

В. А. АРБУЗОВ, В. А. ФЕДОРОВ

(Новосибирск)

### СИНТЕЗ И СВОЙСТВА ФИЛЬТРОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ, ВЫЧИСЛЯЮЩИХ ЛАПЛАСИАН

В ряде случаев при экспериментальном исследовании полей физических величин основной интерес представляет информация о координатах особых линий, точек и значений поля в них. В тех случаях, когда фактор быстродействия системы особо важен, стараются применить системы параллельного способа действия. Методы построения систем (указанного типа), способных осуществлять над исследуемыми полями

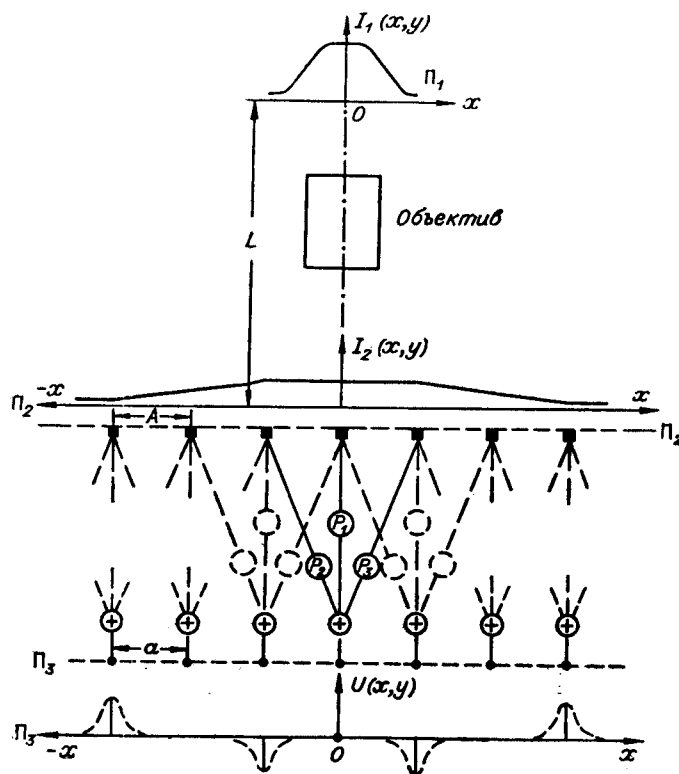


Рис. 1

лапласиан, можно выделять «контуры» изображений (полей). Оконтуривание, например, световых полей применяют в оптике [1], телевидении [2, 3], системах опознавания образов [4], в системах обработки физического эксперимента [5]. При этом качество перечисленных систем существенно улучшается. Устройства, осуществляющие эту операцию, интересны и тем, что они реализуют операцию, очень часто применяемую в математической физике. Такие устройства также могут служить основой для построения решающих устройств аналоговых вычислительных машин параллельного способа действия.

В данной работе вопрос о том, как можно создать систему параллельного способа действия, вычисляющую лапласиан, решается с позиций теории пространственной фильтрации.

Рассматриваемая задача является обобщением работы [6] и заключается в следующем. На плоскости  $\Pi_1$  (рис. 1) имеется интересное нас скалярное статическое поле  $f(x, y, z, t) = f(x, y)$  физической величины  $f$ , являющееся, например, интенсивностью  $I_1(x, y)$  излучения самосветящегося объекта (некогерентного света), т. е.  $f(x, y) = I_1(x, y)$ . На расстоянии  $L$  от плоскости  $\Pi_1$  размещена плоскость  $\Pi_2$ , на которой в некотором заданном порядке размещены фотоэлектрические приемники-датчики. Необходимо построить систему параллельного способа действия, формирующую на плоскости  $\Pi_3$  потенциальный рельеф  $U(x, y)$ , описываемый функцией  $\varphi(x, y)$ , являющейся лапласианом входного поля:

$$U(x, y) = \varphi(x, y) = \frac{\partial^2 I_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I_1(x, y)}{\partial y^2}.$$

