АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 6 1970

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АВТОМЕТРИИ

УДК 621.317.08+519.281

Б. Н. ЛУЦЕНКО, Г. П. ЧЕЙДО
(Новосибирск)

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗБЫТОЧНОГО ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА

В [1] были проанализированы два метода оценивания параметров систематических погрешностей. Оба они основаны на использовании структурной избыточности комплекса измерительных приборов и различаются тем, что первый позволяет определить только систематические погрешности, а второй, кроме того, и параметры измеряемого процесса. В [1] показана тождественность оценок, получаемых обоими методами, и проведен качественный анализ их точности.

Здесь мы более детально исследуем точность этих оценок и указываем ее верхний предел. Рассматриваем простую модель с постоянными во времени аддитивными систематическими погрешностями при равноточных некоррелированных измерениях. В рамках этой модели получена нижняя граница дисперсий оценок. Кроме того, в данной работе исследуется возможность использования метода структурной избыточности при более сложном характере систематических погрешностей, когда они мультипликативны или содержат одновременно аддитивную и мультипликативную составляющие.

Для удобства последующих рассуждений исходные данные представим в несколько ином, чем в [1], виде, а именно: сгруппируем их по времени. Осуществляя перекомпоновку, сохраним прежние обозначения, так что выражения для оценок и их корреляционных матриц будут справедливы и в новых терминах. Остановимся вначале на модели с аддитивной систематической погрешностью. Измерения производим дискретно во времени. Для момента времени t показание $f_i(t)$ i-го средства

$$f_i(t) = f_{0i}(t) + c_i + \xi_i(t); \quad i = \{1, \ldots, r\}; \quad t = \{t_1, \ldots, t_N\}.$$

Здесь $f_{0i}(t)$ — истинное значение измеряемой функции; c_i — систематическая погрешность; $\xi_i(t)$ — случайная погрешность. Объединяем все rN выражений такого вида в единое матричное соотношение

$$F = F_0 + GC + \Xi. \tag{1}$$

Смысл символов в (1) следующий:

$$F_{rN,1} = \begin{pmatrix} f_1(t_1) \\ \cdots \\ f_r(t_1) \\ \cdots \\ \cdots \\ f_1(t_N) \\ \cdots \\ f_r(t_N) \end{pmatrix}; \quad G_{rN,r} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix};$$

$$C_{r,1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_r \end{pmatrix}; \quad \Xi_{rN,1} = \begin{pmatrix} \xi_1(t_1) \\ \cdots \\ \xi_r(t_1) \\ \cdots \\ \cdots \\ \xi_1(t_N) \\ \cdots \\ \xi_r(t_N) \end{pmatrix},$$

причем $\Xi \in N(0, B)$. При использовании первого метода оценка вектора систематических погрешностей C получается в результате анализа kN-мерного вектора невязок V ($k=r-q$ — число избыточных средств);

$$V = DGC + D\Xi, \tag{2}$$

где

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_N \end{pmatrix}; \quad V_i = \begin{pmatrix} v_1(t_i) \\ \cdots \\ v_k(t_i) \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_N \end{pmatrix};$$

$$D_i = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial v_1}{\partial f_1}\right|_{t_i} & \cdots & \left.\frac{\partial v_1}{\partial f_r}\right|_{t_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \left.\frac{\partial v_k}{\partial f_1}\right|_{t_i} & \cdots & \left.\frac{\partial v_k}{\partial f_r}\right|_{t_i} \end{pmatrix},$$

т. е. D — матрица частных производных вектора невязок по измеряемым функциям.

