta(t)$ используются два различных датчика:

а) линейный, на выходе которого имеем $l_1(t) = k_1\Theta(t) + x_1(t)$;

б) квадратичный, с выходным сигналом $l_2(t) = k_2\Theta^2(t) + x_2(t)$.

Контрольное условие

$$F(l_1, l_2) = \left(\frac{l_1}{k_1}\right)^2 - \frac{l_2}{k_2} = 0$$

не приводится к виду (18), и в такой системе задача определения систематических погрешностей разрешима. Действительно, здесь частные производные контрольного уравнения по измеряемым функциям

$$\varphi_1 = \frac{2l_1}{k_1}, \quad \varphi_2 = -\frac{1}{k_2}$$

линейно независимы, если на интервале наблюдения измеряемая величина $\Theta(t) \neq \text{const}$.

Дадим величинам конкретные значения. Пусть $\Theta(t) = 2t$, $t \in [0,2]$, $k_1 = k_2 = 1$. Для простоты примем, что погрешности измерений — чисто систематические: $x_1(t) = c_1 = 0{,}001$; $x_2(t) = c_2 = -0{,}003$. Получаем невязку $v(t) = 0{,}004t + 0{,}003001$. Система нормальных уравнений для этой задачи

$$\begin{cases} c_1 \int\limits_0^2 \varphi_1(t)\varphi_1(t)\,dt + c_2 \int\limits_0^2 \varphi_1(t)\varphi_2(t)\,dt = \int\limits_0^2 v(t)\varphi_1(t)\,dt; \\ c_1 \int\limits_0^2 \varphi_2(t)\varphi_1(t)\,dt + c_2 \int\limits_0^2 \varphi_2(t)\varphi_2(t)\,dt = \int\limits_0^2 v(t)\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

при вычислениях с точностью до $10^{-6}$ принимает следующие значения: $42{,}698675\ c_1 - 8{,}004000\ c_2 = 0{,}066703$; $-8{,}004000\ c_1 + 2{,}000000\ c_2 = -0{,}014002$. Ее решение: $c_1 = 0{,}001000$; $c_2 = -0{,}002999$.

Подчеркнем еще раз, что неприводимость контрольного условия к виду (18) является необходимым условием разрешимости задачи, но оно не является достаточным. Необходимое и достаточное условие, как уже отмечалось, состоит в линейной независимости системы функций (16) на интервале (или в дискретном случае на множестве точек) наблюдения. Это налагает некоторые ограничения на измеряемый сигнал. В примере 2 таким ограничением было отличие от константы измеряемой функции на интервале наблюдения. Вообще точность оценок, получаемых рассматриваемым методом, зависит от характера сигнала, что следует иметь в виду при практическом использовании метода.

Остается сделать некоторые замечания. Изложенный способ получения оценок параметров систематической погрешности предназначен для использования при обработке результатов одиночного эксперимента, когда отсутствуют априорные сведения о характере сигнала и систематической погрешности, причем отсутствие априорных данных о систематической погрешности означает, что нам не известно, содержится ли вообще систематическая погрешность в результатах измерений и является ли она детерминированной функцией. Нетрудно видеть, что оценок $A$, полученных по результатам одиночного эксперимента, недостаточно для сколько-нибудь полного анализа систематических погрешностей измерительной системы, хотя эти оценки можно непосредственно использовать для внесения поправок в показания измерительных приборов, относящиеся к данному одиночному эксперименту. Однако если произвести серию экспериментов в одинаковых условиях над процессами, хотя и не тождественными, но достаточно однородными по своим количественным характеристикам, можно получить совокупность оценок $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$,... и подвергнуть их статистическому анализу. Он покажет, содержится ли в результатах измерений детерминированная систематическая погрешность. Сопоставление нескольких групп оценок, соответствующих сериям существенно различных экспериментов, позволит выяснить, как зависит систематическая погрешность от условий и содержания эксперимента.

Рассмотренные выше вопросы показывают, что недостаток априорных сведений об исследуемом процессе и погрешностях измерительной системы, затрудняющих обработку экспериментальных данных, может быть в заметной степени восполнен использованием структурной избыточности, вводимой искусственно в измерительную систему.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ю. В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
2. А. В. Брыков. Оценка влияния корреляции между измерениями на точность результатов обработки.— Искусственные спутники Земли, 1963, вып. 16.



*Поступила в редакцию*
*27 января 1970 г.*