АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 5 1970

# ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АВТОМЕТРИИ

УДК 681.2.082/083.519.2

И. В. СМЕРТИНЮК
*(Новосибирск)*

## ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА ЗАДАННОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

**Введение и постановка задачи.** Очень часто в практике измерений встречаются такие случаи, когда информация о группе интересующих нас параметров $\psi_1, \ldots, \psi_s$ содержится в сигнале $A(\psi_1, \ldots, \psi_s, \psi_{s+1}, \ldots, \psi_k, t)$, который зависит еще и от ряда других, мешающих параметров $\psi_{s+1}, \ldots, \psi_k$. Сигнал $A(\psi_1, \ldots, \psi_k, t)$ измеряется с аддитивными гауссовыми погрешностями, а $\psi_1, \ldots, \psi_k$ являются неизвестными постоянными с заданными конечными границами их возможных значений.

Измеряемый сигнал может иметь также вид $A(\psi_1, \ldots, \psi_l, \varphi(t))$, где $\varphi(t)$ — неизвестная функция. Если на основании анализа конкретной задачи допустимо представление

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k-l} \psi_{l+i}\, \alpha_i(t),$$

где $\alpha_i(t)$ — линейно независимые функции времени, то мы получаем прежнюю задачу с $k-s$ мешающими параметрами $\psi_{s+1}, \ldots, \psi_l, \psi_{l+1}, \ldots, \psi_k$.

Задача, близкая к этой, решалась в [1], а именно: там рассматривалась совокупность сигналов $\Theta_j(\psi_1, \ldots, \psi_k)\varphi_j(t)$ $(j=\overline{1, k})$, измеряемых с аддитивными гауссовыми погрешностями. Зависимости $\Theta_j(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ подчинялись требованиям, обычно выполняемым на практике, которые обеспечивали существование однозначных и дифференцируемых функций $\psi_i(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$. Искомая оценка $\hat{\psi}_i$ параметра $\psi_i$ являлась функцией достаточных статистик $T_1, \ldots, T_k$ для величин $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ и была оптимальной в классе несмещенных оценок по критерию минимума дисперсии.

Попытаемся применить указанный метод к нашему случаю. Для этого функцию $A(\psi_1, \ldots, \psi_k, t)$ представим на конечном интервале времени $(0, T)$ с заданной точностью в виде

$$A(\psi_1, \ldots, \psi_k, t) = \sum_{j=1}^{r} \Theta_j \varphi_j(t) \quad (r > k), \tag{1}$$

где $\Theta_j(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ — функции, зависящие от параметров $\psi_1, \ldots, \psi_k$; $\varphi_j(t)$ — линейно независимые функции времени

Разложение вида (1) можно получить, например, для дифференцируемой функции, аппроксимируя ее рядом Фурье, ортогональными полиномами Чебышева или Лагранжа на интервале $(0, T)$. В простейшем случае можно разложить функцию $A(\psi_1, \ldots, \psi_k, t)$ в ряд Тейлора в какой-либо точке интервала $(0, T)$.

Таким образом, у нас возникает следующая постановка задачи. Имеется квазистационарная случайная последовательность вида

$$x(t_i) = \sum_{j=1}^{r} \Theta_j \varphi_j(t_i) + \xi(t_i) \quad (i = \overline{1, n}), \tag{2}$$

где $\xi(t_i)$ — взаимно некоррелированные нормально распределенные центрированные случайные величины с дисперсией $\sigma_i^2$. Необходимо найти параметры $\psi_1, \ldots, \psi_s$ при наличии мешающих параметров $\psi_{s+1}, \ldots, \psi_k$. Мы будем заниматься определением параметра $\psi_1$, обозначаемого в дальнейшем $\psi$. Параметры $\psi_2, \ldots, \psi_s$ будут оцениваться совершенно аналогично.