Оценки компонент C находятся методом максимального правдоподобия

$$\tilde{C} = [G^T D^T (D B D^T)^{-1} D G]^{-1} G^T D^T (D B D^T)^{-1} V, \tag{3}$$

и, следовательно, они совместно эффективны. В условиях рассматриваемой в данной задаче модели это же выражение для вектора точечных оценок можно получить и иным путем, а именно минимизируя след корреляционной матрицы оценок при условии их линейности и несмещенности. Естественно поэтому взять в качестве критерия точности именно след корреляционной матрицы $B_{\tilde{C}}$. Для анализа нам будет удобнее работать с выражением, полученным при использовании второго метода оценивания [1]:

$$B_{\tilde{C}} = [G^T B^{-1} G - G^T B^{-1} P (P^T B^{-1} P)^{-1} P^T B^{-1} G]^{-1}. \tag{4}$$

Здесь P — матрица $rN \times qN$ частных производных измеряемых функций по параметрам α_i, $i = \{1, \ldots, q\}$, характеризующим состояние процесса в каждый момент времени:

$$P_{rN,\, qN} = \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & P_N \end{pmatrix}; \quad P_i = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial \alpha_1}\right|_{t_i} & \cdots & \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial \alpha_q}\right|_{t_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \left.\dfrac{\partial f_r}{\partial \alpha_1}\right|_{t_i} & \cdots & \left.\dfrac{\partial f_r}{\partial \alpha_q}\right|_{t_i} \end{pmatrix}.$$

Сделанная выше перекомпоновка и предпринималась с тем, чтобы придать P блочно-диагональный вид.

При равноточных и некоррелированных измерениях, когда $B = \sigma^2 I$,

$$\operatorname{Sp}(B_{\tilde{C}}) = \sigma^2 \operatorname{Sp}[G^T G = G^T P (P^T P)^{-1} P^T G]^{-1}.$$

Покажем, что след обратной матрицы $B_{\tilde{C}}^{-1}$ имеет фиксированную величину. Из структуры матриц P и G следует

$$G^T P (P^T P)^{-1} P^T G = \sum_{i=1}^{N} Q_i, \tag{5}$$

где $Q_i = P_i (P_i^T P_i)^{-1} P_i^T$ — матрица проектирования ранга q. С учетом последнего получаем

$$\operatorname{Sp}(B_{\tilde{C}}^{-1}) = \operatorname{Sp}(G^T G) - \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Sp}(Q_i) = N(r - q) = N k,$$

так как след каждой из матриц проектирования Q_i равен ее рангу. Из инвариантности следа к ортогональным преобразованиям вытекает

$$\operatorname{Sp}(B_C^{-1}) = \operatorname{Sp}(U^T B_{\tilde{C}}^{-1} U) = \operatorname{Sp}(\Lambda^{-1}) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\lambda_i} = (r - q) N \frac{1}{\sigma^2}.$$

Соответственно для следа $B_{\tilde{C}}$

$$\operatorname{Sp}(B_{\tilde{C}}) = \operatorname{Sp}(U^T B_{\tilde{C}} U) = \operatorname{Sp}(\Lambda) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i.$$

Здесь λ_i — собственные значения матрицы $B_{\tilde{C}}$. След $B_{\tilde{C}}$ достигает минимального значения при равенстве всех λ_i. Тогда

$$\frac{1}{\lambda_i} = \frac{N(r - q)}{\sigma^2 r}; \quad \lambda_i = \frac{\sigma^2 r}{N(r - q)}.$$

Таким образом, минимальные дисперсии оценок имеют величину

$$\sigma_{C_i}^2 = \frac{\sigma^2}{N} \frac{r}{r - q} = \frac{\sigma^2}{N}\left(1 + \frac{q}{r - q}\right). \tag{6}$$

Этот результат может рассматриваться как потенциальный предел точности, ибо маловероятно, что на практике реализуется весь комплекс наших предположений и оценки окажутся некоррелированными и равноточными. Эта предельная точность оказывается ниже той точности, которую можно было бы получить, привлекая к обработке эталонные (обладающие пренебрежимо малыми погрешностями) измерения. Действительно, если с помощью таких измерений исключить истинное значение исследуемого процесса, получим реализацию погрешностей

$$F^* = F - F_0 = GC + \Xi. \tag{7}$$

Из (7) можно определить оценку максимального правдоподобия вектора C с корреляционной матрицей

$$B_{\tilde{C}} = \sigma^2 (G^T G)^{-1} = \frac{\sigma^2}{N} I.$$

Соотношение (6) подтверждает целесообразность увеличения структурной избыточности k — в пределе это приводит к потенциальной точности, реализуемой с помощью «эталонных» средств.

