

А. Г. СЕНИН, М. С. ХАЙРЕТДИНОВ
(Новосибирск)

ФОРМИРОВАНИЕ ЭЛЛИПСОИДА РАВНОВЕРЯТНОЙ ПЛОТНОСТИ ПРИ РАСПОЗНАВАНИИ ШУМОВ ПО НЕКОРРЕЛИРОВАННЫМ ПРИЗНАКАМ

Создание простых специализированных распознающих устройств в **настоящее время является актуальной задачей**. Однако практическая реализация их связана с определенными трудностями. Не затрагивая вопроса о выявлении информативных признаков, который является узловым в решении проблемы, мы ограничимся анализом вида разделяющей поверхности и алгоритмов настройки ее параметров в процессе обучения.

Рассмотрим задачу распознавания шумов, имеющую много практических приложений. В качестве признаков будем использовать спектральные характеристики процесса в анализируемом диапазоне частот. Заметим, что спектральная плотность гауссова шума дает полное представление вероятностных свойств процесса.

Вид разделяющей функции в значительной степени определяется характером решаемой задачи, возможностью реализации, а также алгоритмом обучения.

Широкое использование в исследованиях по распознаванию нашли линейные решающие функции. Так, простейшее выделение области G_j признаков x j -го класса

$$\bar{a}_j < \bar{x}_j < \bar{b}_j \quad (1)$$

формируется из плоскостей, параллельных координатным плоскостям. При этом для выделения соответствующего класса требуется $2n$ плоскостей, где n — число признаков. Количество плоскостей существенно можно уменьшить, если не накладывать условия ограниченности объема выделенной области. Однако последнее условие во многих практических задачах оказывается весьма существенным. Так, при оценке технического состояния объекта можно сформировать область признаков нормального состояния, характерных дефектов, но трудно рассчитывать на возможность получения представительной выборки дефектного состояния вообще в силу многообразия возможных нарушений. Поэтому распознавание в этом случае целесообразно вести, формируя замкнутые области признаков, соответствующих определенным состояниям объекта. Для уменьшения ошибок распознавания разделяющая поверхность должна выбираться так, чтобы при фиксированном объеме, заключенном в ней, вероятность попадания вектора признаков данного класса была максимальной.

на. Такому условию, как известно [1], удовлетворяет поверхность равной плотности вероятности

$$p(\bar{x}) = \text{const.} \quad (2)$$

Для процессов со случайными параметрами плотность распределения можно приближенно аппроксимировать подмножеством гауссовых распределений, для элементов которого равновероятными контурами являются эллипсоиды. Поэтому использование разделяющей поверхности (1) в виде прямоугольника нежелательно, к тому же проверка неравенств при большем числе признаков и распознаваемых классов требует много пороговых элементов, что затрудняет практическую реализацию.

При некоррелированных признаках, распределенных по нормальному закону, контуром равной плотности вероятности является эллипсоид вида

$$\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2} = R^2. \quad (3)$$

Некоррелированность признаков при распознавании шумов по спектру имеет место, если частотные характеристики узкополосных фильтров не перекрываются, что всегда возможно выполнить. Если \bar{m}_j и σ_{ij}^2 являются соответственно вектором математического ожидания и диагональным элементом ковариационной матрицы плотности распределения вероятностей j -го класса, то принадлежность распознаваемого вектора этому классу определяется из условия

$$\sum_{i=1}^n \frac{(x_{ij} - m_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2} < R_j^2. \quad (4)$$

Поскольку при конструировании аппаратуры параметры распределения \bar{m}_j и σ_{ij}^2 остаются неизвестными и оцениваются при обучении, разделяющая поверхность должна включать элементы настройки. Искомую поверхность второго порядка представим в виде

$$\sum_{i=1}^n (a_i x_i^2 + b_i x_i) + c = 0. \quad (5)$$

где a_i , b_i , c — коэффициенты настраиваемой поверхности.

Формирование контура равновероятной плотности можно обеспечить, воспользовавшись алгоритмами обучения [2, 3], однако реализация их достаточно сложна. Поэтому практический интерес представляют способы формирования разделяющей поверхности непосредственно самим оператором, что существенно упрощает устройство. В [4] предложен аналогичный алгоритм формирования собственной области в виде гиперкуба. Однако использование в качестве критерия близости модуля расстояния требует большого количества операционных усилителей и усложняет аппаратуру.

