

И. К. ЛЕВИН, Р. А. СИМСАРЬЯН
 (Москва)

РАСЧЕТ И АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТИ АДАПТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Адаптивные функциональные преобразователи (АФП) предназначены для решения задач определения характеристик [1] в измерительных информационных системах (ИИС).

Блок-схема ИИС с АФП представлена на рис. 1, где O — объект контроля; ФП — функциональный преобразователь, структура которого задается заранее и коэффициенты настраиваются в процессе обучения; БА — блок адаптации, вычисляющий значения коэффициентов. Ключи K_1, K_2, K_3 замыкаются на время обучения. Методика построения алгоритмов адаптации, оптимальных алгоритмов адаптации изложена в [2, 3].

Рассмотрим АФП, содержащие нелинейный статический функциональный преобразователь. Способы построения таких ФП, среди которых наибольшее распространение получили кусочно-линейные, изложены в [4—6]. В [7, 8] получены оптимальные по критерию минимума среднеквадратичной ошибки алгоритмы настройки кусочно-непрерывных адаптивных функциональных преобразователей и указаны некоторые области их применения.

В настоящей работе рассматриваются вопросы расчета и анализа аппаратной погрешности кусочно-линейных статических АФП.

Настраиваемыми параметрами АФП являются ординаты точек пересечения отрезков аппроксимации a (рис. 2). В те моменты времени, когда $x(t)$ находится в зоне i -го участка $x_{i-1} < x(t) \leq x_i$, настраивается коэффициент a_i . При переходе на другой участок устройства, реализующие алгоритм адаптации, отключаются от a_i и подключаются к a_{i-1} или a_{i+1} . Таким

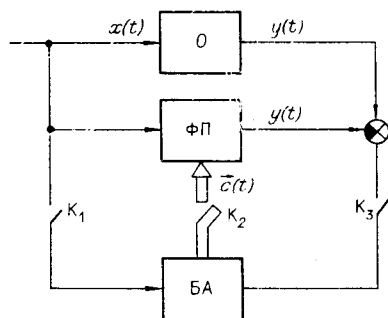


Рис. 1.

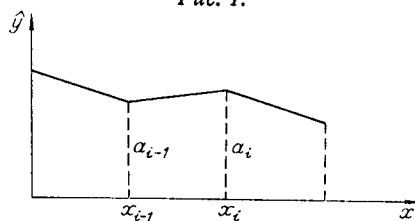


Рис. 2.

образом, для настройки всех параметров используются одни и те же элементы блока адаптации.

На i -м отрезке аппроксимации

$$\hat{y}(t) = a_{i-1} + \frac{a_i(t) - a_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (x(t) - x_{i-1}) = a_{i-1} + c_i(t)(x(t) - x_{i-1}), \quad (1)$$

где $c_i(t) = \frac{a_i(t) - a_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$.

Для упрощения написания алгоритма будем считать настраиваемым параметром каждого участка параметр c_i , отличающийся от a_i постоянными коэффициентами.

Алгоритм настройки параметра $c_i(t)$ [8] имеет вид

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{[y(t) - a_{i-1} - c_i(t)(x(t) - x_{i-1})](x(t) - x_{i-1})}{\int_0^t (x(\tau) - x_{i-1})^2 d\tau}. \quad (2)$$

Схема реализации алгоритма приведена на рис. 3. Параметры элементов схемы рассчитываются существующими методами расчета аналоговых моделей [9]. Однако возникают некоторые трудности при выборе параметров интегратора И₂, связанные с тем, что нужно знать среднее значение величины $(x(t) - x_{i-1})$ и время пребывания процесса $x(t)$ на i -м участке в процессе обучения.

При отсутствии таких знаний расчет проводится, исходя из максимальных значений $[x(t) - x_i]_{\max} = x_i - x_{i-1}$ и времени θ , в течение которого $x_{i-1} < x(t) < x_i$.

Параметры интегратора выбираются из условий:

$$\frac{1}{m_x T} \int_0^{\theta} (x_i - x_{i-1})^2 d\tau \leq U_{\max}; \quad (3)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left[U_{\max} - \frac{1}{m_x T} \int_0^{\theta} (x(\tau) - x_{i-1})^2 d\tau \right] = 0, \quad (4)$$

где m_x — масштаб переменной $x(t)$; $m_x = \frac{x_{\max}}{U_{\max}}$; U_{\max} — максимальное значение машинной переменной; T — постоянная времени интегратора.