Мы определили предельную точность для случая, когда нас интересуют в равной мере все компоненты вектора систематических погрешностей $\tilde{C}$. Найдем теперь предел точности для отдельной компоненты $\tilde{C}$. Обратимся снова к выражению (5). Диагональные элементы q_{ii} каждой из матриц проектирования Q_i удовлетворяют условию $0 \leqslant q_{jj} \leqslant 1$. Следовательно, для b_{ii}^* матрицы $B_{\tilde{C}}^{-1}$ справедливо

$$0 \leqslant b_{ii}^* \leqslant \frac{N}{\sigma^2}; \quad i = \{1, \ldots, r\}.$$

Положительно определенные матрицы $B_{\tilde{C}}$ и $B_{\tilde{C}}^{-1}$ приводятся к диагональной форме одной и той же матрицей поворота U:

$$U^T B_{\tilde{C}} U = \Lambda; \quad U^T B_{\tilde{C}}^{-1} U = \Lambda^{-1}.$$

При этом диагональные элементы $B_{\tilde{C}}$ и $B_{\tilde{C}}^{-1}$ можно представить в виде

$$b_{ii} = u_i^T \Lambda u_i; \; b_{ii}^* = u_i^T \Lambda^{-1} u_i,$$

где u_i — i-й вектор-столбец матрицы U.

Наша задача сводится к определению минимально возможной величины b_{ii}. Примем для определенности $i=1$. Представив $B_{\tilde{C}}^{-1}$ в виде окаймленной матрицы

$$B_{\tilde{C}}^{-1} = U^T \Lambda^{-1} U = \begin{pmatrix} u_1^T \Lambda^{-1} u_1 & R^T \\ R & E \end{pmatrix},$$

найдем

$$b_{11} = \frac{\det E}{\det U^T \Lambda^{-1} U}. \tag{8}$$

Используя известное свойство детерминанта окаймленной матрицы [2], получаем

$$\det U^T \Lambda^{-1} U = (u_1^T \Lambda^{-1} u_1 - R^T E^{-1} R) \det E.$$

Отсюда и из (8) $b_{11} = 1/(u_1^T \Lambda^{-1} u_1 - R^T E^{-1} R)$. Из положительной определенности $B_{\tilde{C}}$ следует $R^T E^{-1} R > 0$ и, далее, $b_{11} \geqslant 1/(u_1^T \Lambda^{-1} u_1) = 1/b_{11}^*$, откуда $b_{11} \geqslant \sigma^2/N$, т. е. для каждой из компонент вектора систематических погрешностей предельная точность совпадает с точностью, достигаемой использованием эталонных средств. К этому пределу удается существенно приблизиться, если систематические погрешности имеются не во всех средствах и это обстоятельство учтено моделью

Ранее [1, 3] рассмотрен метод структурной избыточности применительно к оцениванию только аддитивных систематических погрешностей. Выясним теперь, какие возможности дает этот метод для определения погрешностей более сложной природы, когда они содержат как аддитивную, так и мультипликативную компоненты:

$$F=F_0+GC+G^*\Theta+\Xi.$$

Здесь $G^*\Theta$ описывает мультипликативную погрешность, причем

$$G^*=\begin{pmatrix} C_1^* \\ \cdots \\ G_N^* \end{pmatrix};\quad \Theta=\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \cdots \\ \theta_r \end{pmatrix};\quad G_i^*=\begin{pmatrix} (f_1 t_i) & & \\ & \ddots & \\ & & f_r(t_i) \end{pmatrix}.$$

