

**К. А. РЕЗНИК**  
 (Ленинград)

**ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ  
 АНСАМБЛЕЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ**

Вычисление вероятности брака поверки по схеме, предложенной Н. А. Бородачевым [1] и Е. Ф. Долинским [2], требует знания плотности распределения погрешностей ансамблей образцовых и поверяемых приборов. В связи с этим возникает задача восстановления теоретического распределения по экспериментальным данным. К сожалению, при практически доступном числе наблюдений невозможно полностью восстановить теоретическое распределение. Поэтому обычно идут по следующему пути: предлагают модель теоретического распределения, зависящую от определенного числа параметров и оценивают значение этих параметров по данным наблюдений. Часто в качестве моделей используют стандартные законы (например, равномерной плотности, нормальный, двойной экспоненциальный и т. п.). Все эти законы являются частными случаями закона с плотностью

$$f(x; k; \sigma) = \frac{1}{2(2\sigma^2)^{1/k} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \exp\left(-\frac{|x|^k}{2\sigma^2}\right); \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

где  $\sigma^2$  и  $k$  — постоянные;  $\Gamma(y)$  — гамма-функция. Или в нормированной форме:

$$f(x; k) = \frac{1}{2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \exp(-|x|^k); \quad -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

Функция распределения закона с плотностью (2) равна

$$F(x; k) = \frac{1}{2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \int_{-\infty}^x \exp(-|y|^k) dy; \quad (3)$$

для  $x > 0$  получим соответственно

$$F(x; k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \int_0^x \exp(-|y|^k) dy, \quad (4)$$

Предлагается использовать выражение (1) в качестве модели для распределения погрешностей. Эта модель дает возможность, вводя дополнительный параметр  $k$ , получить с помощью подходящего выбора указанного параметра лучшее согласие с данными эксперимента. Если  $k=1$ , то распределение совпадает с двойным экспоненциальным, если  $k=2$ , то — с нормальным; при  $k \rightarrow \infty$  оно стремится к равномерному распределению на интервале  $(-1; 1)$ . Значение параметра  $k$ , определяющего форму распределения (2), находим через коэффициент эксцесса  $\mathcal{E}_0$ , связанный с  $k$  следующей зависимостью:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{k \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \Gamma\left(\frac{5}{k}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{3}{k}\right)}. \quad (5)$$

Зависимость  $k(\mathcal{E}_0)$  показана на рис. 1. Значения  $\mathcal{E}_0$  оцениваем по экспериментальным данным, пользуясь известной формулой:

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^2}, \quad (6)$$

где  $n$  — число наблюдений;  $x_i$  — результат  $i$ -го наблюдения;  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ . Затем, подставляя  $\tilde{\mathcal{E}}$  в (5) или используя график рис. 1.

находим соответствующее значение  $k$ .

Распределение с плотностью (1), (2) симметрично. Поэтому представляется разумным пользоваться этой моделью в случаях, когда выборочная оценка асимметрии

$$\tilde{A} = \frac{n^{1/2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^{3/2}} \quad (7)$$

удовлетворяет неравенству

$$|A| < 1,5 \tilde{\sigma}(A), \quad (8)$$

где

$$\tilde{\sigma}(A) = \left[ \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)} \right]^{1/2},$$

которое в [3] предлагается в качестве критерия симметричности.

Для вычисления плотности вероятности (1) или (2) можно воспользоваться таблицами функции  $e^{-z}$ , подставив в них  $z = |x|^k$ .

Интегральная функция распределения (3) легко преобразуется в так называемую неполную гамма-функцию

$$F(y, k) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} F(y \sqrt{p+1}) = \frac{1}{2F(p-1)} \int_0^{y \sqrt{p+1}} u^p e^{-u} du, \quad (9)$$

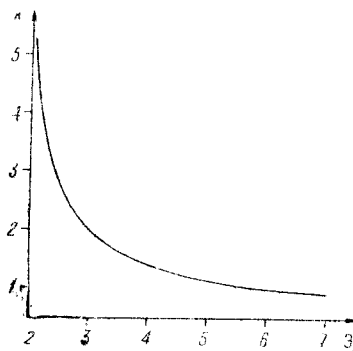


Рис. 1.

где  $F(y\sqrt{p+1})$  — неполная гамма-функция аргумента  $y\sqrt{p+1}$ ;  $p = \frac{1}{k} - 1$ . Функция (9) табулирована Е. Е. Слущким [4].

При значимой асимметрии, когда условие (8) не выполняется, предлагается следующая модель плотности распределения:

$$f(x) = \frac{1}{[(2\lambda_-^2)^{1/k_-}] \Gamma(1 + 1/k_-) + [(2\lambda_+^2)^{1/k_+}] \Gamma(1 + 1/k_+)} \times \begin{cases} \varphi_+ & \text{при } x \geq 0; \\ \varphi_- & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\varphi_+ = e^{-\frac{|x|^k}{2\lambda_+^2}}$ ;  $\varphi_- = e^{-\frac{|x|^k}{2\lambda_-^2}}$ ;  $(2\lambda_+^2)^{1/k_+} = (\bar{x}_+)^{\frac{(k_+) \Gamma(1 + \frac{1}{k_+})}{\Gamma(2/k_+)}}$ ;

$(2\lambda_-^2)^{1/k_-} = (\bar{x}_-)^{\frac{(k_-) \Gamma(1 + \frac{1}{k_-})}{\Gamma(2/k_-)}}$ ;  $\bar{x}_+$  и  $\bar{x}_-$  — средние арифметические