К $\Theta_j(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ будем предъявлять те же требования, что и в [1], чтобы обеспечить существование однозначной функции $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ с непрерывными частными производными по $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$. Там же было показано, что в конкретных задачах эти требования обычно всегда выполняются. Здесь $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ — любые $k$ величин из совокупности $\Theta_1, \ldots, \Theta_r$, не связанные между собой функциональной зависимостью.

Если в (2) выполняется условие $r > k$, то выполняется еще ряд дополнительных условий:

$$\Pi_j(\Theta_1, \ldots, \Theta_r) = 0 \quad (j = \overline{1, r-k}). \tag{3}$$

Тогда задачу можно переформулировать следующим образом: требуется определить параметр $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ при наличии условий (3).

Будем предполагать, что функции $\psi_1(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ и $\Pi_j(\Theta_1, \ldots, \Theta_r)$ являются полиномами относительно своих переменных. Это предположение не приводит к потере общности. Действительно, любую непрерывную функцию можно аппроксимировать в ограниченной области полиномом конечной степени с любой точностью. Конечность же границ допустимых значений параметров $\psi, \ldots, \psi_k$ и значений самой функции $A(\psi_1, \ldots, \psi_k, t)$ дает возможность ограничиться рассмотрением конечной области $D$ относительно $\Theta_1, \ldots, \Theta_r$.

**Путь решения.** Пользуясь знанием вида функциональной зависимости $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$, будем искать несмещенную оценку $\hat{\psi}$ параметра $\psi$ в виде функции от достаточных статистик $T_1, \ldots, T_k$ для величин $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$.

В [1] было выведено простое соответствие между $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ и ее несмещенной оценкой $\hat{\psi}(T_1, \ldots, T_k)$. А именно, если функция $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ имела вид

$$\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) = \sum_{i=0}^{p} c_i \prod_{j=1}^{k} \Theta_j^{s(ij)}, \tag{4}$$

где $c_i$ — коэффициенты полинома, то сразу же можно было получить выражение для оценки параметра

$$\hat{\psi}(T_1, \ldots, T_k) = \sum_{i=0}^{p} c_i \prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{s(ij)} H_{s(ij)}(\lambda_j T_j), \tag{5}$$

где $H_{s(ij)}\ (\lambda_j T_j)$ — полином Эрмита порядка $s(ij)$ относительно $\lambda_j T_j$;

$$\lambda_j = \frac{1}{\sqrt{2D\{T_j\}}}. \tag{5а}$$

Оценки при $r=k$ являлись оптимальными по критерию минимума дисперсии в классе несмещенных оценок. При наличии же дополнительных условий вида (3) оптимальные оценки не всегда существуют. Необходимые и достаточные условия существования оптимальных оценок при наличии дополнительных условий были сформулированы в [2], а в [3] были предложены некоторые способы нахождения оптимальных оценок в случае их существования.

Однако соотношения (4), (5), как и результаты в [3], нельзя непосредственно применить к решению поставленной задачи, поскольку они были выведены в предположении статистической независимости достаточных статистик $T_1,\ldots T_k$, что, вообще говоря, не имеет места в нашем случае.

Чтобы убедиться в этом, построим семейство достаточных статистик $T_1,\ldots, T_r$ для величин $\Theta_1,\ldots,\Theta_r$. В случае нормальных распределений достаточные статистики $T_1,\ldots, T_r$, являющиеся функциями первоначально измеряемых величин $x(t_i)$ и сохраняющие всю информацию о $\Theta_1,\ldots,\Theta_r$, полученную в результате измерений, должны удовлетворять соотношению

$$f_\Theta(x) = g[\Theta_1,\ldots,\Theta_r;\ T_1(x),\ldots, T_r(x)]\,h(x), \tag{6}$$

где $f_\Theta(x)$ — плотность выборки $x(t_1),\ldots, x(t_k)$; $g[\Theta_1,\ldots,\Theta_r;\ T_1(x),\ldots$ $\ldots, T_r(x)]$ — функция, зависящая от $x(t_i)$ $(i=\overline{1,n})$ только через посредство $T_j(x)$ $(j=\overline{1,r})$; $h(x)$ — функция, не зависящая от $\Theta_1,\ldots,\Theta_r$.

