

В. И. ЛЕВИН

(Рига)

**ТОЧНОСТЬ ЦИФРОВОГО ИЗМЕРИТЕЛЯ
 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ДЕСЯТИЧНОГО СЧЕТА**

Рассмотрим цифровой измерительный прибор (ЦИП) последовательного счета [1], работающий при действии помех на элементы цифровой части. Основной источник погрешности прибора, связанной с действием помех,— счетчик числа импульсов, пропорционального измеряемой величине. В [2] исследовалась погрешность ЦИП с двоичным счетчиком. В ЦИП широко применяются и десятичные счетчики. В связи с этим в данной работе подробно исследуется точность ЦИП с десятичным счетчиком.

1. Математическая модель погрешности в десятичном счетчике. Блок-схема n -разрядного десятичного счетчика показана на рис. 1. Каждый разряд счетчика (декада) представляет собой конечный автомат с 10 внутренними состояниями 0, 1, ..., 9. Под действием последовательности единичных импульсов декада совершает циклические переходы: $0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow 9 \rightarrow 0$ и т. д., причем при переходе $9 \rightarrow 0$ с ее выхода снимается единичный импульс, являющийся входным для следующей декады. Благодаря этому код состояния счетчика, образуемый как набор состояний декад, показывает число t поданных на вход счетчика импульсов. При этом последовательность входных импульсов заставляет счетчик совершать циклические переходы $0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow 99 \dots 9 = 10^n - 1 \rightarrow 0$ и т. д. так, что максимальное подсчитываемое

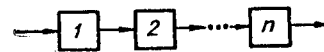


Рис. 1. Блок-схема n -разрядного десятичного счетчика:

1, 2, ..., n — декады.

n
 число входных импульсов равно $10^n - 1$. Декада строится из четырех триггеров (рис. 2) с обратной связью с четвертого триггера на второй

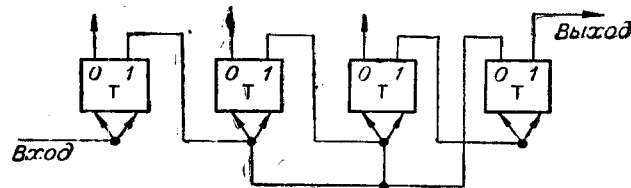


Рис. 2. Структурная схема счетной декады.

и третий. Код состояния декады понимается как набор состояний триггеров. Переводя эти двоичные коды в их десятичные эквиваленты, можно изобразить граф переходов декады, как указано на рис. 3. Благодаря наличию обратной связи часть состояний декады (а именно с 8-го по 13-е) оказывается недостижимой, а в остальных десяти состояниях совершаются указанные выше циклические переходы.

Работа декады удобно описывается графически следующим образом (рис. 4). Начиная с момента поступления первого импульса на вход все-

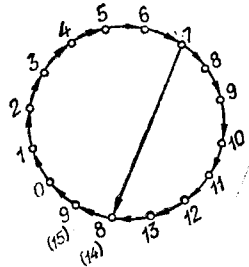


Рис. 3. Граф переходов декады (жирно выделены разрешенные состояния и переходы между ними).

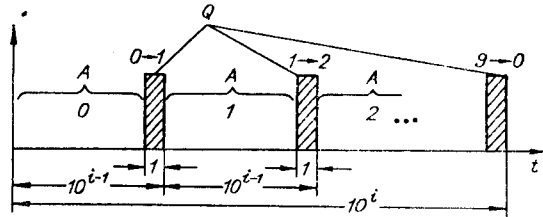


Рис. 4. График работы i -й декады: Q — такты счета; A — интервалы хранения информации

го счетчика i -я декада работает последовательно: 1) в течение $10^{i-1} - 1$ тактов в режиме хранения начального числа 0 (здесь и далее предполагается, что начальное показание счетчика нуль), 2) в течение 1-го такта в режиме счета, 3) в течение $10^{i-1} - 1$ тактов в режиме хранения числа 1, 4) в течение 1-го такта в режиме счета, 5) в течение $10^{i-1} - 1$ тактов в режиме хранения числа 2 и т. д. При этом имеется существенное различие функционирования n -й и остальных декад. Оно состоит в том, что 1-я, 2-я, ..., $(n-1)$ -я декады при переходе 9→0 выдают импульс в следующую декаду (перенос единицы в старший разряд), в то время как из n -й декады такого переноса не происходит.

Ненадежная работа счетчика под действием помех задается следующим образом: i -й ($i = 1, 2, 3, 4$) триггер любой декады за один такт (импульс на входе счетчика) ошибается с вероятностью β_i , независимо от своего состояния и работы на других тактах. Ошибки различных триггеров считаются независимыми. Вероятности β_i считаются достаточно малыми, для того чтобы можно было пренебречь вероятностями кратных ошибок. Следствием ошибок триггеров является погрешность показаний счетчика.

