АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1970

УДК 621.372.44

Г. А. АКСЕНОВ, Р. Д. БАГЛАЙ
(Новосибирск)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Условимся под $f(x)$ понимать характеристику физического объекта [например, вольт-амперную характеристику нелинейного элемента (НЭ)], которая может быть воспроизведена в виде электрического сигнала $f(t)$, если на объект воздействует некоторый испытательный сигнал. Для идентификации (определения) функции $f(t)$ можно воспользоваться разложением ее по системе ортогональных функций $\{J_i(t)\}_{i=0}^{n}$:

$$a_i = \int_0^T f(t)\,\rho(t)\,J_i(t)\,dt, \tag{1}$$

где a_i — i-й коэффициент разложения; $\rho(t)$ — весовая функция. Согласно (1), для определения a_i необходимо осуществить: 1) генерирование в виде сигнала $\psi_i(t) = J_i(t)\,\rho(t)$; 2) умножение функции $f(t)$ на $\psi_j(t)$; 3) интегрирование полученного произведения. Все три операции технически трудно реализуемы средствами аналоговой техники, в то время как применение существующих аналого-цифровых преобразователей и вычислительных машин принципиально позволяет получить искомые коэффициенты. Однако в нашем случае характеристика объекта $f(x)$ по желанию экспериментатора может воспроизводиться при достаточно произвольной форме испытательного сигнала, и мы покажем, как это обстоятельство можно использовать для построения простых аналоговых преобразователей, состоящих из набора апериодических звеньев, для получения коэффициентов a_i. Разработка таких преобразователей позволит простыми средствами решить задачу экономного представления характеристики объекта.

Прежде чем окончательно сформулировать задачу, отметим следующее. Если $J_i(t)$ — полином, а вес $\rho(t)$ — функция Пирсона, то выражение (1) можно представить суммой интегралов от произведения сигнала $f(t)$ на t^i. Затем, интегрируя по частям, можно получить формулу для a_i в виде суммы многократных интегралов от $f(t)$, умноженных на некоторые числовые коэффициенты γ_i (см. [1], стр. 224). И тем не менее алгоритм (рис. 1), полученный таким способом, трудно реализуется в силу следующих обстоятельств: 1) полиномы $\{J_i(t)\}_{i=0}^{n}$ и числа γ_j зависят от T; 2) необходимы идеальные интегрирующие звенья; 3) числа γ_j резко возрастают с увеличением номера определяемого коэффициента (так, если $T=2$, $\alpha=\beta=0$, то $\gamma_5>3\cdot10^4$, в то время как $\gamma_0<3$). Перечисленные трудности обусловлены тем, что исходная система $\{J_i(t)\}_{i=0}^{n}$ ортогональна на ограниченном интервале $[0, T]$. Заменой переменных ее можно преобразовать в систему, ортогональную на полубесконечной оси, и в результате избавиться от необходимости применения звеньев «чистого» интегрирования и зависимости J_i и γ_i от T. Однако разложение теперь будет выполняться по некоторой иной системе (базису) и вместо коэффициентов a_i будем иметь новые b_i.

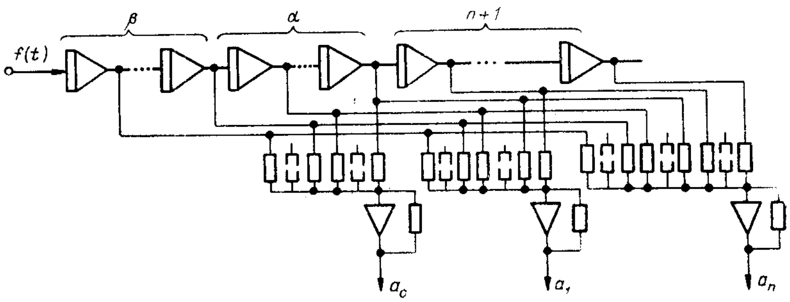

Рис. 1.