Плотность выборки в нашем случае в соответствии с (2) запишем в виде

$$f_\Theta(x) = C\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[x(t_i)-\sum_{j=1}^{r}\Theta_j\varphi_j(t_i)\right]^2\sigma_i^{-2}\right\}, \tag{7}$$

где $C$ — нормирующий множитель. Сопоставление (6) и (7) показывает, что для достаточных статистик будут справедливы соотношения:

$$T_j(x) = \Phi_j^T \sum\nolimits^{-1} X \quad (j=\overline{1,r}); \tag{8}$$

где $\Phi_j = \{\varphi_j(t_i)\}$; $\Phi_j^T$ — вектор, транспонированный относительно вектора $\Phi_j$; $\Sigma$ — корреляционная матрица вектора $X; X=\{x(t_i)\}$ $(i=\overline{1,n})$.

Математическое ожидание и дисперсию $T_j$ запишем в виде [4]:

$$E\{T_j\} = \Phi_j^T\sum\nolimits^{-1}\Phi\,\Theta;\quad D\{T_j\} = \Phi_j^T\sum\nolimits^{-1}\Phi_j, \tag{9}$$

где $\Theta = \{\Theta_j\}$; $\Phi = \{\Phi_j^T\}$ $(j=\overline{1,k})$. Поскольку достаточные статистики $T_j$ являются функциями одного и того же вектора $X$, то они являются в общем случае коррелированными с корреляционной матрицей

$$B_T = \Phi^T\sum\nolimits^{-1}\Phi. \tag{10}$$

Чтобы все же получить некоррелированные статистики, рассмотрим преобразование

$$\tau = CT,$$

где $C$ — невырожденная матрица линейного преобразования размерности $k \times k$, которая переводит вектор $T$ в вектор $\tau$, имеющий статистически независимые компоненты $\tau_i$ с единичными дисперсиями. Вид и способ построения матрицы $C$ рассмотрим позже.

Математическое ожидание и дисперсия вектора $\tau$ с учетом (9) будут равны [4]:

$$E\{\tau\} = C\,\Phi^T \sum\nolimits^{-1} \Phi\,\Theta; \quad D\{\tau\} = C\,\Phi^T \sum\nolimits^{-1} \Phi\, C^T. \tag{11}$$

С другой стороны, из определения $C$ следует, что

$$D\{\tau\} = I, \tag{12}$$

где $I$ — единичная матрица. Тогда (11) с учетом (12) перепишем так:

$$E\{\tau\} = (C^T)^{-1}\,\Theta; \quad C^T C = (\Phi^T \sum\nolimits^{-1} \Phi)^{-1}. \tag{13}$$

Введя обозначение

$$\vartheta = (C^T)^{-1}\,\Theta, \tag{14}$$

получим вектор $\vartheta$, для которого вектор $\tau$ будет достаточной статистикой. Это переобозначение надо было произвести для того, чтобы каждая компонента $\tau_i$ вектора $\tau$ была достаточной статистикой для величины $\vartheta_i$, что также является необходимым условием справедливости соответствия соотношений вида (4) и (5) [1]. Подставляя в (4) значения $\Theta$ из (14)

$$\Theta = C^T\,\vartheta, \tag{15}$$

получим полином

$$\psi(\vartheta) = \sum_{i=0}^{p'} c_i' \prod_{j=1}^{k} \vartheta_j^{l(ij)}. \tag{16}$$

Оценка параметра $\psi$ с учетом (5) будет иметь выражение

$$\hat{\psi}(\tau_1, \ldots, \tau_k) = \sum_{i=0}^{p'} c_i' \prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{l(ij)} H_{l(ij)}(\lambda_j \tau_j), \tag{17}$$

где в соответствии с (13) и (5а)

$$\lambda_j = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Чтобы найти выражение для дисперсии оценки, представим $\hat{\psi}^2(\tau_1, \ldots, \tau_k)$, аналогично тому, как это делается в [1], в виде линейной комбинации полиномов Эрмита. Тогда математическое ожидание $\hat{\varphi}^2(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ в соответствии с (4) и (5) есть степенной полином $F(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)$.