Обозначим через $E_i(t)$ погрешность i -го разряда (i -й декады) без учета его веса и за t импульсов на входе счетчика. Общая погрешность счетчика за t импульсов на его входе с учетом весов разрядов составляет

$$E(t) = \sum_{i=1}^n E_i(t) 10^{i-1}. \quad (1)$$

Слагаемые правой части (1) случайны и независимы (в силу независимости ошибок триггеров). Поэтому для математического ожидания $\Delta(t)$ и среднеквадратического отклонения $\sigma(t)$ погрешности счетчика можно записать так:

$$\Delta t = \Delta'(t) + \Delta_n(t) 10^{n-1}; \quad (2)$$

$$\sigma^2(t) = \sigma'^2(t) + \sigma_n^2(t) 10^{2n-2}. \quad (3)$$

Здесь $\Delta_i(t)$, $\sigma_i(t)$ — математическое ожидание и среднеквадратическое погрешности i -го разряда (без учета его веса);

$$\Delta'(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta_i(t) 10^{i-1}; \quad (4)$$

$$\sigma'^2(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i^2(t) 10^{2i-2} \quad (5)$$

— составляющие математического ожидания и среднеквадратического погрешности счетчика, вносимые $n - 1$ первыми разрядами.

На основании графического описания работы декады (см. рис. 4) и с учетом независимости ошибок на различных тактах справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Delta_i(t) = & (10^{i-1} - 1) \left[\sum_{j=0}^9 \Delta_{xpj} B_Q(i, j, t) \right] + \\ & + \sum_{j=0}^9 \Delta_{cyj} B_Q(i, j, t) + \Delta_{xp0} B_A(i, t); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_i^2(t) = & (10^{i-1} - 1) \left[\sum_{j=0}^9 \sigma_{xpj}^2 B_Q(i, j, t) \right] + \\ & + \sum_{j=0}^9 \sigma_{cyj}^2 B_Q(i, j, t) + \sigma_{xp0}^2 B_A(i, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь Δ_{xpj} и σ_{xpj} — математическое ожидание и среднеквадратическое погрешности декады, которая, отправляясь из начального состояния j , проработала один такт в режиме хранения информации; Δ_{cyj} и σ_{cyj} — то же для режима счета; $B_Q(i, j, t)$ — число тактов Q на отрезке $[1, t]$ таких, что на них i -й разряд счетчика совершает переход из состояния j ; $B_A(i, t)$ — число тактов типа A при условии $B_Q(i, j, t) = 0$ для всех j .

Как показывают формулы (2)–(7), подсчет статистических характеристик $\Delta(t)$ и $\sigma(t)$ погрешности десятичного счетчика за t тактов требует нахождения статистических характеристик однотоковой погрешности декады в каждом из следующих четырех режимов: 1) счет с переносом, 2) хранение информации с переносом, 3) счет без переноса, 4) хранение информации без переноса.

2. Погрешность декады в режиме счета с переносом. В этом режиме на вход декады поступает последовательность единичных импульсов, в результате чего декада при отсутствии ошибок совершает переходы по циклу $0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 0 \rightarrow 1$ и т. д. (см. рис. 3). Наша задача — нахождение математического ожидания Δ_{cyj} и среднеквадратического σ_{cyj} погрешности однотокового перехода из состояния j . С этой целью используем рис. 2, 3.

Ошибка в триггере T_1 в режиме счета означает несрабатывание этого триггера. В результате такой ошибки декада остается в прежнем состоянии вместо того, чтобы, согласно графу переходов (см. рис. 3), перейти в следующее по циклу состояние. При наличии переноса из данной декады в следующую последовательность чисел, соответствующая последовательности состояний декады, такова: $0, 1, 2, \dots, 9, 10, 11, \dots$. Поэтому ошибка триггера T_1 ведет к погрешности — 1 независимо от состояния декады.