Такая задача может быть решена с помощью системы, изображенной на рис. 1\*. Система составлена из воронкообразных взаимно перекрывающихся звеньев. В вершинах лучей (на  $\Pi_2$ ) находятся линейные фотоэлектрические датчики, электрические потенциалы которых суммируются с некоторыми весами  $p_i$  в узле воронки. Воронки относительно друг друга размещаются так, что против каждого фотоприемника находится по одному (на  $\Pi_3$ ) тонкому потенциальному электроду, идущему от вершины (сумматора) воронки. Условимся рассматривать такую систему как двумерный фильтр пространственных частот с дискретным по плоскости  $\Pi_2$  характером восприятия входного воздействия\*\*. Пространственно-частотная характеристика (ПЧХ) такого фильтра зависит от числа лучей в воронке, относительного положения фотоприемников (а следовательно, и лучей воронки), а также от значений весовых коэффициентов. Применяя метод пространственной фильтрации, можно осуществить частичный синтез такой системы, т. е. решить задачу синтеза по отношению к части параметров, а именно весовых коэффициентов  $p_i$  и координат фотоприемников воронки (при условии, что другие параметры заданы).

Процедура синтеза включает в себя несколько этапов.

**Определение ПЧХ идеального фильтра пространственных частот, вычисляющего лапласиан.** Введем обозначения:  $\omega_x$  и  $\omega_y$  — простран-

\* Для простоты на рис. 1 изображен одномерный вариант рассматриваемой системы.

\*\* Здесь и далее предполагается, что между плоскостями  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  помещен объектив, переносящий изображение  $I_1(x, y)$  с плоскости  $\Pi_1$  на плоскость  $\Pi_2$ , т. е. предполагается, что  $I_2(x, y) = KI_1(kx, ky)$ , где  $K, k$  — масштабные коэффициенты.

ственные частоты по направлениям осей координат  $ox$  и  $oy$  с размерностью  $rad/m$ ;  $\dot{G}_1(\omega_x, \omega_y)$  — комплексный пространственнo-частотный «спектр» входного (плоскость  $\Pi_2$ ) сигнала  $I_2(x, y)$ ;  $\dot{G}_4(\omega_x, \omega_y)$  — спектр выходного (плоскость  $\Pi_3$ ) сигнала  $U(x, y)$  системы;  $\dot{H}_0(\omega_x, \omega_y)$  — ПЧХ идеального фильтра.

Справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_4(\omega_x, \omega_y) e^{j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \dot{G}_1(\omega_x, \omega_y) e^{j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -(\omega_x^2 + \omega_y^2) \dot{G}_1(\omega_x, \omega_y) e^{j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy; \end{aligned}$$

$$\dot{G}_4(\omega_x, \omega_y) = \dot{H}_0(\omega_x, \omega_y) \dot{G}_1(\omega_x, \omega_y) = -(\omega_x^2 + \omega_y^2) \dot{G}_1(\omega_x, \omega_y).$$

Следовательно,  $\dot{H}_0(\omega_x, \omega_y) = -(\omega_x^2 + \omega_y^2) = \omega^2 e^{j\pi}$ . График нормированной  $\dot{H}(\omega_x, \omega_y)$  (по отношению к  $\dot{H}_0(\omega_m)$ ) пространственнo-частотной характеристики идеального в заданной полосе частот ( $0 \div \omega_m$ ) фильтра изображен ниже (см. кривую и на рис. 4)