Выражение для дисперсии оценки $\hat{\psi}(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ в таком случае будет иметь вид

$$D\{\hat{\psi}(\tau_1, \ldots, \tau_k)\} = \max_{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k \in D} [F(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k) - \psi^2(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)], \tag{18}$$

где $D$ — область возможных значений $\vartheta_i$ $(i = \overline{1, k})$ при заданных границах допустимых значений параметров $\psi_j$ $(j = \overline{1, k})$.

Таким образом, нам осталось только построить матрицу ортогонализации $C$, чем сейчас и займемся. Производя подстановку в (3) по формуле (15) и пользуясь достаточными статистиками $\tau = CT$, можно построить оптимальные оценки в соответствии с [3] при наличии дополнительных условий.

**Построение матрицы ортогонализации.** Для нахождения элементов матрицы $C$ рассмотрим $k$-мерное вероятностное пространство $H$, элементами которого являются нормально распределенные случайные векторы $T_i$ с конечной дисперсией. Скалярное произведение векторов $T_i$ и $T_j$ вводится по формуле

$$(T_i, T_j) = E\{T_i', T_j'\}, \tag{19}$$

где $T_i'$, $T_j'$ — случайные величины, полученные при центрировании $T_i$ и $T_j$ соответственно. Норма вектора $T_i$ определяется посредством равенства

$$\| T_i \| = \sqrt{D\{T_i\}}. \tag{20}$$

Составим в $H$ базис из $k$ случайных величин $T_1, \ldots, T_k$, обладающих невырожденной корреляционной матрицей $B$. В функциональном анализе существуют методы, позволяющие перейти от базиса с неортогональными в общем случае векторами $T_i$ к базису с ортонормированными элементами $\tau_i$, посредством линейного преобразования

$$\tau = CT, \tag{21}$$

где $\tau = \{\tau_i\}$; $C$ — матрица линейного преобразования; $T = \{T_i\}$. Сами векторы $T$ и $\tau$, естественно, уже не являются элементами пространства $H$. В рамках введенной в $H$ метрики преобразование (21) будет означать, что случайные величины $\tau_i$ будут некоррелированными и, поскольку закон распределения $\tau_i$ остается нормальным, статистически независимыми.

Перейдем к определению элементов матрицы $C$. Величины $\tau_i$ находим из следующих формул метода ортогонализации Шмидта [5]:

$$\tau_1 = \frac{T_1}{\| T_1 \|};$$

$$\tau_i = \frac{T_i - \sum_{s=1}^{i-1} (T_i, \tau_s)\,\tau_s}{\left\| T_i - \sum_{s=1}^{i-1} (T_i, \tau_s)\,\tau_s \right\|} \quad (i = \overline{2, k}). \tag{22}$$

После очевидных преобразований в (22) с учетом соотношений (19)—(21) элементы матрицы $C$ представим через ряд рекуррентных формул:

$$c_{11} = \frac{1}{\sqrt{b_{11}}}; \quad c_{km}' = -\sum_{i=m}^{k-1} c_{im} \sum_{s=1}^{i} b_{ks}\, c_{is} \quad (1 \leqslant m < k); \quad c_{kk}' = 1; \tag{23}$$

$$c_{k0} = \left[ \sum_{s,l=1}^{k} b_{sl}\, c_{ks}'\, c_{kl}' \right]^{\frac{1}{2}}; \quad c_{km} = \frac{c_{km}'}{c_{k0}} \quad (1 \leqslant m \leqslant k),$$

