АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 5 1970

УДК 621.317.08+519.28

Б. Н. ЛУЦЕНКО, Г. П. ЧЕЙДО
(Новосибирск)

СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ ОЦЕНИВАНИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСАХ СО СТРУКТУРНОЙ ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ

Самым неприятным свойством систематических погрешностей* является их сходство с сигналами. Ввиду этого определение их обычными методами линейного разделения зачастую невозможно. Чтобы обойти эту трудность, был предложен метод, использующий наличие избыточных измерительных средств [1]. Его основная идея заключается в получении функции, зависящей только от погрешностей и не зависящей от сигнала. Это и позволяет вначале выделить, а затем и оценить систематические погрешности. Более развернуто суть этого метода, называемого в дальнейшем методом структурной избыточности, будет изложена ниже. Целью данного исследования является выявление предельных точностных характеристик этого метода и путей дальнейшего повышения точности. Ради этого сначала мы покажем эквивалентность метода структурной избыточности другому, более громоздкому методу, анализ точности которого, тем не менее, в ряде случаев оказывается проще. Попутно будет выявлена инвариантность метода структурной избыточности к выбору вида уравнений связи и составу измерительных средств, входящих в каждое из них.

Пусть исследуется некоторый процесс. Будем полагать, что о его динамике ничего не известно, а в каждый момент времени его состояние однозначно характеризуется набором q параметров $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t), \ldots, \alpha_q(t)$. Допустим, что в распоряжение экспериментатора предоставлено $r>q$ измерительных средств. При отсутствии погрешностей измерений некоторые из них были бы излишни и их показания можно было бы вычислить (используя уравнения связи) по данным других приборов. В реальной обстановке разность между вычисленными и измеренными соответствующим i-м прибором значениями отлична от нуля и образует так называемую невязку $v_i(t)$, $i=\overline{1,k}$, анализ поведения которой во времени и позволяет определить параметры систематических погрешностей измерительных средств всего комплекса. Число таких невязок k равно числу избыточных средств. В дальнейшем будем пользоваться обозначениями:

---

* Под систематическими будем понимать постоянные или изменяющиеся по определенному закону погрешности.

$$F=\begin{pmatrix}F_1\\ \dots\\ F_r\end{pmatrix};\quad F_i=\begin{pmatrix}f_i(t_1)\\ \dots\dots\\ f_i(t_N)\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}C_1\\ \dots\\ C_r\end{pmatrix};\quad C_i=\begin{pmatrix}c_{i_1}\\ \dots\\ c_{i_m}\end{pmatrix};$$

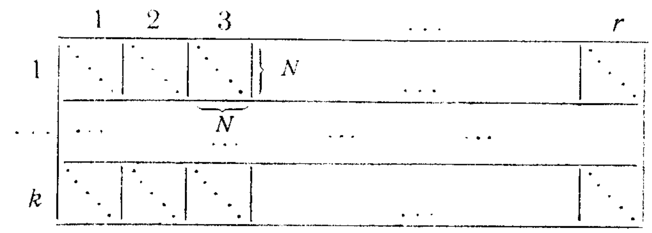
$$V=\begin{pmatrix}V_1\\ \dots\\ V_k\end{pmatrix};\quad V_i=\begin{pmatrix}v_i(t_1)\\ \dots\dots\\ v_i(t_N)\end{pmatrix};\quad \Xi=\begin{pmatrix}\Xi_1\\ \dots\\ \Xi_r\end{pmatrix};\quad \Xi_i=\begin{pmatrix}\xi_i(t_1)\\ \dots\dots\\ \xi_i(t_N)\end{pmatrix};$$

$$B=M\{\Xi\,\Xi^T\}.$$

Символы имеют следующий смысл: F_i — вектор, образованный результатами измерений i-м измерительным средством в N моментах времени; C_i — вектор систематических погрешностей i-го измерительного средства; V — вектор невязок; Ξ — вектор случайных нормальных погрешностей с нулевыми средними; B — его корреляционная матрица. Полагаем, что случайные и систематические погрешности в сумме невелики и аддитивны. Это делает правомочным представление вектора невязок V двумя членами ряда Тейлора, взятыми в окрестности истинных значений измеряемых величин F_0:

$$V\approx V(F_0)+\left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_{F=F_0}\Delta F,$$

где $\dfrac{\partial V}{\partial F}=D$ — матрица частных производных вектора невязок по измеряемым величинам. Она имеет блочно-диагональную структуру, схематически представленную ниже:



Блок, стоящий в i-й строке и j-м столбце, является диагональной матрицей с элементами

$$d_p(ij)=\left(\frac{\partial V_i}{\partial f_j}\right)_{F=F_0}(t_p).$$

Если V_i не зависит от j-й измеряемой величины, соответствующий блок будет нулевым.