Задача настоящей работы состоит в построении такого ортогонального преобразователя, который позволял бы получать коэффициенты разложения $f(x)$ как по новой (b_i), так и по исходной (a_i) системе полиномов путем замены типа источника возбуждения НЭ. При этом преобразователь и источник должны быть легко реализуемы. Иными словами, мы намереваемся избавиться от технических трудностей, которые связаны с разложением по системе функций, ортогональных на конечном интервале, путем перехода к новому базису, ортогональному на полубесконечной оси, и изменения формы сигнала, возбуждающего НЭ. Ниже излагается решение этой задачи.

1. Ради общности в качестве исходной системы примем смещенные на интервал $[0, 1]$ полиномы Якоби $\{J_i(x)\}_{i=0}^{n}$, ортогональные с весом $\rho(x)=x^{\beta}(1-x)^{\alpha}$ [1].

Осуществляя замену переменных $x=1-e^{-t}$, получим новую систему ортогональных на $[0, \infty]$ экспоненциальных полиномов $\{J_i(1-e^{-t})\}_{i=0}^{n}$, которую назовем полиномами Якоби второго рода. Выражение для коэффициентов разложения функции $f(t)$ в ряд по экспоненциальным полиномам запишем в виде

$$b_i=\int_0^{\infty} f(t)\,\rho(1-e^{-t})\,J_i(1-e^{-t})\,d(1-e^{-t});\ 0\leqslant t<T. \qquad (2)$$

Группируя коэффициенты при одинаковых степенях $e^{-\lambda t}$, получим

$$b_i=\sum_{k=0}^{i+\beta}(-1)^{k+\beta+1}D_k\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-(\alpha+\beta+1+i-k)t}\,dt. \qquad (3)$$

Здесь

$$D_k=\frac{1}{k!}\sqrt{\frac{i!\,(\alpha+\beta+2i+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+i+1)}{\Gamma(\alpha+i+1)\,\Gamma(\beta+i+1)}}\times$$

$$\times \sum_{\substack{j=0\ (k\leqslant\beta)\\ j=k-\beta\ (k>\beta)}}^{i} (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha+i+1)\,\Gamma(\beta+i+1)}{(i-j)!\,j!\,\Gamma(\alpha+i-j+1)\,\Gamma(\beta+j-k+1)}.$$

Выражение (3) сравним с интегралом свертки $y(T)=\int\limits_0^{\infty} f(T-t)K(t)dt$, рассматривая вместо $f(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, ее зеркальное отображение $f(T-t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, относительно прямой $t=\frac{T}{2}$ и принимая $K_k(t)=e^{-(\alpha+\beta+1+i-k)t}$. Тогда передаточная функция технического устройства

$$K_k(p)=\frac{1}{p+(\alpha+\beta+1+i-k)} \tag{4}$$

может быть реализована с помощью простых апериодических звеньев. Функцию $f(T-t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, представляющую характеристику нелинейного элемента $f(x)$, можно получить, если возбуждающий ток (напряжение) изменяется по закону $x=T-t$ [2]. Таким образом, мы пришли к простому и в общем-то очевидному алгоритму построения устройства, воспроизводящего коэффициенты b_i разложения $f(t)$ в ряд по экспоненциальным полиномам. Такое устройство, согласно (4), состоит из $i+\beta$ простых апериодических звеньев типа $\frac{1}{p+(\alpha+i+1+\beta-k)}$ (рис. 2). В частном, но практически важном случае, когда $\alpha=\beta=0$, система $\{J_i(1-e^{-t})\}_{i=0}^{n}$ превращается в ортогональные полиномы Лежандра второго рода. При этом $K_k(p)=\frac{1}{p+(i+1-k)}$.