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_m^2} e^{j\pi}.$$

**Определение весовой функции  $h_0(x, y)$  идеального фильтра.** В силу круговой симметрии функции  $\dot{H}_0(\omega_x, \omega_y)$  имеем

$$\begin{aligned} h_0(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{H}_0(\omega_x, \omega_y) e^{j(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y = \\ &= \int_0^{\infty} \dot{H}_0(\omega) J_0(\omega r) \omega d\omega, \end{aligned}$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $J_i$  — функция Бесселя первого рода  $i$ -го целого порядка. Нормированная весовая функция равна

$$\begin{aligned} h(r) &= \frac{\int_0^{\infty} \dot{H}_0(\omega) J_0(\omega r) \omega d\omega}{\left| \int_0^{\infty} \dot{H}_0(\omega) \omega d\omega \right|} = \\ &= -4 \frac{J_1(\omega_m r)}{\omega_m r} - 8 \frac{J_0(\omega_m r)}{(\omega_m r)^2} + 16 \frac{J_1(\omega_m r)}{(\omega_m r)^3}. \end{aligned}$$

График функции  $h(r)$  представлен на рис. 2. Между функциями  $H(\omega)$  и  $h(r)$  существует следующая связь:

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\omega_m^2}{4} \int_0^{\infty} h(r) r J_0(\omega r) dr.$$

**Определение ПЧХ системы с «усеченной» весовой функцией.** Физически реализовать систему с весовой функцией  $h(r)$  невозможно. В связи с этим рассмотрим физически реализуемые системы, имеющие дискретные весовые функции, которые функционально связаны с  $h(r)$ .

А. Вычислим «вес» (объем)  $P_0$  центрального лепестка функции  $h(r)$ . Аппроксимируя этот лепесток функцией  $\cos \frac{\omega_M r}{2}$ , которая определена на интервале  $|r| \leq \frac{\pi}{\omega_M}$ , имеем

$$P_1 = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{\omega_M}} r \cos \frac{\omega_M r}{2} dr = 4 \frac{2\pi}{\omega_M^2} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

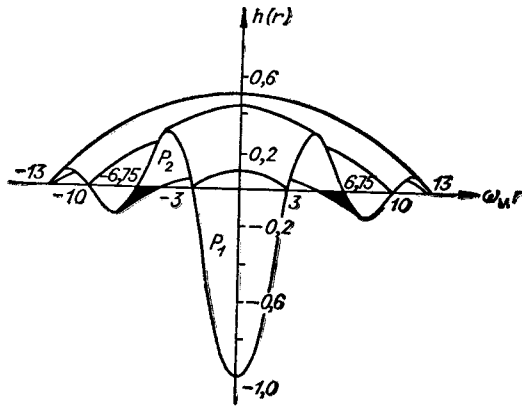


Рис. 2.

Сосредоточим вес  $P_1 = 0,46 P_0$  в точке  $r=0$ . Вес  $P_2$  второго лепестка будем считать равным  $P_1$ . Распределим  $P_2$  по очень узкому кольцу с радиусом  $a = \frac{4,5}{\omega_M}$ . В результате будет получена «коаксиальная» весовая функция  $h_k(r)$  (рис. 3, а). Пространственночастотная характеристика  $H_k(\omega)$  такой системы изображена на рис. 4 (кривая к). Она так же, как и функция  $H(\omega)$ , имеет круговую симметрию. Аналитические выражения этих функций имеют вид:

$$h_k(r) = P_1 \left[ -\delta_1(r-0) + \frac{1}{2\pi a} \delta_1(r-a) \right];$$

$$\delta_1(r-c) = \begin{cases} 1 & \text{при } r=c; \\ 0 & \text{при } r \neq c; \end{cases}$$

$$H_k(\omega) = -\frac{\omega_M^2}{4} P_1 \int_0^{\infty} r \delta_1(r-0) I_0(\omega r) dr + \frac{\omega_M^2}{8\pi a} P_1 \int_0^{\infty} I_0(\omega r) \delta_1(r-a) dr = 0,254 \left[ 1 - I_0\left(\frac{4,5\omega}{\omega_M}\right) \right].$$

Б. Сосредоточим вес сформированного цилиндра в четырех равноотстоящих друг от друга точках несущего кольца (см. рис. 3, б). Прделав это, мы получаем «решетчатую» пятиэлементную весовую функцию  $h_5(r)$ , каждый элемент которой и есть искомый вес лучей воронок (см. рис. 3, б):