Прочие символы имеют прежний смысл. Объединив в один вектор параметры мультипликативной и аддитивной погрешностей, формально сводим задачу к прежней:

$$GC+G^*\Theta=(G,\ G^*)\begin{pmatrix} C \\ \Theta \end{pmatrix}.$$

Далее, используя первый метод [1], на базе вектора невязок

$$V=D(G,\ G^*)\begin{pmatrix} C \\ \Theta \end{pmatrix}+D\Xi \tag{9}$$

построим оценку максимального правдоподобия для совокупного вектора

$$\begin{pmatrix} \tilde C \\ \tilde\Theta \end{pmatrix}=[(G,\ G^*)^T D^T (DBD^T)^{-1} D(G, G^*)]^{-1}(G,\ G^*)^T D^T(DBD^T)^{-1}V.$$

Из (9) видно, что для разрешимости задачи необходима линейная независимость векторов-столбцов матрицы $D(G,\ G^*)$, образующих базис пространства параметров. Этот базис косоугольный, и добавление r новых векторов DG^*, вызванное желанием получить оценки и мультипликативных компонент, приводит к ухудшению обусловленности. Одновременное оценивание аддитивной и мультипликативной составляющих может даже оказаться невозможным. Выясним, при каких условиях это имеет место. Начнем с минимальной избыточности ($k=1$). Пусть

$$V[f_1(t),\ \ldots,\ f_r(t)]=0 - \tag{10}$$

уравнение связи. Линейная зависимость базисных векторов эквивалентна справедливости тождества

$$(\alpha_1+\beta_1 f_1(t))\frac{\partial V(t)}{\partial f_1(t)}+\cdots+(\alpha_r+\beta_r f_r(t))\frac{\partial V(t)}{\partial f_r(t)}=0 \tag{11}$$

относительно времени t при некоторых α_i, β_i, отличных от нуля. Решение линейного однородного уравнения в частных производных (11) сводится к интегрированию системы уравнений

$$\frac{d f_1}{\alpha_1+\beta_1 f_1}=\frac{d f_2}{\alpha_2+\beta_2 f_2}=\cdots=\frac{d f_r}{\alpha_r+\beta_r f_r}. \tag{12}$$

Произвольная функция Ψ $r-1$ независимых первых интегралов системы (12)

$$\Psi\left[\frac{\alpha_1+\beta_1 f_1}{(\alpha_r+\beta_r f_r)^{\frac{\beta_1}{\beta_r}}},\ \ldots,\ \frac{\alpha_{r-1}+\beta_{r-1} f_{r-1}}{(\alpha_r+\beta_r f_r)^{\frac{\beta_{r-1}}{\beta_r}}}\right] \tag{13}$$

является решением (11). Таким образом, если уравнение связи (10) может быть представлено в виде

$$V = \Psi\left[\frac{\alpha_1+\beta_1 f_1}{(\alpha_r+\beta_r f_r)\dfrac{\beta_1}{\beta_r}}, \ \ldots, \ \frac{\alpha_{r-1}+\beta_{r-1} f_{r-1}}{(\alpha_r+\beta_r f_r)\dfrac{\beta_{r-1}}{\beta_r}}\right] = 0, \qquad (14)$$

то одновременное оценивание аддитивной и мультипликативной компонент систематических погрешностей невозможно при любых реализациях измеряемых функций $f_i(t)$, $i=\{1, \ldots, r\}$. Рассмотрим для пояснения два примера.

Пример 1. В плоскости xOy движется точка M, положение которой локализуется измерением координат $x(t)$, $y(t)$ и расстояния $d(t)$ от некоторой фиксированной точки A (a, O). Результаты измерений $f_i(t)$ искажены погрешностями:

$$f_1(t) = x(t) + c_1 + \theta_1 x(t) + \xi_1(t);$$
$$f_2(t) = y(t) + c_2 + \theta_2 y(t) + \xi_2(t);$$
$$f_3(t) = d(t) + c_3 + \theta_3 d(t) + \xi_3(t).$$