Погрешности измерений представим в виде $\Delta F=GC+\Xi$. Здесь G — матрица, определяемая структурой систематических погрешностей C. При истинных значениях измеряемых величин невязки должны быть нулевыми: $V(F_0)=\mathbf{0}$; следовательно, $V\approx DGC+D\Xi$. Используя для отыскания оценок $\tilde{C}$ метод максимального правдоподобия, получаем

$$\tilde{C}_1=[G^T D^T (DBD^T)^{-1} DG]^{-1} G^T D^T (DBD^T)^{-1} V \tag{1}$$

с корреляционной матрицей

$$B_{\tilde{C}_1}=[G^T D^T (DBD^T)^{-1} DG]^{-1}. \tag{2}$$

Практически матрица D вычисляется не при F_0, значения которого мы не знаем, а при измеренных значениях F. Вызываемая этим ошибка на порядок меньше ΔF.

Проведем теперь аналогичные выкладки для второго метода. (Только что рассмотренный метод структурной избыточности будем ради краткости именовать первым). Отличие второго метода заключается в определении не только оценок $\breve{C}$, но и оценок параметров, характеризующих процесс в каждый момент времени, т. е. компонент вектора

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_N \end{pmatrix}; \quad A_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 (t_i) \\ \dots\dots \\ \alpha_q (t_i) \end{pmatrix}.$$

Вектор результатов измерений F равен сумме истинного значения $F_0 = F(A_0)$, систематической и случайной погрешностей: $F = F_0 + GC + \Xi$. Как правило, зависимость измеряемых значений F_0 от параметров процесса A нелинейна, поэтому оценку для векторов A_0 и C будем искать, исходя из принципа максимального правдоподобия по методу Ньютона:

$$F \simeq F(A_S) + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_{F = F_S} \Delta A_S + GC + \Xi,$$

где $\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_{F = F_S} = P_S$ — матрица частных производных вектора измеряемых значений по параметрам. Она также имеет блочную структуру:

$$\begin{array}{c|c|c|c|ccc|c|}
 & 1 & 2 & 3 & & \dots & & N \\ \hline
1 & \dots & \dots & \dots & N & \dots & & \dots \\ \hline
\dots & \dots & & \underbrace{\quad}_{q} & & \dots & \dots & \\ \hline
r & \dots & \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ \hline
\end{array}$$

Каждый из r больших блоков содержит N малых, представляющих строку с элементами:

$$p_k(ij) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_k}\right)_{F = F_S} (t_j), \quad k = \overline{1, r}.$$

Задавшись некоторым начальным приближением для вектора A_S, уточняем его оценку на каждом шаге с помощью следующего алгоритма, вытекающего из принципа максимального правдоподобия:

$$\Delta A_S = [(P_S, G)^T B^{-1} (P_S, G)]^{-1} P_S^T B^{-1} (F - F_S); \quad A_{S+1} = A_S + \Delta A_S.$$

Операция уточнения вектора параметров процесса проводится до вхождения в заданную ε-окрестность. При нарушении сходимости можно прибегнуть к более громоздкому методу наискорейшего спуска. На последнем ν-м шаге можно вычислить и вектор оценок параметров систематических погрешностей:

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_2 &= [(P_\nu, G)^T B^{-1} (P_\nu, G)]^{-1} G^T B^{-1} (F - F_\nu) = \\ &= [G^T B^{-1} G - G^T B^{-1} P_\nu (P_\nu^T B^{-1} P_\nu)^{-1} P_\nu^T B^{-1} G]^{-1} \times \\ &\times G^T B^{-1} [I - P_\nu (P_\nu^T B^{-1} P_\nu)^{-1} P_\nu^T B^{-1}] (F - F_\nu). \end{aligned} \qquad (3)$$

вектора оценок $\begin{pmatrix} A_\nu \\ \widetilde{C}_2 \end{pmatrix}$. Для $\widetilde{C}_2$, в частности, получаем

$$B_{C_2} = [G^T B^{-1} G - G^T B^{-1} P_\nu (P_\nu^T B^{-1} P_\nu)^{-1} P_\nu^T B^{-1} G]^{-1}. \qquad (4)$$

Покажем теперь эквивалентность точечных оценок систематических погрешностей, получаемых обоими методами, т. е. (1) и (3) и их корреляционных матриц (2) и (4). Разумеется, речь об эквивалентности можно вести лишь на том уровне строгости, на котором справедлива линеаризация.