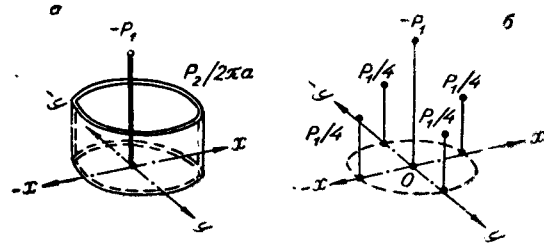


Рис. 3.

$$h_5(r) = \frac{P_1}{4} [4 - \delta_1(x-a, y-0) - \delta_1(x-0, y-a) - \delta_1(x+0, y+a) - \delta_1(x+a, y-0)]; \quad (1)$$

$$H_5(\omega_x, \omega_y) = 0,063 \left[ 4 - 2\cos \frac{4,5 \omega_x}{\omega_M} - 2\cos \frac{4,5 \omega_y}{\omega_M} \right],$$

где  $a = \frac{4,5}{\omega_M}$ . Заметим, что создать систему с «решетчатой» весовой функцией  $h_5(r)$  можно. Ее параметры выбираются исходя из знания в конечном счете функции  $h(x, y)$ . Графики функции  $H_5(\omega)$  вдоль выделенных направлений  $\omega$  представлены на рис. 4, а. Из этого рисунка видно, что система, составленная из пятилучевых воронок, обладает существенной неизотропностью ПЧХ, т. е. такое устройство будет не инвариантно к поворотам (относительно «оптической» оси системы) входного воздействия.

Действуя аналогичным образом, получим весовые функции  $h_i(x, y)$  и соответствующие им пространственочастотные характеристики  $H_i(\omega_x, \omega_y)$  систем, составленных из воронок с 7 и 9 лучами:

$$h_7(x, y) = \frac{P_1}{6} [6 - \delta_1(x-a, y-0) - \delta_1\left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) - \delta_1\left(x - \frac{a}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) - \delta_1(x+a, y+0)]$$

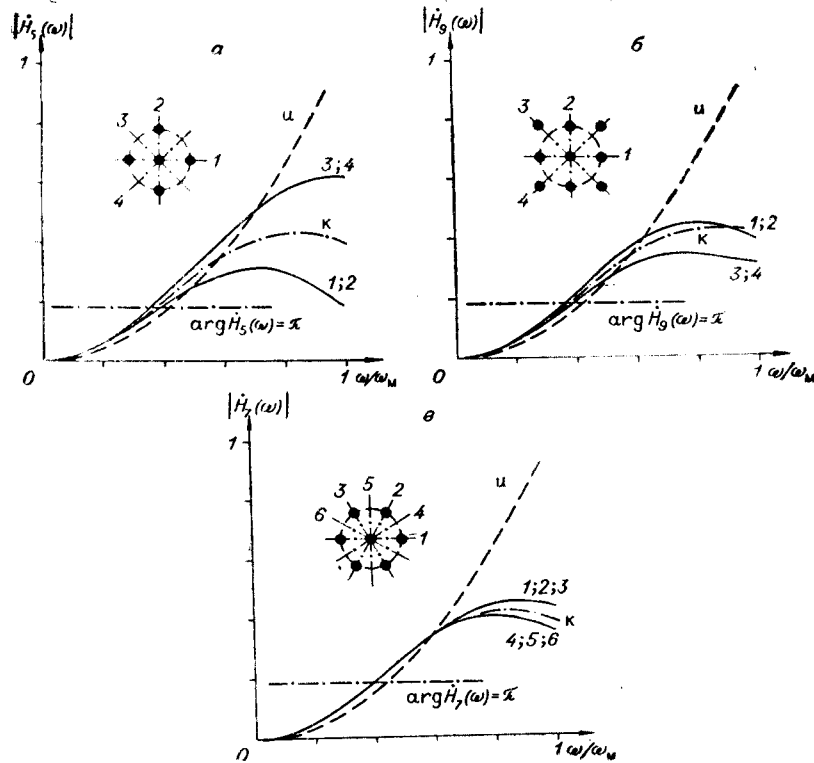


Рис. 4.