Ошибка в триггере T_2 приводит к погрешности $+2$ для тех состояний декады (0, 2, 4, 6, 8), при переходе из которых T_2 должен опрокинуться, и к погрешности -2 для состояний (1, 3, 5, 7, 9), при переходе из которых T_2 должен остаться в прежнем положении. В справедливости сказанного можно убедиться непосредственным построением диаграммы одноктактовых переходов из различных состояний декады с учетом ошибки в T_2 . Например, для состояния $0 = (0\ 0\ 0\ 0)$ эта диаграмма имеет вид (состояние T_2 , в котором совершена ошибка, подчеркнуто)

$$0 = 0000 \rightarrow \underline{1}000 \rightarrow 1100 = 3. \quad (8)$$

Поскольку нормально в результате перехода из состояния 0 декада должна перейти в состояние 1, погрешность равна $3-1=2$. Диаграммы переходов из других состояний декады аналогичны выписанной. Исключение которого T_2 составляет переход $7 \rightarrow 8$, во время которого T_2 должен сработать дважды: вначале от импульса, исходящего из T_1 , а затем от импульса, пришедшего из T_4 по цепи обратной связи. В зависимости от того, когда T_2 ошибется — при первом или втором срабатывании, — декада приходит в различные состояния:

$$7 = \underline{1}110 \begin{cases} \nearrow 0110 = 6; \\ \searrow \underline{0}001 \rightarrow 0011 = 12. \end{cases} \quad (9)$$

Однако независимо от этого (см. рис. 3) через два такта декада оказывается в одном и том же состоянии 8. А так как нормально в этот момент она должна находиться в состоянии 0 (с переносом единицы в следующую декаду), погрешность равна $8-10=-2$.

Ошибка в триггере T_3 ведет к погрешности $+4$ для тех состояний декады (0, 1, 2, 4, 5, 6, 8), при переходе из которых T_3 должен опрокинуться, и к погрешности -4 для состояний (3, 7, 9), при переходе из которых T_3 остается в прежнем положении. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно, как и выше, построить диаграммы одноктактовых переходов из различных состояний декады при наличии ошибки в T_3 . Наиболее сложная диаграмма (разветвленная) аналогична (9) и соответствует переходу из состояния 7, когда T_3 должен сработать дважды — первый раз от импульса из T_2 , а второй — от импульса из T_4 , пришедшего по цепи обратной связи:

$$7 = \underline{1}110 \begin{cases} \nearrow 0010 = 4; \\ \searrow \underline{0}001 \rightarrow 0101 = 10. \end{cases} \quad (10)$$

Но независимо от того, какая из ветвей диаграммы (10) реализуется, через четыре такта после этого декада оказывается в состоянии 8. А поскольку в отсутствие ошибки T_3 она в этот момент должна находиться в состоянии 2 (при единице, перенесенной в следующую декаду), то погрешность равна $8-2-10=-4$.

Ошибка в триггере T_4 действует аналогично ошибкам в предыдущих триггерах. Она дает погрешность 8 при тех состояниях декады (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8), переход из которых требует опрокидывания T_4 , и погрешность -8 для остальных состояний (7, 9). Например, переход из состояния 3 при ошибке T_4 описывается диаграммой

$$3 = 1100 \rightarrow 001\underline{0} \rightarrow 0011 \rightarrow 0101 \rightarrow 0100 = 2 + 1 \quad \text{в следующую декаду,} \quad (11)$$

так что $2 + 10 - 4 = 8$.

Искомое математическое ожидание $\Delta_{\text{сч } j}$ и среднеквадратическое $\sigma_{\text{сч } j}$ выражаются

$$\Delta_{\text{сч } j} = \sum_{i=1}^4 \beta_i e_{ij}; \quad \sigma_{\text{сч } j}^2 = \sum_{i=1}^4 \beta_i e_{ij}^2, \quad (11a)$$

где e_{ij} — погрешность при переходе из j -го состояния декады вследствие ошибки триггера T_i . Используя найденные выше значения e_{ij} , получим:

$$\Delta_{\text{сч } j} = \begin{cases} -\beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3 + 8\beta_4; & j = 0, 2, 4, 6, 8; \\ -\beta_1 - 2\beta_2 + 4\beta_3 + 8\beta_4; & j = 1, 5; \\ -\beta_1 - 2\beta_2 - 4\beta_3 + 8\beta_4; & j = 3; \\ -\beta_1 - 2\beta_2 - 4\beta_3 - 8\beta_4; & j = 7, 9; \end{cases} \quad (12)$$

$$\sigma_{\text{сч } j}^2 = \sigma_{\text{сч}}^2 = \sum_{i=1}^4 2^{2i-2} \beta_i. \quad (13)$$

Таким образом, среднеквадратическое погрешности в отличие от математического ожидания не зависит от состояния декады.