Покажем вначале эквивалентность (2) и (4). Допустим, что она имеет место. При этом очевидно, что

$$G^T D^T (D B D^T)^{-1} D G = G^T B^{-1} G - G^T B^{-1} P_\nu (P_\nu^T B^{-1} P_\nu)^{-1} P_\nu^T B^{-1} G.$$

Это соотношение будет тем более справедливо при

$$B^{-1} - B^{-1} P_\nu (P_\nu^T B^{-1} P_\nu)^{-1} P_\nu^T B^{-1} = D^T (D B^{-1} D^T)^{-1} D. \qquad (5)$$

Поскольку B — положительно определенная матрица, ее можно представить в виде $B = SS'$, где S может быть, например, треугольной. Это позволяет трансформировать (5):

$$I = S^{-1} P_\nu [P_\nu^T (S^{-1})^T S^{-1} P_\nu]^{-1} P_\nu^T (S^{-1})^T + S^T D^T (D S S^T D^T)^{-1} D S. \qquad (6)$$

Здесь I — символ единичной матрицы ранга rN. Нетрудно видеть, что в правой части (6) стоит сумма двух матриц проектирования [2], причем ранг первой из них равен qN, ранг второй — kN.

Покажем теперь, что подпространства, на которые осуществляют проектирование операторы правой части (6), ортогональны. Ортогональность подпространств эквивалентна ортогональности векторов-столбцов матриц P_ν и D^T, т. е. $Q = D P_\nu = \mathbf{0}$.

Рассмотрим произвольный элемент матрицы Q, например, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца. Для большей определенности примем: $i = (n-1)N + l$; $j = qu + s$, где n, l, u, s — целые числа. Из структуры матриц D и P_ν видно, что имеет смысл рассмотреть лишь случай $l = u + 1$, ибо при иных значениях l элементы Q будут заведомо нулевыми. При $l = u + 1$ имеем

$$q_{ij} = \sum_{\pi=1}^{r} \frac{\partial V_n}{\partial f_\pi}(t_l)\, \frac{\partial f_\pi}{\partial \alpha_S}(t_l). \qquad (7)$$

Если обе частные производные в (7) берутся в точке, соответствующей истинным или сглаженным значениям параметров ($F = F_0$ или $F = F_S$), то

$$q_{ij} = \frac{\partial V_n}{\partial \alpha_S}(t_l) = 0, \qquad (8)$$

ибо невязка, по определению, должна быть нулевой при любых значениях параметров процесса. Отличной от нуля ее делает лишь присутствие в измерениях систематических и случайных погрешностей. Разумеется, на практике (8) будет выполняться лишь приближенно, поскольку первые производные в (7) вычисляются при измеренных значениях $f_i(t_l)$, а вторые—при сглаженных, соответствующих оценкам параметров процесса, полученным на ν-м шаге $\alpha_{1\nu}(t_l)$, $\alpha_{2\nu}(t_l), \ldots, \alpha_{q\nu}(t_l)$. Итак, для строгой эквивалентности (2) и (4) необходимо выполнение двух условий:

а) матрицы частных производных D в первом и P_ν во втором методах должны вычисляться при одних и тех же значениях параметров процесса (например, при полученных на ν-м шаге);

б) сумма рангов матриц проектирования в правой части (6) должна быть равна rN. Это будет иметь место в том случае, если из имеющихся r измерительных средств можно отобрать именно q для однозначного определения состояния процесса, а по оставшимся $k=r-q$ измерительным средствам сформировать k невязок.

Что касается условия б), то оно, как правило, выполняется на практике; относительно же а) можно лишь заметить, что поскольку в первом методе мы заменяем истинные значения измеряемых величин $f_i(t_j)$ измеренными и пренебрегаем вызываемой этим ошибкой, то с тем большим основанием можно пренебречь ошибкой, обусловленной заменой измеренных значений сглаженными (последние просто ближе к измеренным, нежели истинные).

Покажем теперь эквивалентность самих точечных оценок (1) и (3) в предположении, что условия а) и б) справедливы. Как и прежде, в первом случае, но теперь уже с учетом а) невязку V можно представить в виде

$$V \approx V(F_\nu) + \left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_{F=F_\nu}(F - F_\nu) = D_\nu (F - F_\nu).$$

С учетом (5) и последнего выражения (1) преобразится в

$$\tilde{C}_1 = [G^T B^{-1} G - G^T B^{-1} P_\nu (P_\nu^T B^{-1} P_\nu)^{-1} P_\nu^T B^{-1} G]^{-1} \times$$
$$\times G^T B^{-1} [I - P_\nu (P_\nu^T B^{-1} P_\nu)^{-1} P_\nu^T B^{-1}] (F - F_\nu).$$

что совпадает с (3). Следовательно, $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2$ [при соблюдении а) и б)] и доказательство эквивалентности двух методов на этом завершается.