$$\begin{aligned}
 & -\delta_1\left(x + \frac{a}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) - \delta_1\left(x - \frac{a}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right); \\
 H_7(\omega_x, \omega_y) = & -0,042 \left[ 6 - 2\cos \frac{4,5\omega_x}{\omega_M} - 2\cos\left(\frac{\omega_x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_y\right) \frac{4,5}{\omega_M} \right. \\
 & \left. - 2\cos\left(\frac{\omega_x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_y\right) \frac{4,5}{\omega_M} \right]; \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_9(x, y) = & -\frac{P_1}{8} [8 - \delta_1(x - b, y - 0) - \delta_1(x - 0, y - b) - \\
 & - \delta_1(x + b, y + 0) - \delta_1(x + 0, y + b) - \delta_1(x - b_1, y - b) - \delta_1(x + b, y - b) - \\
 & - \delta_1(x + b, y + b) - \delta_1(x - b, y + b)]; \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_9(\omega_x, \omega_y) = & 0,031 [8 - 2(\cos \omega_x b + 2\cos \omega_x b \cos \omega_y b + \cos \omega_y b)], \\
 \text{где } a = & \frac{4,5}{\omega_M}; b = \frac{3,9}{\omega_M}.
 \end{aligned}$$

Сопоставляя соотношения (1)–(3) и соответствующие им графики (см. рис. 4, а, б, в), можно видеть, что применение семилучевых воронок открывает возможность построения фильтра, у которого в полосе  $|\omega| \leq 0,6 \omega_M$  ПЧХ изотропна и практически совпадает с ПЧХ идеальной системы. При одинаковых полосах частот, в пределах которых вычисляется лапласиан, число используемых в системе датчиков меньше, чем в случае с 9-элементными воронками.

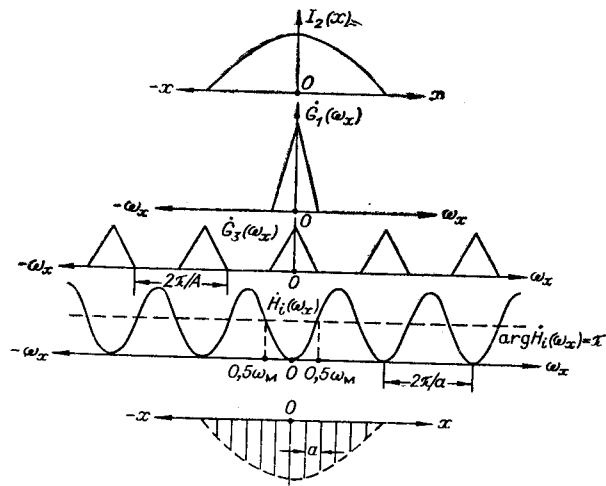


Рис. 5.

дискретный по пространству характер «считывания» входного сигнала оказывает дополнительное фильтрующее действие. Поясним эту мысль на примере с одномерным фильтром (рис. 5).

Фотоприемники осуществляют формирование выборок входного сигнала, образуя его решетчатую функцию. Спектр  $\hat{G}_3(\omega_x, \omega_y)$  этой функции есть свертка спектра  $\hat{G}_1(\omega_x, \omega_y)$  входного сигнала и спектра  $\hat{G}_2(\omega_x, \omega_y)$  единичной (с периодом  $A$  следования фотоприемников) решетчатой функции

$$\hat{G}_2(\omega_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}_1(\nu) \hat{G}_2(\nu - \omega_x) d\nu.$$