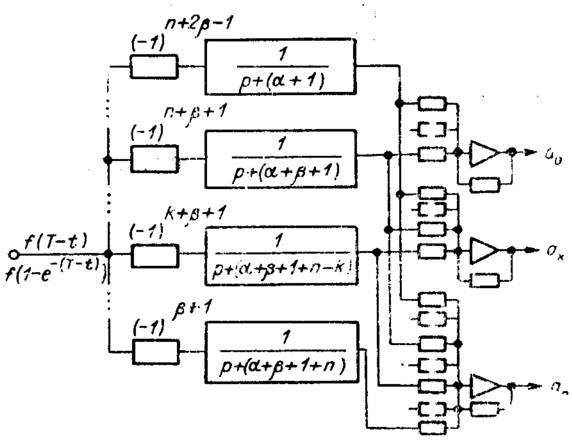

Рис. 2.

2. Теперь покажем, что устройство (см. рис. 2) пригодно для определения коэффициентов a_i разложения $f(t)$ в ряд по исходным полиномам, т. е. по системе $\{J_i(x)\}_{i=0}^{n}$.

Действительно, если возбуждающий ток будет изменяться по закону $x=(1-e^{-(T-t)})$ (генератор такого типа легко реализуется), то получим $f(1-e^{-(T-t)})$. Подавая сигнал $f(1-e^{-(T-t)})$ на вход устройства (см. рис. 2), на i-м его выходе будем иметь

$$a_i=\int\limits_0^{\infty} f(1-e^{-t})\,\rho(1-e^{-t})\,J_i(1-e^{-t})\,d(1-e^{-t});\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{5}$$

Обозначив $1-e^{-t}$ через z, получим

$$a_i=\int\limits_0^{1-e^{-T}} f(z)\,\rho(z)\,J_i(z)\,dz, \tag{6}$$

где a_i — i-й коэффициент разложения $f(z)$ в ряд по исходной системе степенных полиномов Якоби, ортогональных на $[0, 1]$. При $\alpha=\beta=0$ на i-м выходе устройства (см. рис. 2) будет воспроизводиться коэффициент

$$a_i = \int\limits_0^{1-e^{-T}} f(z) P_i(z)\, dz, \tag{7}$$

представляющий разложение $f(z)$ в ряд по полиномам Лежандра $\{P_i(z)\}_{i=0}^{n}$.

Итак, с помощью выбора вида источника, возбуждающего нелинейный элемент, описанная техническая структура (см. рис. 2) позволяет получить коэффициенты разложения искомой нелинейной зависимости как по экспоненциальным функциям, так и по степенным полиномам. Это открывает возможность получать наиболее экономное (по числу коэффициентов) описание искомой нелинейной зависимости с помощью аппроксимирующих рядов. В самом деле, поскольку свойства искомой функции заранее неизвестны, а количество коэффициентов разложения ее в сильной степени зависит от типа выбранной ортогональной системы, то, располагая рассмотренным устройством, можно легко установить, какая из систем ортогональных функций (полиномы или экспоненты) наиболее эффективна. Следует отметить, что такие возможности не ограничиваются только данными двумя типами источников. Но поскольку эти источники наиболее просто реализуются, а применение их охватывает две практически наиболее важные для приложений ортогональные системы, мы ограничились только их рассмотрением.

3. Большой практический интерес представляет возможность организации технического устройства (см. рис. 2) в так называемом каноническом виде. Для этого необходимо, чтобы передаточная функция устройства, воспроизводящего коэффициент a_n ($n=0, 1, 2, \ldots$), распадалась на произведение сомножителей, входящих в передаточную функцию устройства, воспроизводящего коэффициент a_{n+1}. При этом количество элементарных звеньев, необходимых для реализации структуры, резко уменьшается.