Приведем еще попутно выражение $\tilde{C}$, удобное для практического использования во 2-м методе. Представим себе, что итерационный процесс вычисления ΔA_S продолжается вплоть до получения нулевых поправок:

$$\Delta A_S = \{[P_S^T B^{-1} P_S - P_S^T B^{-1} G (G^T B^{-1} G)^{-1} G^T B^{-1} P_S]^{-1} P_S^T -$$
$$- (P_S^T B^{-1} P_S)^{-1} P_S^T B^{-1} G [G^T B^{-1} G - G^T B^{-1} P_S (P_S^T B^{-1} P_S)^{-1} \times$$
$$\times P_S^T B^{-1} G]^{-1} G^T\} B^{-1} (F - F_S) = 0.$$

Воспользовавшись формулой обобщенного обращения матриц [3]

$$(L^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} = L - L H^T (H L H^T + R)^{-1} H L,$$

приведем последнее выражение к виду

$$(P_S^T B^{-1} P_S)^{-1} P_S^T B^{-1} G [G^T B^{-1} G - G^T B^{-1} P_S (P_S^T B^{-1} P_S)^{-1} P_S^T B^{-1} G]^{-1} \times$$
$$\times G^T B^{-1} [I - P_S (P_S^T B^{-1} P_S)^{-1} P_S^T B^{-1}] (F - F_S) =$$
$$= (P_S^T B^{-1} P_S)^{-1} P_S^T B^{-1} (F - F_S).$$

откуда с учетом (3) вытекает $P_S^T B^{-1} G C = P_S^T B^{-1} (F - F_S)$. Повторное использование (3) приводит к выражению

$$\widetilde{C} = (G^T B^{-1} G)^{-1} G^T B^{-1} (F - F_S). \qquad (9)$$

Дальнейшее упрощение (9) достигается при равноточных некоррелированных измерениях ($B = \sigma^2 I$) и использовании для описания систематических погрешностей ортонормированных рядов ($G^T G = I$):

$$\widetilde{C} = G^T (F - F_S).$$

Практически, разумеется, этими соотношениями можно пользоваться и не достигнув нулевых поправок.

Установленная выше эквивалентность двух методов оценки параметров систематических погрешностей позволяет сделать уже сейчас по крайней мере два качественных вывода. Первый важный для практики вывод заключается в инвариантности оценок $\widetilde{C}$ к выбору вида невязок и состава измерительных средств, участвующих в формировании каждой из k-невязок. Разумеется, эту инвариантность можно доказать и непосредственно, не прибегая к услугам второго метода.

Второй вывод касается точности метода. Число параметров, подлежащих оценке при использовании второго метода, равно $rm + qN$, где m — число параметров систематических погрешностей каждого измерительного средства (предполагается одинаковым для всех средств, что не принципиально), число же измерений составляет rN, т. е. с увеличением интервала наблюдений растет не только объем полезной для нас информации, но и число подлежащих определению параметров. Это обстоятельство вынуждает отдавать предпочтение в данном методе структурной избыточности перед временной. Повышение точности оценок должно быть особенно ощутимым при переходе от минимально необходимого для работы метода количества измерительных средств $r = q + 1$ к большему числу (хотя бы путем добавления еще одного измерительного средства).

Большое число искомых параметров и обусловленная этим сравнительно низкая точность их определения как раз и являются той ценой, которую приходится платить за отсутствие (а иногда и просто за нежелание использовать) информации о динамике процесса и связанную с этим простоту первого метода. Естественным шагом на пути дальнейшего повышения точности оценок $\widetilde{C}$ является учет динамики процесса, т. е. описание его поведения во времени некоторыми функциями. Это, разумеется, сразу же резко сократит число искомых величин и повысит точность их определения. К сожалению, воспользоваться при этом первым методом уже не удастся, так как модификация его для учета информации о динамике приводит к неоправданной громоздкости. Второй же метод в этой ситуации существенно упрощается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Пушной, Г. П. Чейдо. Метод использования структурной избыточности измерительной системы при обработке экспериментальных данных с систематическими погрешностями.— IV Всесоюзное совещание по автоматическому управлению (технической кибернетике). Тезисы докладов. Тбилиси, 1968.
2. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
3. Р. Ли. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
17 ноября 1969 г.,
окончательный вариант —
21 апреля 1970 г.