Рассмотрим вначале тот случай, когда дисперсии признаков равны между собой и составляют σ^2 и, следовательно, (3) является уравнением сферы

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m_i)^2 = R^2. \quad (6)$$

Задача заключается в том, чтобы, наблюдая за процессом $x(t)$, с максимальной простотой оценить коэффициенты \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} в (5), удовлетворя-

ющие уравнению (6). Заметим, что при распознавании нескольких классов реализация вычислительных операций в (6) значительно сложнее (5), поскольку в первом случае необходимо синтезировать больше квадратичных детекторов и электрически развязывать опорные напряжения, компенсирующие напряжения признаков.

Неизвестным параметром в (6) является математическое ожидание признака, причем квадрат ошибки

$$\sum_{i=1}^n (x_i - m_i)^2$$

имеет минимум, если $\bar{m}_j = M[\bar{x}_j]$ и значение суммы в (6) при $\bar{x}_j = \bar{m}_j$ равно нулю. Последние условия позволяют элементарным путем определить коэффициенты уравнения (5) при наблюдении случайного процесса.

Пусть весовыми элементами являются переменные сопротивления.

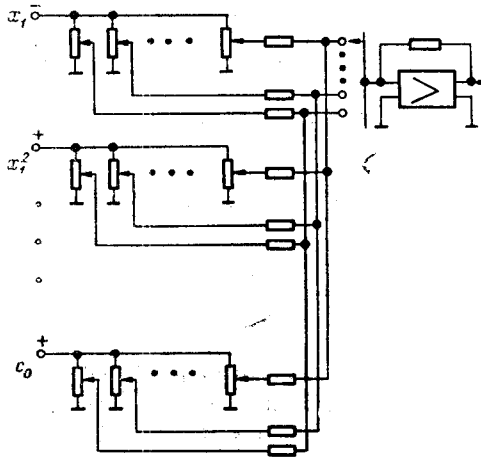


Рис. 1.

Схема реализации разделяющих поверхностей для распознавания нескольких процессов представлена на рис. 1. Сформируем в виде сферы разделяющую поверхность для одного из классов, для чего выведем все потенциометры этого класса в нулевое положение. Очевидно, напряжение на сумматоре при этом будет равным нулю. Принимая во внимание, что для сферы все коэффициенты a_i в (5) положительны и равны единице, выведем потенциометр при x_i^2 на максимум, что соответствует коэффициенту $a_i = 1$. При этом на сумматор будет передано напряжение x_i^2 . Учитывая, что дисперсия признаков σ_j^2 после сгла-

живания может быть сделана сколь угодно малой, получим

$$M[x_i^2] \approx m_i^2. \quad (7)$$

Потенциометром свободного члена удваиваем величину напряжения и затем полностью компенсируем напряжением с потенциометра линейного признака, т. е. сводим к минимуму величину $x_i^2 - a x_i + m_i^2$. Процедура повторяется для остальных $n - 1$ признаков, причем ранее определенные коэффициенты не изменяются. Таким образом, на основе наблюдения формируются искомые коэффициенты для оценки величины $\sum_{i=1}^n (x_i - m_i)^2$. Квадрат радиуса сферы «вводится» дополнительно в уравнение (5) за счет изменения напряжения с потенциометра при коэффициенте c . Влияние величины этого радиуса на качество распознавания будет рассмотрено ниже. Построение эллипсоида равновероятной плотности отличается несущественно.

Если в качестве признаков используются оценки спектральной плотности, так что $x_i = S^*(\omega_i)$, то

$$\frac{M[x_i^2]}{\sigma_i^2} = k_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

есть постоянная, определяемая параметрами узкополосного фильтра и интегратора [5]. Пусть характеристики фильтров — ширина полосы и постоянная времени интегратора — одинаковы. Тогда, очевидно, что для эллипсоида (3) должно выполняться условие (8) так, что при всех i $k_i = k$. Поэтому выбор коэффициентов в разделяющей поверхности (5) выполняется следующим образом. После выведения всех потенциометров на нулевой уровень с квадратора первого признака снимается некоторое напряжение, которое удваивается потенциометром коэффициента c и компенсируется напряжением с потенциометра линейного признака. Для второго и последующих квадраторов признаков устанавливается движок потенциометра на уровне, при котором снимаемое напряжение оказывается равным напряжению с квадратичного элемента первого признака и осуществляются аналогичные операции. Подобный алгоритм настройки тридцати коэффициентов занимает время около двух минут.