Возможность канонизации зависит от вида весовой функции и в нашем случае не всегда осуществима. Ниже покажем, что когда $\rho = (1-x)^{\alpha}$, то устройство (см. рис. 2) может быть канонизировано. В самом деле, передаточные функции

$$\{K_i(p)\}_{i=0}^{n} = L\,\{e^{-(\alpha+1)t} J_i(1-e^{-t})\}_{i=0}^{n}$$

(L — символ преобразования Лапласа) устройств, воспроизводящих коэффициенты $\{a_i\}_{i=0}^{n}$, выражаются следующим образом:

$$K_0(p) = L\,\{e^{-(\alpha+1)t}\, 1 \cdot \sqrt{\alpha+1}\} = \frac{\sqrt{\alpha+1}}{p+(\alpha+1)};$$

$$K_1(p) = L\,\{e^{-(\alpha+1)t}\sqrt{\alpha+3}\,[(2+\alpha)(1-e^{-t})-1]\} =$$

$$= -\frac{\sqrt{\alpha+1}}{p+(\alpha+1)}\sqrt{\frac{\alpha+3}{\alpha+1}}\,\frac{p}{p+(\alpha+2)} = -K_0(p)\sqrt{\frac{\alpha+3}{\alpha+1}}\,\frac{p}{p+(\alpha+2)};$$

$$K_2(p) = L\left\{e^{-(\alpha+1)t}\sqrt{\alpha+5}\left[\frac{(\alpha+4)(\alpha+3)}{2}(1-e^{-t}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2(\alpha+3)(1-e^{-t})+1\right]\right\} = \frac{\sqrt{\alpha+1}}{p+(\alpha+1)}\sqrt{\frac{\alpha+3}{\alpha+1}}\,\frac{p}{p+(\alpha+2)}\times$$

$$\times \sqrt{\frac{\alpha+5}{\alpha+3}}\,\frac{p-1}{p+(\alpha+3)} = K_1(p)\sqrt{\frac{\alpha+5}{\alpha+3}}\,\frac{p-1}{p+(\alpha+3)};$$

. . . .

$$K_n(p) = (-1)^n K_{n-1}(p)\sqrt{\frac{\alpha+(2n+1)}{\alpha+(2n-1)}}\,\frac{p-(n-1)}{p+(\alpha+n+1)}.$$

Как видим, передаточная функция устройства для определения коэффициента a_n может быть представлена в форме

$$K_n(p) = \frac{\sqrt{\alpha+1}}{p+(\alpha+1)}\prod_{j=1}^{n}(-1)^j\sqrt{\frac{\alpha+(2j+1)}{\alpha+(2j-1)}}\,\frac{p-(j-1)}{p+(\alpha+j+1)}. \qquad (8)$$

Соответствующая (8) каноническая структура, состоящая из элементарных звеньев типа $\frac{\sqrt{\alpha+1}}{p+(\alpha+1)}$, $\sqrt{\frac{\alpha+(2n+1)}{\alpha+(2n-1)}}\,\frac{p-(n-1)}{p+(\alpha+n+1)}$, показана на рис 3, где напряжения, воспроизводящие коэффициенты $\{a_i\}_{i=0}^{n}$,

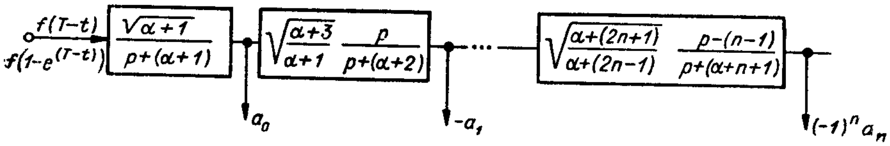

Рис. 3.

снимаются в местах, обозначенных a_0, a_1, . . . , a_n. Ясно, что при $\alpha=0$ с помощью устройства (см. рис. 3) можно получить коэффициенты разложения по полиномам Лежандра (экспоненциальным и степенным).

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочная математическая библиотека. Математический анализ. М., Физматгиз, 1961.
2. Р. Д. Баглай. Преобразование вольт-амперных характеристик нелинейных элементов при автоматическом измерении их параметров.— Автометрия, 1966, № 1.

Поступила в редакцию
28 ноября 1969 г.,
окончательный вариант —
16 апреля 1970 г