3. Погрешность декады в режиме хранения с переносом. В этом режиме импульсы на вход декады не поступают. Поэтому в идеальном случае декада все время находится в одном и том же состоянии, которое соответствует хранимому числу. В такой ситуации ошибки триггеров могут быть только вида «ложное опрокидывание». Следствием таких ошибок при наличии переноса из данной декады в следующую является увеличение хранимого числа. Величина погрешности хранения в зависимости от хранимого числа и номера ошибающегося триггера получается при помощи диаграмм переходов (п. 2). При этом получается, что независимо от хранимого числа ошибка в триггере T_1 дает погрешность 1, ошибка в триггере T_2 — погрешность 2, ошибка в триггере T_3 — погрешность 4 и ошибка в триггере T_4 — погрешность 8. Отсюда для математического ожидания и среднеквадратического погрешности хранения в декаде в течение одного такта числа j получим [по формулам типа (11)]:

$$\Delta_{\text{хр } j} = \Delta_{\text{хр}} = \sum_{i=1}^4 2^{i-1} \beta_i; \quad (14)$$

$$\sigma_{\text{хр } j}^2 = \sigma_{\text{хр}}^2 = \sum_{i=1}^4 2^{2i-2} \beta_i. \quad (15)$$

Видим, что статистические характеристики погрешности хранения не зависят от хранимого в декаде числа.

4. Погрешность декады в режиме счета без переноса. В отличие от режима счета с переносом (п. 2) здесь переход декады $9 \rightarrow 0$ не ведет к посылке единицы в следующую декаду. В связи с этим состояние 9, а также все состояния, сочетания которых с ошибками триггеров приводят формально к ситуации переноса, оказываются в особом положении. Именно, при переходах декады из перечисленных состояний ошибки триггеров ведут к погрешности, отличной от указанной в п. 2. Количественный анализ, выполненный при помощи диаграмм переходов, показывает следующее.

Ошибка триггера T_1 приводит к погрешностям: —1 для состояний декады 0, 1, ..., 8 и 9 для состояния 9. Ошибка триггера T_2 приводит к погрешностям: 2 для состояний 0, 2, 4, 6; —2 для состояний 1, 3, 5, 7; —8 для состояния 8; 8 для состояния 9. Ошибка триггера T_3 дает погрешности:

4 для состояний 0, 1, 2, 4; 6 для состояния 9; —4 для состояний 3, 7; —6 для состояний 5, 6, 8. Ошибка триггера T_4 вызывает погрешности: —2 для состояний 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8; 8 для состояния 0; 2 для состояния 9; —8 для состояния 7.

Отсюда по формулам (11) находим:

$$\Delta_{сч j} = \begin{cases} -\beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3 + 8\beta_4; & j = 0; \\ -\beta_1 - 2\beta_2 + 4\beta_3 - 2\beta_4; & j = 1; \\ -\beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3 - 2\beta_4; & j = 2, 4; \\ -\beta_1 - 2\beta_2 - 4\beta_3 - 2\beta_4; & j = 3; \\ -\beta_1 - 2\beta_2 - 6\beta_3 - 2\beta_4; & j = 5; \\ -\beta_1 + 2\beta_2 - 6\beta_3 - 2\beta_4; & j = 6; \\ -\beta_1 - 2\beta_2 - 4\beta_3 - 8\beta_4; & j = 7; \\ -\beta_1 - 8\beta_2 - 6\beta_3 - 2\beta_4; & j = 8; \\ 9\beta_1 + 8\beta_2 + 6\beta_3 + 2\beta_4; & j = 9; \end{cases} \quad (16)$$

$$\sigma_{сч j}^2 = \begin{cases} \beta_1 + 4\beta_2 + 16\beta_3 + 64\beta_4; & j = 0, 7; \\ \beta_1 + 4\beta_2 + 16\beta_3 + 4\beta_4; & j = 1, 2, 3, 4; \\ \beta_1 + 4\beta_2 + 36\beta_3 + 4\beta_4; & j = 5, 6; \\ \beta_1 + 64\beta_2 + 36\beta_3 + 4\beta_4; & j = 8; \\ 81\beta_1 + 64\beta_2 + 36\beta_3 + 4\beta_4; & j = 9. \end{cases} \quad (17)$$

Видно, что в отличие от режима счета с переносом здесь среднеквадратическое погрешности зависит от состояния декады.

5. Погрешность декады в режиме хранения без переноса. По сравнению с режимом хранения с переносом здесь имеется следующая особенность. Все сочетания хранимых чисел с ошибками триггеров, которые приводят формально к ситуации переноса, вызывают погрешность, отличную от указанной в п. 3. Анализ при помощи диаграмм переходов приводит к следующему.

Ошибка триггера T_1 дает погрешность 1 при хранимых числах 0, 1, ..., 8 и —9 при числе 9. Ошибка триггера T_2 дает погрешность 2 при хранимых числах 0, 1, ..., 7 и —8 при числах 8, 9. Ошибка триггера T_3 ведет к погрешности 4 для хранимых чисел 0, 1, ..., 5 и —6 для чисел 6, 7, 8, 9. Ошибка триггера T_4 ведет к погрешности 8 для хранимых чисел 0, 1 и —2 для чисел 2, 3, ..., 9.