где $b_{ks}$ — элементы корреляционной матрицы $B$ первоначальных векторов $T_i$. Данный алгоритм удобен при реализации на ЭЦВМ, поскольку на каждом шаге здесь используются результаты вычислений, проведенных на предыдущем этапе, и, следовательно, сокращается машинное время, необходимое для расчетов. Однако данный метод обладает вследствие этого же свойства низкой точностью, особенно при больших $k$, поскольку ошибки, внесенные на первых этапах вычислений, сказываются на последующих этапах.

Более точным, хотя и требующим большего количества машинного времени, является способ, когда коэффициенты $c_{ik}$ отыскиваются в соответствии с формулой [5]

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{B_i B_{i-1}}} \begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{1i} \\ \dots\dots\dots \\ b_{i-11} \dots b_{i-1i} \\ T_1 \dots T_i \end{vmatrix},$$

где $b_{i,s}$ — элементы матрицы $B$; $B_{i-1}$, $B_i$ — ковариационные матрицы совокупностей $T_1, \dots, T_{i-1}$ и $T_1, \dots, T_i$ соответственно. Здесь $c_{is}$ — коэффициент при $T_s$.

**Асимпототические оценки.** Асимптотически оптимальные несмещенные оценки параметров определяются аналогично [1], где оценка $\hat{\psi}_a$ параметра $\psi$ получалась из выражения $\psi(\Theta_1, \dots \Theta_k)$, еще не аппроксимированного полиномами, подстановкой величин $2\lambda_i^2 T_i$ вместо $\Theta_i$.

Однако существуют и некоторые особенности, а именно: поскольку достаточные статистики в нашем случае, вообще говоря, коррелированы между собой, то нужно перейти к новым статистикам, уже взаимно независимым. На первый взгляд кажется, что можно использовать статистики $\tau_i$, полученные в предыдущем пункте. Но они не удовлетворяют второму необходимому условию существования асимптотических оценок: с увеличением объема измерений дисперсия $2\lambda_i^2 \tau_i$ не уменьшается.

Поэтому займемся построением таких некоррелированных достаточных статистик (их по-прежнему обозначаем $\tau_i$ $(i = \overline{1, k})$), для которых выполняется соотношение

$$D\{\tau_i\} = D\{T_i\} \quad (i = \overline{1, k}). \tag{24}$$

В соответствии с (5а) и (10) соотношение (24) обеспечивает сходимость $2\lambda_i^2 \tau_i$ по вероятности к $E\{2\lambda_i^2 \tau_i\}$ с увеличением объема измерений. Тогда, используя (23) и (24), будем иметь:

$$\tau = A\,T;\ \tau = \{\tau_i\};\ T = \{T_i\}\ (i = \overline{1, k});\ A\{a_{ij}\}\ (i, j = \overline{1, k});$$

$$a_{ij} = 0 \qquad (i < j);$$

$$a_{11} = 1;\ a'_{km} = -\sum_{i=m}^{k-1} a_{im} \sum_{s=1}^{i} (b_{ks}/b_{ss})\, a_{is}\ (1 \leqslant m < k);\ a'_{kk} = 1;$$

$$a_{k0} = \sqrt{\frac{b_{kk}}{\sum\limits_{s,l=1}^{k} b_{sl}\, a'_{ks}\, a'_{kl}}};\ a_{km} = a'_{km}\, a_{k0} \quad (1 \leqslant m \leqslant k). \tag{25}$$

В выражении $\psi(\Theta_1, \dots, \Theta_k)$, еще не аппроксимированном полиномами, с учетом (16) и (25) преобразуем $\Theta = A^T \vartheta$, а затем вместо $\vartheta_i$ $(i = \overline{1, k})$ подставим соответствующие величины $2\lambda_i^2 \tau_i$, где $\lambda_i$ определяются из (5а). Полученное в результате этих подстановок выражение является асимптотически оптимальной оценкой по критерию минимальной дисперсии в классе несмещенных оценок.