Особо следует остановиться на выборе радиуса сферы или полуосей эллипсоида, которые определяют объем выделенной области. Их размеры должны быть такими, чтобы при минимальном объеме пространственной вероятности правильной классификации равнялась заданной величине, например, близкой к единице, т. е. реализации класса, для которых построена замкнутая область, практически не выпадали из выделенного объема.

Количественную оценку квадрата радиуса проиллюстрируем на примере. Пусть признаки \bar{x} образа A имеют нормальное распределение с одинаковой дисперсией $\sigma^2=1$ и математическим ожиданием, равным нулю (после центрирования). Тогда, очевидно, вероятность правильной классификации P_A равна вероятности того, что

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < R^2. \quad (9)$$

Распределением суммы в (9) при отмеченных ранее условиях является известное χ^2 -распределение, по которому несложно определить искомую вероятность [6].

На рис. 2 представлена зависимость величины P_A при разных значениях R^2 и различном числе используемых для классификации признаков. Зная дисперсию признаков, выраженную в единицах напряжения, нетрудно оценить то пороговое значение, эквивалентное квадрату радиуса, при котором будет обеспечена заданная вероятность правильной классификации.

Интересно сравнить эффективность распознавания с использованием разделяющей поверхности в виде гипersферы и гиперкуба при условии равенства выделенных объемов. Объем гипersферы с радиусом R подсчитывается по известной формуле [7]:

$$V_c = \int_0^R \frac{2 \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} r^{n-1} dr = \frac{2 \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \frac{R^n}{n}. \quad (10)$$

Объем гиперкуба со стороной a равен

$$V_k = a^n. \quad (11)$$

Для ранее рассмотренного примера на рис. 3 представлены зависи-

мости вероятности правильной классификации для гиперсферы и гиперкуба, причем в последнем случае эта вероятность равна

$$P_A \left[\Phi \left(\frac{a}{2\sqrt{2}} \right) \right]^n \quad (12)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

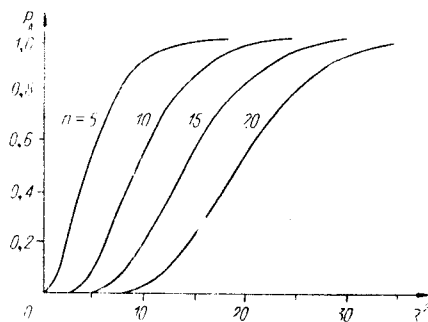


Рис. 2.

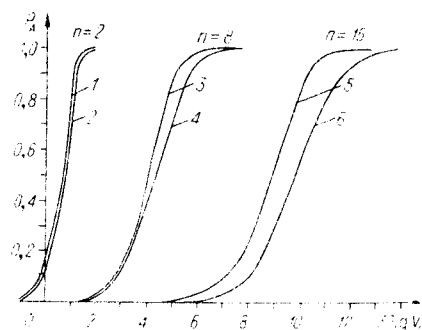


Рис. 3.

Из сравнения видно, что эффективность распознавания в первом случае (кривые 1, 3, 5) по сравнению со вторым (кривые 2, 4, 6) существенно возрастает с увеличением числа используемых признаков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Д. Борисов, М. И. Могильницкий, З. И. Нестерова, А. Г. Сенин. О принципах построения аппаратуры для распознавания шумовых сигналов.— Тезисы IV Всесоюзного совещания по автоматическому управлению. Тбилиси, 1968.
2. Я. З. Цыпкин. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., «Наука», 1968.
3. А. Г. Сенин. Об одном способе формирования поверхности равной плотности вероятности при распознавании шумов.— Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей. Труды II Всесоюзного симпозиума. Новосибирск, 1969.
4. Лукс, Дрейк. Простая адаптивная машина для обнаружения неисправностей.— Зарубежная радиоэлектроника, 1968, № 6.
5. А. А. Харькевич. Спектры и анализ. М., Физматгиз, 1962.
6. Л. Н. Большев, Е. В. Смирнов. Таблицы математической статистики. М., «Наука», 1955.
7. К. Хелстром. Статистическая теория обнаружения сигналов. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

Поступила в редакцию
9 февраля 1970 г.