Спектр  $\hat{G}_3(\omega_x)$  представляет собой периодическую (с периодом  $1/A$ ) по оси частот  $\omega_x$  последовательность функций  $\hat{G}_1(\omega_x)$ . Размноженный в результате дискретного по пространству характера считывания спектр  $\hat{G}_1(\omega_x)$  далее фильтруется континуальной средой. В результате спектр  $\hat{G}_4(\omega_x)$  выходного сигнала всей системы (например, для случая 7-лучевых воронок) равен

$$\hat{G}_4(\omega_x) = \hat{G}_3(\omega_x) \hat{H}_7(\omega_x).$$

Этому спектру соответствует сигнал

$$U_d(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \varphi(x) \delta_1(x - kA), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

являющийся решетчатой функцией искомого лапласиана  $\varphi(x)$ . Сказанное иллюстрируется (для случая  $I_1(x) = \cos x$ ) рис. 5. В двумерном случае имеют место аналогичные явления.

Таким образом, для построения оптоэлектрического фильтра пространственных частот, обладающего изотропной ПЧХ, рекомендуется применять фотоматрицы, элементы которой расположены в точках пересечения 3 систем параллельных линий, следующих с шагом  $\frac{\sqrt{3}}{2} a (\omega_{\text{м вх}}) = \frac{0.375}{f_{\text{м вх}}}$  и повернутых относительно друг друга на угол

$60^\circ$  (рис. 6). Трудности реализации, обусловленные значительными раз-

мерами выпускаемых в настоящее время фотоприемников, частично могут быть ослаблены путем размещения перед фотоматрицей приемлемых размеров объектива, осуществляющего перенос и увеличение изображения  $I_1(x, y)$  с плоскости  $\Pi_1$  на плоскость  $\Pi_2$ .

В отличие от оптических когерентных систем обработки информации рассмотренная система не требует предварительного изготовления фотодиапозитива исследуемого поля  $I_1(x, y)$ .

В заключение отметим, что изложенная выше спектральная методика, использующая понятие о континуальной среде, позволяет дополнительно к рекомендациям, даваемым теорией конечных разностей, указать шаг  $A (\omega_{\text{м вх}})$  следования фотоприемников в строгом соответствии с шириной спектра входного сигнала, а также оценить влияние изменений весов лучей, шага выборок и общего характера распределения фотоприемников.

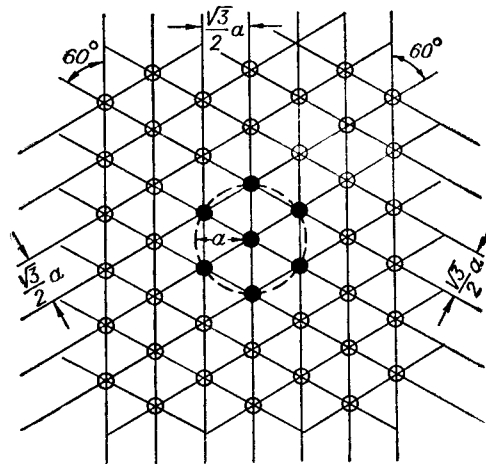


Рис. 6.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Ф. Савосина и др. Применение электронного оконтуривания для улучшения различимости колец Френеля.— Оптика и спектроскопия, 1964, № 17.
2. Д. Г. Лебедев, Д. С. Лебедев. Дискретизация изображения посредством выделения и квантования контуров.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1965, № 1.

3. Грехем. Передача изображений посредством кодирования двумерных контуров.— ТИИЭР, 1967, т. 55, № 3.
4. В. П. Романов. Система распознавания, использующая анизотропную фильтрацию изображений.— В сб. «Автоматическое чтение текста». М., ВИНТИ, 1967.
5. Л. Плесс и др. Прецизионное кодирование и система опознавания образов.— Труды XII Международной конференции по физике высоких энергий. Дубна, 1964.
6. В. А. Арбузов, Я. М. Диковский, В. А. Федоров. Анализ системы дистанционного сбора информации о второй производной пространственных сигналов.— Автометрия, 1970, № 1.
7. Я. М. Диковский, В. А. Федоров. О пространственнoчастотной характеристике ретиноподобных фильтров пространственных частот.— Автометрия, 1968, № 6.

*Поступила в редакцию  
2 июля 1970 г.*