Преобразования (25) можно, разумеется, использовать для получения семейства некоррелированных статистик, приведенных во втором разделе. Однако рекуррентные формулы (23), в чем нетрудно убедиться из сравнения их с (25), получаются несколько проще, так же как и выражения для оценок.

Поскольку справедливо соотношение

$$\frac{\partial \psi(\vartheta)}{\partial \vartheta} = A \frac{\partial \psi(\Theta)}{\partial \Theta},$$

где $\frac{\partial \psi(\vartheta)}{\partial \vartheta} = \left\{\frac{\partial \psi(\vartheta)}{\partial \vartheta_i}\right\}$, $\frac{\partial \psi(\Theta)}{\partial \Theta} = \left\{\frac{\partial \psi(\Theta)}{\partial \Theta_i}\right\}$ $(i = \overline{1, k})$,

то выражение для дисперсии асимптотической оценки $\hat{\psi}_a(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ примет вид [1]

$$D\{\hat{\psi}_a(\tau_1, \ldots, \tau_k)\} = \left(\frac{\partial \psi(\Theta)}{\partial \Theta}\right)^T B^{-1} \left(\frac{\partial \psi(\Theta)}{\partial \Theta}\right). \tag{26}$$

Здесь $B$ — ковариационная матрица $T_i$ $(i = \overline{1, k})$. Условие справедливости (26) запишем следующим образом:

$$\max_{\vartheta_i, \Theta_i \in D} \frac{2\sum\limits_{i,j=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 \psi(\vartheta)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j}\right)^2 \lambda_i^2 \lambda_j^2 + \sum\limits_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi(\vartheta)}{\partial \vartheta_i^2} \frac{\partial^2 \psi(\vartheta)}{\partial \vartheta_j^2} \lambda_i^2 \lambda_j^2}{D\{\hat{\psi}_a(\tau_1, \ldots, \tau_k)\}} \leqslant \beta^2, \tag{27}$$

где $D$ — область максимального разброса $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ (соответственно $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$) при заданных конечных границах возможных значений $\psi_1, \ldots, \psi_k$; $\beta^2$ — допустимая относительная точность погрешности.

Выведем теперь формулу для смещения оценок $\hat{\psi}_a$. Для этого разложим функцию $\hat{\psi}_a(2\lambda_1^2\tau_1, \ldots, 2\lambda_k^2\tau_k)$ в точке $2\lambda_i^2\tau_i = \vartheta_i$ $(i = \overline{1, k})$ в ряд

$$\hat{\psi}_a = \psi(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta_j}(2\lambda_j^2\tau_j - \vartheta_j) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j}(2\lambda_i^2\tau_i - \vartheta_i)(2\lambda_j^2\tau_j - \vartheta_j) +$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{i,j,s=1}^{k} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j \partial \vartheta_s}(2\lambda_i^2\tau_i - \vartheta_i)(2\lambda_j^2\tau_j - \vartheta_j) \times$$

$$\times (2\lambda_s^2\tau_s - \vartheta_s) + \frac{1}{24} \sum_{i,j,s,l=1}^{k} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \vartheta_i' \partial \vartheta_j' \partial \vartheta_s' \partial \vartheta_l'} \times$$

$$\times (2\lambda_j^2\tau_j - \vartheta_j)(2\lambda_i^2\tau_i - \vartheta_i)(2\lambda_s^2\tau_s - \vartheta_s)(2\lambda_l^2\tau_l - \vartheta_l). \tag{27а}$$

Здесь четвертая производная берется в точке $(\vartheta_1', \ldots, \vartheta_k') \in D$, отличной в общем случае от точки $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k) \in D$. Взяв от обеих частей

(27а) математические ожидания, получим выражение для смещения оценки $\hat{\psi}_a$

$$S\{\hat{\psi}_a\} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta_j^2} \lambda_j^2, \tag{28}$$

которое справедливо при условии, аналогичном (27), только в числителе будет стоять функция $\frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{k} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \vartheta_i^2 \partial \vartheta_j^2} \lambda_i^2 \lambda_j^2$, а в знаменателе — величина смещения $S\{\hat{\psi}_a\}$.