Здесь c_i, θ_i, $i=\{1, \ldots, 3\}$ — систематические погрешности, $\xi_i(t)$ — случайные. Очевидное уравнение связи для любого момента времени

$$V(x, y, d) = d^2 - (x-a)^2 - y^2 = 0 \qquad (15)$$

дает невязку $V[f_1(t), f_2(t), f_3(t)] = f_3^2(t) - [f_1(t) - a]^2 - f_2^2(t)$ Легко видеть, что (15) можно представить в виде

$$\left(\frac{d}{x-a}\right)^2 - \left(\frac{y}{x-a}\right)^2 - 1 = 0,$$

что является частным случаем (14) при $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\beta_1=\beta_2=\beta_3=1$, $\alpha_3=-a$. Следовательно, оценить обе компоненты погрешностей здесь не удается, так как базисные векторы линейно зависимы. В этом можно убедиться и не прибегая к (14). В самом деле, базисные векторы образуются из частных производных (15) по измеряемым величинам и из произведений этих производных на сами измеряемые величины:

$$\varphi_1 = 2d(t); \ \varphi_2 = 2d^2(t); \ \varphi_3 = -2[x(t) - a]; \ \varphi_4 = -2x(t)[x(t) - a];$$
$$\varphi_5 = -2y(t); \ \varphi_6 = -2y^2(t).$$

Заметим, что $\varphi_2+\varphi_4-a\varphi_3+\varphi_6=0$; последнее и означает линейную зависимость базиса при любых реализациях измеряемых функций.

Покажем теперь, что уравнение связи, не приводящееся к виду (14), позволяет оценить обе компоненты систематических погрешностей.

Пример 2. Пусть в задаче примера 1 для определения положения точки M измеряются координата x, длина радиус-вектора R, проведенного из начала координат в точку M, и угол α между радиус-вектором и осью Ox. Уравнение связи для этого случая $v = x - R\cos\alpha = 0$, не приводится к виду (14). Следовательно, задача оценивания обеих составляющих систематических погрешностей в таком измерительном комплексе разрешима. В линейной независимости базиса можно убедиться и непосредственно: $\varphi_1=1$; $\varphi_2=x$; $\varphi_3=-\cos\alpha$; $\varphi_4=-R\cos\alpha$; $\varphi_5=R\sin\alpha$; $\varphi_6=\alpha R\sin\alpha$. Приводимость уравнения связи к виду (14) означает линейную зависимость базисных функций всегда, при любых реализациях измеряемых функций. Однако если (14) и не удовлетворяется, то следует подходить к решению задачи осмотрительно, так как возможны частные реализации процесса, приводящие к линейной зависимости базиса. На-пример, если траектория движения точки M в примере 2 окажется такой, что $\alpha(t) = \text{const}$, то линейная зависимость налицо. Практически вероятность реализации такой траектории может быть очень малой, но вероятность движения в некоторой ее окрестности имеет конечную величину, и задача может оказаться почти вырожденной.

Для более простой модели, в которой отсутствуют аддитивные составляющие погрешностей, выражение (14) принимает вид

$$V = \Psi \left[\frac{\beta_1 f_1}{(\beta_r f_r)^{\frac{\beta_1}{\beta_r}}}, \; \ldots, \; \frac{\beta_{r-1} f_{r-1}}{(\beta_r f_r)^{\frac{\beta_{r-1}}{\beta_r}}} \right]. \tag{16}$$

Оценки мультипликативных погрешностей можно определить, если уравнение связи не приводимо к (16). При большей избыточности ($k>1$) вероятность получения линейно зависимого базиса резко уменьшается. Действительно, для вырожденности в этом случае все тождества вида (11), соответствующие V_i, $i = \{1, \ldots, k\}$, должны удовлетворяться при одном и том же наборе коэффициентов α_i, β_i.

Таким образом, увеличение избыточности оказывается полезным как с точки зрения повышения точности, так и с точки зрения разрешимости задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Луценко, Г. П. Чейдо. Сравнение двух методов оценивания систематических погрешностей в измерительных комплексах со структурной избыточностью.— Автометрия, 1970, № 5.
2. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
3. Б. М. Пушной, Г. П. Чейдо. Метод использования структурной избыточности измерительной системы при обработке экспериментальных данных с систематическими погрешностями.— Автометрия, 1970, № 5.

Поступила в редакцию
8 июля 1970 г.