наблюдений, находящихся соответственно правее и левее оси ординат, проведенной через моду. Для определения  $k_+$  и  $k_-$  следует вычислить оценки эксцесса двух симметричных распределений, полученных из правой и левой частей эмпирического распределения дополнением их зеркальными отображениями. Далее по графику на рис. 1 находим  $k_+$  и  $k_-$ . Если  $2\lambda_+^2 = 2\lambda_-^2$  и  $k_+ = k_-$ , то распределение с плотностью (10) переходит в распределение с плотностью (1). Функция распределения, соответствующая плотности (10), будет иметь вид

$$F(x) = \frac{1}{[(2\lambda_-^2)^{1/k_-}] \Gamma(1 + 1/k_-) + [(2\lambda_+^2)^{1/k_+}] \Gamma(1 + 1/k_+)} \times \int_{-\infty}^x \varphi_-(y) dy \quad \text{при } x < 0;$$

$$F(x) = \frac{1}{[(2\lambda_-^2)^{1/k_-}] \Gamma(1 + 1/k_-) + [(2\lambda_+^2)^{1/k_+}] \Gamma(1 + 1/k_+)} \times \{ [(2\lambda_-^2)^{1/k_-}] \Gamma(1 + 1/k_-) + \int_0^x \varphi_+(y) dy \} \quad \text{при } x \geq 0. \quad (11)$$

Интегралы  $\int_{-\infty}^x \varphi_-(y) dy$  и  $\int_0^x \varphi_+(y) dy$  можно также преобразовать в выражения для неполной гамма-функции.

Пример. Погрешности генератора стандартных сигналов типа

| $m_1, мв$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $ A $ | $\Theta$ | $\tilde{\sigma}(A)$ |
|-----------|-------|-------|-------|-------|----------|---------------------|
| 102,5     | 12,48 | 4,08  | 675   | 0,092 | 4,34     | 0,24                |

Г4-18 по начальному уровню выходного высокочастотного напряжения на частоте 0,1 МГц имеют распределение, представленное гистограммой на рис. 2. Эти значения погрешностей получены

из результатов поверки 125 приборов данного типа, находящихся в эксплуатации. На основе экспериментальных данных вычислены оценки моментов распределения (см. таблицу).

Из таблицы видно, что  $|A| < 1,5\tilde{\sigma}(A)$ , поэтому можно воспользоваться моделью (1). По графику на рис. 1 найдем, что эксцессу  $\Theta = 4,34$  соответствует  $k \approx 1,25$ . Модель с  $k = 1,25$  находится между нормальным

( $k=2$ ) и экспоненциальным ( $k=1$ ) распределениями. Проверим согласие каждого из перечисленных законов с распределением экспериментальных данных: при проверке на соответствие нормальному закону получим  $\chi^2=14,76$ ; для экспоненциального закона  $\chi^2=11,04$ ; при проверке на соответствие закону распределения с  $k=1,25$  —  $\chi^2=8,20$ . Из принципа минимума  $\chi^2$  следует, что теоретический закон с  $k=1,25$  наиболее точно описывает распределение погрешностей. Действительно, гипотеза о нормальном законе распределения должна быть отвергнута на уровне значимости  $q=10\%$ , гипотеза об экспоненциальном законе — на уровне  $q=30\%$ , о законе с  $k=1,25$  — только на уровне  $q=50\%$ .

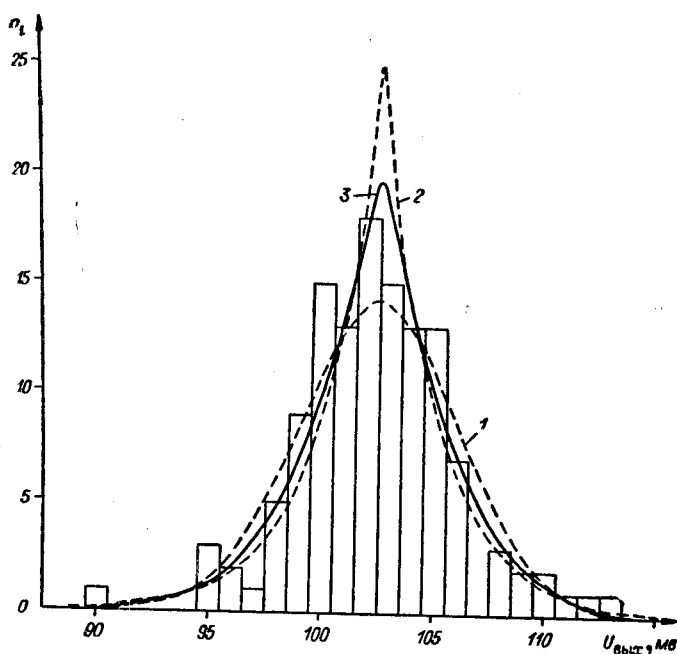


Рис. 2.

Итак, предлагаемая модель (2), (10) обладает следующими положительными свойствами: 1) ее параметры  $k$  и  $\lambda^2/\lambda_0^2$  могут быть легко вычислены по эмпирическим данным; 2) она включает стандартные формы одномодальных распределений и в то же время дает возможность классифицировать промежуточные формы; 3) ее интегральная функция распределения табулирована и соответствует функции вероятностей  $\lambda^2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Бородачев. Основные вопросы теории точности производства. М., Изд-во АН СССР, 1948.
2. Е. Ф. Долинский. Анализ результатов поверок мер и приборов.— Измерительная техника, 1958, № 3.
3. С. А. Айвазян. Статистическое исследование зависимостей. М., «Металлургия», 1968.
4. Е. Е. Слуцкий. Таблицы для вычисления неполной Г-функции и функции вероятности. М., Изд-во АН СССР, 1950.

Поступила в редакцию  
14 апреля 1970 г.