**Пример.** Для электрического генератора постоянного тока справедливо уравнение [6]

$$u(t) = \frac{a}{T} + at, \tag{29}$$

где $u(t)$ — напряжение на клеммах генератора; $u$ — величина, пропорциональная угловому ускорению вала двигателя; $T$ — величина, обратная электромеханической постоянной времени.

Известны номинальные значения: $a_н = 10\, в/сек$; $T_н = 1\ ^1/сек$. Допустимый разброс от номинальных значений не более 5%. Производятся измерения выходного напряжения $u(t)$ с частотой съема $1/\tau = 10^5$ *гц* и среднеквадратичной ошибкой $\sigma = 0{,}04$ *в*. Погрешности измерений гауссовы и взаимно не коррелированы. Требуется определить величину $T$. Здесь параметр $a$ — мешающий. Перепишем (29) в виде $u(t) = \Theta_2 + \Theta_1 t$, где $\Theta_1 = a$; $\Theta_2 = \frac{a}{T}$. Тогда

$$T = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}. \tag{30}$$

С относительной погрешностью аппроксимации $\delta = 10^{-3}$ (30) можно представить

$$T = 0{,}1\, \Theta_1 (3 - 0{,}3\, \Theta_2 + 0{,}01\, \Theta_2^2).$$

Для достаточных статистик будут справедливы соотношения:

$$T_1 = \frac{10^{-5}}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} u(t_i)\, i; \quad T_2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} u(t_i),$$

где $n$ — число измерений. Здесь использовано равенство $t_i = i\,\tau$. Оценка $\hat{T}(T_1, T_2)$ имеет вид

$$\hat{T}(T_1, T_2) = 0{,}1\, c_{11} \lambda H_1(\lambda \tau_1)\ 3 - 0{,}3\, c_{22} \lambda H_1(\lambda \tau_2) +$$
$$+ 0{,}01\, c_{22}^2 \lambda^2 H_2(\lambda \tau_2) + 3\, c_{21} \lambda H_1(\lambda \tau_1) -$$
$$- 0{,}3\, c_{21} c_{22} \lambda^2 H_2(\lambda \tau_2) + 0{,}01\, c_{21} c_{22} \lambda^3 H_3(\lambda \tau_2),$$

где $\tau_1 = c_{11} T_1$; $\tau_2 = c_{21} T_1 + c_{22} T_2$; $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Дисперсия оценки $\hat{T}(T_1, T_2)$, вычисленная по формуле (18), представлена в таблице численными значениями величины

$$\sqrt{D'} = \frac{1}{T_н} \sqrt{D\{\hat{T}(T_1, T_2)\}}.$$

| $n$ | $10^4$ | $3\cdot10^4$ | $5\cdot10^4$ | $7\cdot10^4$ | $10^5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{D'}$ | $0{,}78\cdot10^{-3}$ | $0{,}16\cdot10^{-3}$ | $0{,}83\cdot10^{-4}$ | $0{,}59\cdot10^{-4}$ | $0{,}44\cdot10^{-4}$ |
| $\sqrt{D'_a}$ | $1{,}4\cdot10^{-3}$ | $0{,}29\cdot10^{-3}$ | $1{,}5\cdot10^{-4}$ | $10^{-4}$ | $0{,}67\cdot10^{-4}$ |

Асимптотически оптимальная оценка имеет вид

$$\hat{T}_a(T_1, T_2) = \frac{\left(\lambda_1^2 + a_{21}^2\lambda_2^2\right)T_1 + \lambda_2^2 a_{22} a_{21} T_2}{a_{22} a_{21}\lambda_2^2 T_1 + a_{22}^2\lambda_2^2 T_2},$$