Отсюда по формулам вида (11) найдем:

$$\Delta_{хр j} = \begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3 + 8\beta_4; & j = 0, 1; \\ \beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3 - 2\beta_4; & j = 2, 3, 4, 5; \\ \beta_1 + 2\beta_2 - 6\beta_3 - 2\beta_4; & j = 6, 7; \\ \beta_1 - 8\beta_2 - 6\beta_3 - 2\beta_4; & j = 8; \\ -9\beta_1 - 8\beta_2 - 6\beta_3 - 2\beta_4; & j = 9; \end{cases} \quad (18)$$

$$\sigma_{хр j}^2 = \begin{cases} \beta_1 + 4\beta_2 + 16\beta_3 + 64\beta_4; & j = 0, 1; \\ \beta_1 + 4\beta_2 + 16\beta_3 + 4\beta_4; & j = 2, 3, 4, 5; \\ \beta_1 + 4\beta_2 + 36\beta_3 + 4\beta_4; & j = 6, 7; \\ \beta_1 + 64\beta_2 + 36\beta_3 + 4\beta_4; & j = 8; \\ 81\beta_1 + 64\beta_2 + 36\beta_3 + 4\beta_4; & j = 9. \end{cases} \quad (19)$$

6. Общая погрешность счетчика. Для нахождения статистических характеристик $\Delta_i(t)$, $\sigma_i^2(t)$ погрешности одного разряда счетчика

остается вычислить коэффициенты B_{\dots} в (6), (7). Полагаем, что время описывается выражением

$$t = 10^r; \quad r = 0, 1, \dots \quad (20)$$

Согласно рис. 4,

$$B_A(i, t) = \begin{cases} t; & t \leq 10^{i-1} - 1; \\ 0; & t \geq 10^{i-1}; \end{cases} \quad (21)$$

$$B_Q(i, j, t) = \begin{cases} t/10^i; & t \geq 10^i; \\ 1; & t = 10^{i-1}; j = 0; \\ 0; & t = 10^{i-1}; j \geq 1 \text{ или } t \leq 10^{i-2}. \end{cases} \quad (22)$$

Подставляя выражения (21), (22) в правые части (6), (7), получим

$$\Delta_i(t) = \begin{cases} (10^{i-1} - 1) \left[\frac{t}{10^i} \left[\sum_{j=0}^9 \Delta_{xp j} + \right] \right] \frac{t}{10^i} \left[\sum_{j=0}^9 \Delta_{сч j}; & t \geq 10^i; \\ (10^{i-1} - 1) \Delta_{xp 0} + \Delta_{сч 0}; & t = 10^{i-1}; \\ t \Delta_{xp 0}; & t \leq 10^{i-2}; \end{cases} \quad (23)$$

$$\sigma_i^2(t) = \begin{cases} (10^{i-1} - 1) \left[\frac{t}{10^i} \left[\sum_{j=0}^9 \sigma_{xp j}^2 + \right] \right] \frac{t}{10^i} \left[\sum_{j=0}^9 \sigma_{сч j}^2; & t \geq 10^i; \\ (10^{i-1} - 1) \sigma_{xp 0}^2 + \sigma_{сч 0}^2; & t = 10^{i-1}; \\ t \sigma_{xp 0}^2; & t \leq 10^{i-2}. \end{cases} \quad (24)$$

Суммы в (23), (24) вычислены с помощью формул (12)–(19) и сведены в таблицу.

Сумма	Режим с переносом $i = 1, \dots, n-1$	Режим без переноса $i = n$
$\sum_{j=0}^9 \Delta_{xp j}$	$\sum_{i=1}^4 2^{i-1} \beta_i$	0
$\sum_{j=0}^9 \Delta_{сч j}$	$-10 \beta_1 + 16 \beta_3 + 48 \beta_4$	$-4 \beta_3 - 12 \beta_4$
$\sum_{j=0}^9 \sigma_{сч j}^2 = \sum_{j=0}^9 \sigma_{xp j}^2$	$\sum_{i=1}^4 2^{2i-2} \beta_i$	$10 (9 \beta_1 + 16 \beta_3 + 24 \beta_4 + 16 \beta_4)$

На основании (4), (5), (23), (24) и таблицы математическое ожидание и среднеквадратическое погрешности, вносимой $n-1$ первыми разрядами, можно записать как:

$$\Delta'(t) = \left(\sum_{j=0}^9 \Delta_{xp j} \right) \sum_2 + \left(\sum_{j=0}^9 \Delta_{сч j} - \sum_{j=0}^9 \Delta_{xp j} \right) \sum_1 + 1 (10^{n-2} - t) t^2 \Delta_{xp 0} + \\ + 1 (10^{n-2} - t) t (\Delta_{сч 0} - \Delta_{xp 0}) + 1 (n - 3 - \lg t) t \Delta_{xp 0} \sum_{i=2+\lg t}^{n-1} 10^{i-1}; \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sigma'^2(t) = & \left(\sum_{j=0}^9 \sigma_{xpj}^2 \right) \sum_3 + 1 (10^{n-2} - t) t^3 \sigma_{xp0}^2 + \\ & + 1 (n - 3 - \lg t) t \sigma_{xp0}^2 \sum_{i=2+\lg t}^{n-1} 10^{2i-2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = & \sum_{i=1}^{\varphi(t, n-1)} 10^{i-1} \left] \frac{t}{10^i} \right[; \quad \Sigma_2 = \sum_{i=1}^{\varphi(t, n-1)} 10^{2i-2} \left] \frac{t}{10^i} \right[; \\ \varphi(t, n) = & \min(\lg t, n); \quad 1(x) = \begin{cases} 1; & x \geq 0; \\ 0; & x < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

После суммирования в (25), (26) (Σ_1 и Σ_2 вычисляются аналогично подобным суммам в [2]) находим:

$$\begin{aligned} \Delta'(t) = & \frac{t}{9} [10^{\varphi(t, n-1)} - 1] \sum_{i=1}^4 2^{i-1} \beta_i - 0,1t \varphi(t, n-1) \times \\ & \times (20\beta_1 + 20\beta_2 + 24\beta_3 + 32\beta_4) + 1 (10^{n-2} - t) t \times \\ & \times \left[t \sum_{i=1}^4 2^{i-1} \beta_i - 2\beta_1 \right] + \frac{1(n-3-\lg t)t(10^{n-1}-10t)}{9} \sum_{i=1}^4 2^{i-1} \beta_i; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \sigma'^2(t) = & t \left[\frac{10^{2\varphi(t, n-1)} - 1}{99} + 1 (10^{n-2} - t) t^2 + \right. \\ & \left. + 1 (n - 3 - \lg t) \frac{10^{2n-2} - 100t^2}{99} \right] \sum_{i=1}^4 2^{2i-2} \beta_i. \end{aligned} \quad (29)$$

Теперь остается подставить величины $\Delta_n(t)$, $\sigma_n^2(t)$ [формулы (23), (24)] и $\Delta'(t)$, $\sigma'^2(t)$ [формулы (28), (29)] в правые части (4) и (5) и, конкретизируя значения t , выполнить необходимые действия с учетом данных таблицы. Получим точные значения математического ожидания и среднеквадратического общей погрешности счетчика:

$$\left\{ \begin{aligned} & t \left[\beta_1 \left(\frac{10^n}{9} - 2 \lg t - 2 \frac{1}{9} \right) + 2\beta_2 \left(\frac{10^n}{9} - \lg t - \frac{1}{9} \right) + \right. \\ & \left. + 4\beta_3 \left(\frac{10^n}{9} - 0,6 \lg t - \frac{1}{9} \right) + 8\beta_4 \left(\frac{10^n}{9} - 0,4 \lg t - \frac{1}{9} \right) \right]; \\ & \quad t \leq 10^{n-3}; \\ & t \left[\beta_1 \left(\frac{10t}{9} + 10^{n-1} - 2 \lg t - 2 \frac{1}{9} \right) + \right. \\ & \quad + 2\beta_2 \left(\frac{10t}{9} + 10^{n-1} - \lg t - \frac{1}{9} \right) + \\ & \quad + 4\beta_3 \left(\frac{10t}{9} + 10^{n-1} - 0,6 \lg t - \frac{1}{9} \right) + \\ & \left. + 8\beta_4 \left(\frac{10t}{9} + 10^{n-1} - 0,4 \lg t - \frac{1}{9} \right) \right], \quad 10^{n-3} < t \leq 10^{n-2}; \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
\Delta(t) = & \left. \begin{aligned}
& t \left[\beta_1 \left(\frac{t}{9} + 10^{n-1} - 2 \lg t - \frac{1}{9} \right) + \right. \\
& + 2\beta_2 \left(\frac{t}{9} + 10^{n-1} - \lg t - \frac{1}{9} \right) + \\
& + 4\beta_3 \left(\frac{t}{9} + 10^{n-1} - 0,6 \lg t - \frac{1}{9} \right) + \\
& \left. + 8\beta_4 \left(\frac{t}{9} + 10^{n-1} - 0,4 \lg t - \frac{1}{9} \right) \right]; \quad 10^{n-2} < t \leq 10^{n-1}; \\
& t \left[\beta_1 \left(\frac{10^n}{9} - 2n + 1 \frac{8}{9} \right) + 2\beta_2 \left(\frac{10^n}{9} - n + \frac{8}{9} \right) + \right. \\
& \left. + 4\beta_3 \left(\frac{10^n}{9} - 0,6n + \frac{22}{45} \right) + 8\beta_4 \left(\frac{10^n}{9} - 0,4n + \frac{13}{45} \right) \right]; \quad (30) \\
& 10^{n-1} < t \leq 10^n - 1; \\
& t \left[\beta_1 \left(\frac{10^{n-1}}{9} - 2n + \frac{8}{9} \right) + 2\beta_2 \left(\frac{10^{n-1}}{9} - n + \frac{8}{9} \right) + \right. \\
& + 4\beta_3 \left(\frac{10^{n-1}}{9} - 0,6n + \frac{7}{18} \right) + \\
& \left. + 8\beta_4 \left(\frac{10^{n-1}}{9} - 0,4n + \frac{5}{36} \right) \right]; \quad t \geq 10^n;
\end{aligned}
\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2(t) = & \left. \begin{aligned}
& t \frac{(10^{2n} - 1)}{99} \sum_{i=1}^4 2^{2i-2} \beta_i; \quad t \leq 10^{n-3}; \\
& t \left(10^{2n-2} + \frac{100t^2 - 1}{99} \right) \sum_{i=1}^4 2^{2i-2} \beta_i; \quad 10^{n-3} < t \leq 10^{n-2}; \\
& t \left(10^{2n-2} + \frac{t^2 - 1}{99} \right) \sum_{i=1}^4 2^{2i-2} \beta_i; \quad 10^{n-2} < t \leq 10^{n-1}; \quad (31) \\
& t \left(\frac{10^{2n} - 1}{99} \right) \sum_{i=1}^4 2^{2i-2} \beta_i; \quad 10^{n-1} < t \leq 10^n - 1; \\
& t \left[\left(\frac{10^{2n-2} - 1}{99} \right) \sum_{i=1}^4 2^{2i-2} \beta_i + 10^{2n-2} (9\beta_1 + 16\beta_2 + \right. \\
& \left. + 24\beta_3 + 16\beta_4) \right]; \quad t \geq 10^n
\end{aligned}
\right\}
\end{aligned}$$

Сравнение полученных выражений с их составляющими $\Delta'(t)$, $\Delta_n(t)$ и $\sigma'^2(t)$, $\sigma_n^2(t)$ показывает, что в математическом ожидании общей погрешности при $t \leq 10^n - 1$ (режим счета) доминирует составляющая n -го разряда, а при $t \geq 10^n$ (режим периодического переключения) — суммарная составляющая $n - 1$ предыдущих разрядов; в среднеквадратическом отклонении общей погрешности при любом режиме доминирует составляющая n -го разряда. Сохранив в выражениях (30), (31) доминирующие члены, получим простые приближенные формулы, удобные для практики:

$$\Delta t = \left\{ \begin{array}{l} t 10^{n-1} \sum_{i=1}^4 2^{i-1} \beta_i; \quad t \leq 10^n - 1 \\ t 10^{n-2} \sum_{i=1}^4 2^{i-1} \beta_i; \quad t \geq 10^n \end{array} \right\} \quad n \geq 3; \quad (32)$$

$$\sigma^2(t) = \left\{ \begin{array}{l} t 10^{2n-2} \sum_{i=1}^4 2^{2i-2} \beta_i; \quad t \leq 10^n - 1; \\ t 10^{2n-2} (9\beta_1 + 16\beta_2 + 24\beta_3 + 16\beta_4); \quad t \geq 10^n. \end{array} \right. \quad (33)$$

Формулы (32), (33) наглядно показывают, что скорость накопления погрешности в счетчике существенно зависит от того, работает ли он в режиме счета или переключения. Кроме того, видно, что в пределах линейной теории $\sigma(t) \gg \Delta(t)$. Поэтому во многих случаях в качестве единственной меры погрешности целесообразно считать ее среднеквадратическое $\sigma(t)$.