где $a_{21} = -\frac{3}{\tau n}$; $a_{22}=2$; $\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}\,\sigma}{\tau\sqrt{n(n+1)(2n+1)}}$; $\lambda_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$, а ее дисперсия описывается выражением

$$D\{\hat{T}_a(T_1, T_2)\} = \frac{12\sigma^2 T^2}{\tau^2 n^3 a^2}\left(1 + T\tau + T^2\frac{\tau^2 n^2}{3}\right). \qquad (31)$$

В таблице представлены численные значения величины $\sqrt{D'_a} = \frac{1}{T_н}\times\sqrt{D\{\hat{T}_a(T_1, T_2)\}}$. Соотношение (31) выполняется при соблюдении условий: $n \gg 1$; $\delta^2 < 10^{-4}$.

## Заключение

Выражениями для оценок, полученными в данной работе, целесообразно пользоваться в тех случаях, когда сигнал на всем протяжении процесса измерения сохраняет один и тот же аналитический вид. Если же сигнал от измерения к измерению настолько существенно изменяется, что приходится каждый раз искать новое решение системы (3), то объем вычислений резко возрастает. В таких случаях следует переходить к другим методам оценивания параметров.

В случае, когда условия позволяют получать большие объемы измерений, использование асимптотически оптимальных оценок значительно сокращает время определения параметров при незначительном ухудшении их точности по сравнению с оптимальными несмещенными оценками.

Формально метод декорреляции достаточных статистик, рассмотренный здесь, можно было бы применить и для ортогонализации коррелированных измеряемых величин. Однако при большом объеме измерений это приводит к очень громоздким вычислениям. К тому же очень редко корреляционная матрица измеряемых величин известна с достаточной точностью.

При построении оценок параметров производилось приближение функции $\psi(\theta)$ полиномом (16). Чтобы рассуждения, используемые при получении выражений для оценок параметров, были корректными, необходимо проанализировать, как приближения, производимые в процессе решения задачи, сказываются на достоверности конечных результатов. Легко заметить, что в данной работе выражение $\hat{\psi}(\tau)$ является строго несмещенной оценкой полинома (16). Дисперсия полученной оценки полинома является минимальной в классе несмещенных оценок. В то же время $\hat{\psi}(\tau)$ является оценкой для $\psi(\theta)$ с допустимым смещением, равным точности аппроксимации $\psi(\theta)$ полиномом (16).

Таким образом, рассмотренный метод построения оценок параметров позволяет избежать необходимости проверять получаемые решения на устойчивость. Как известно, подобная проверка часто сопряжена с анализом довольно сложных и громоздких выражений. Следует отметить, что поскольку обычно точность аппроксимации отлична от нуля, статистические характеристики несмещенных и асимптотически несмещенных оценок могут быть близки между собой.

## ЛИТЕРАТУРА


1. И. В. Смертинюк. Нелинейные оценки полезных параметров сигналов, измеряемых с аддитивными гауссовыми погрешностями.— Автометрия, 1969, № 6.
2. А. М. Каган. Теория оценивания для семейств с параметрами сдвига, масштаба и экспонентных.— Труды МИ им. Стеклова АН СССР, т. 104. Л., «Наука», 1968.
3. И. В. Смертинюк. Улучшение оценок полезных параметров в задачах обработки результатов измерений при наличии мешающих параметров.— Автометрия, 1970, № 4.
4. Т. Андерсон. Введение в многомерный статистический анализ. М., 1963.
5. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. М., «Наука», 1965.
6. А. А. Фельдбаум. Электрические системы автоматического регулирования. М., Оборонгиз, 1957.



*Поступила в редакцию 18 марта 1970 г., окончательный вариант — 18 мая 1970 г.*