7. Допустимое число разрядов счетчика. Будем считать триггеры декады равнонадежными, т. е. $\beta_i = \beta = \text{const}$. Тогда из (33) следует:

$$\sigma(t) = \left\{ \begin{array}{l} 9,22 \cdot 10^{n-1} \sqrt{\beta t}; \quad t \leq 10^n - 1; \\ 8,062 \cdot 10^{n-1} \sqrt{\beta t}; \quad t \geq 10^n. \end{array} \right. \quad (34)$$

Относительная погрешность счетчика, равная

$$\delta = \left\{ \begin{array}{l} \sigma/t; \quad t \leq 10^n - 1; \\ \left[\sigma/t - 10^n \right] \frac{t}{10^n}; \quad t \geq 10^n. \end{array} \right. \quad (35)$$

достигает максимума: в режиме счета при $t=1$, в режиме переключения при значениях t , для которых знаменатель (35) равен 1. Отсюда получаем оценки:

$$\delta \leq \left\{ \begin{array}{l} 9,22 \cdot 10^{n-1} \sqrt{\beta}; \quad t \leq 10^n - 1; \\ 8,062 \cdot 10^{1,5n-1} \sqrt{k\beta}; \quad t = k 10^n; \quad k = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (36)$$

Таким образом, допустимое число разрядов счетчика составляет:

$$n^* = \left\{ \begin{array}{l} \lg(\delta/9,22 \sqrt{\beta}) + 1; \quad t \leq 10^n - 1; \\ \frac{2}{3} [\lg(\delta/8,062 \sqrt{k\beta}) + 1]; \quad t = k 10^n; \quad k = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (37)$$

Пример. Дано $\beta = 10^{-10}$, $t \leq 10^n - 1$. Требуется $\delta = 10^{-2}$. Согласно (37), $n^* = \lg(10^{-2}/9,22 \sqrt{10^{-10}}) + 1 \approx 3$.

8. Сравнение точности десятичного и двоичного счетчиков. Пусть необходимо сосчитать T последовательных импульсов. Это можно выполнить при помощи $[\lg T]$ -разрядного десятичного счетчика либо $[\log_2 T]$ -разрядного двоичного счетчика ($[\]$ означает ближайшее сверху целое число). Будем считать триггеры в обоих счетчиках одинаковыми — с вероятностью ошибки β . Среднеквадратическая погрешность при подсчете T импульсов равна: в двоичном счетчике [1]

$$\sigma_1 = 2^{[\log_2 T]} \sqrt{\beta t/3}; \quad (38)$$

в десятичном счетчике [см. (33)]

$$\sigma_2 = 0,922 \cdot 10^{[\lg T]} \sqrt{\beta} T. \quad (39)$$

Отношение среднеквадратических погрешностей имеет вид

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 0,625 \frac{2^{[\log_2 T]}}{10^{[\lg T]}}. \quad (40)$$

Анализ выражения (40) показывает, что в режиме счета двоичный счетчик обеспечивает меньшую погрешность, чем десятичный, для всех T . Исключение составляют T вида 10^r , для которых обе погрешности примерно равны.

Для режима переключения с периодом T можно аналогично (40) получить следующее отношение среднеквадратических погрешностей:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{2^{[\log_2 T]}}{10^{[\lg T]}}. \quad (41)$$

Анализ формулы (41) показывает, что в режиме переключения с периодом $T \neq 10^r$ меньшей погрешностью обладает двоичный счетчик, а при $T = 10^r$ — десятичный.

9. Погрешность счетчика в режиме деления. В этом режиме выходом счетчика принимается выход последнего разряда, который выдает импульсы после каждых 10^n входных импульсов (деление частоты входных импульсов на 10^n). Особенность режима деления по сравнению с ранее изученными режимами состоит в следующем: 1) если ошибка в каком-либо разряде исказила номер состояния счетчика на величину E , то этому соответствует погрешность — E периода выходных импульсов; 2) время работы $t \geq 10^n$ (иначе на выходе нет импульсов и говорить о делении нельзя). Отсюда следует, что статистические характеристики погрешности деления равны соответствующим характеристикам счетчика, работающего в режиме переключения [нижние строки формул (30), (31)], только математическое ожидание погрешности имеет знак минус. Следовательно, рабочие формулы при расчете погрешности деления даются вторыми строками (32), (33) с изменением в (32) знака на минус.

10. Качественный анализ результатов. 1) Математическое ожидание погрешности счетчика в режимах счета и переключения положительно, т. е. в среднем число поданных на вход импульсов завышается; исключение — режим деления частоты, при котором математическое ожидание погрешности отрицательно (период выходных импульсов занижается); 2) средняя квадратическая погрешность доминирует над ее математическим ожиданием и поэтому может рассматриваться в качестве основной меры погрешности счетчика; 3) при одинаковых объемах памяти T десятичный счетчик обладает меньшей точностью, чем двоичный, однако при $T = 10^r$ оба типа счетчиков примерно равноточны (режим счета) либо предпочтителен десятичный счетчик (режим переключения); 4) скорость накопления погрешности в счетчике больше в режиме счета, чем в режиме переключения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. И. Гитис. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных машин. М., Госэнергоиздат, 1961.
2. В. И. Левин. Точность цифрового измерения в присутствии внутренних помех. — Автометрия, 1970, № 4.

Поступила в редакцию
8 июля 1970 г.