Первое из этих условий означает, что сигнал на выходе интегратора не превзойдет максимального допустимого значения машинной переменной, второе — что будет использован весь диапазон ее изменения.

В алгоритме (2) вместо множителя

$$\frac{1}{\int_0^t (x(\tau) - x_{i-1})^2 d\tau} = \gamma(t)$$

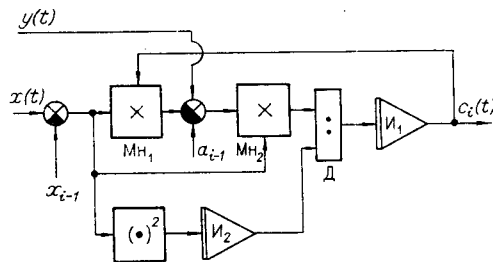


Рис. 3.

мог бы стоять любой другой множитель $\gamma(t)$, удовлетворяющий условиям, приведенным в [2], и, в частности, не зависящий от входного сигнала $x(t)$. Интересно отметить, что при реализации неоптимальных алгоритмов адаптации, в которых $\gamma(t)$ не зависит от входного сигнала, не нуж-

но знать ни среднего значения, ни времени пребывания $x(t)$ на i -м участке. Таким образом, необходимость этой априорной информации является своеобразной платой за оптимальность алгоритма адаптации. Алгоритм (2) вычисляет $c_i(t)$ так, что в каждый момент времени минимизируется критерий вида

$$I(\vec{c}) = \frac{1}{t} \int_0^t [y(\tau) - \hat{y}(\tau, \vec{c}(t))]^2 d\tau, \quad (5)$$

где \vec{c} — вектор параметров $c_i(t)$.

Однако вследствие неидеальности элементов вычислительного устройства, реализующего (2), условие минимума (5) будет выполняться неточно, и полученные коэффициенты \hat{c}_i будут отличаться от идеальных (c_i).

Рассмотрим влияние аппаратных погрешностей на поведение оценок коэффициентов при реализации алгоритма (1). В работах [10, 11] показано, что неточности пороговых адаптивных элементов в ряде алгоритмов приводят к увеличению обучающей последовательности (или времени обучения), но оценки коэффициентов сходятся к их истинным значениям. Это позволяет в ряде случаев снизить требования к точности адаптивных устройств.

Введем обозначения: c_i^* — оптимальное значение коэффициента c_i при бесконечном времени обучения; $c_i(t)$ — текущая оценка коэффициента, которая может быть получена с помощью алгоритма (2) за время t ; $\hat{c}_i(t)$ — текущая оценка за время t , полученная при реализации алгоритма (2) на неидеальных элементах. Прежде чем рассматривать поведение параметров ($\hat{c}_i(t)$) во времени, отметим, что расхождение ошибки $\Delta c_i(t) = \hat{c}_i(t) - c_i(t)$ не означает невозможности оценок значений коэффициентов (c_i^*) по $c_i(t)$ в связи с тем, что $\hat{c}_i(t)$ получается в результате наложения двух процессов, а именно, сходимости $c_i(t)$ к c_i^* в силу алгоритма (1) и отклонения $\hat{c}_i(t)$ от $c_i(t)$ вследствие неточности реализации (1). В том случае, когда $c_i(t)$ сходится к c_i^* быстрее, чем $\hat{c}_i(t)$ отклоняется от $c_i(t)$, оценка $\hat{c}_i(t)$ приближается к c_i^* .

При анализе точности вычисления $\hat{c}_i(t)$ будем учитывать максимально допустимые погрешности элементов вычислительного устройства. Этот подход дает завышенные оценки, однако в реальных условиях можно получить информацию для такого анализа. Ориентироваться же на знания статистических характеристик погрешностей элементов адаптивных устройств не имеет смысла, так как устройства потому и делаются адаптивными, что условия их работы, от которых зависят и погрешности элементов, меняются заранее непредвиденным образом.

Уравнение (2) с учетом погрешностей элементов запишем в виде

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \frac{[y(t) - a_i - \hat{c}_i(t) z_i(t) + A_1 z_i(t) + A_2]}{A_0 + \int_0^t [z_i^2(\tau) + B_2] d\tau} + A_3 + B_1, \quad (6)$$

где $z_i(t) = x(t) - x_{i-1}$; A_0 — начальные условия интегратора I_2 ; A_1, A_2 — соответственно максимальные значения абсолютных ошибок множе-

лей M_{N_1} и M_{N_2} ; A_3 — максимальное значение абсолютной ошибки делителя; B_1, B_2 — соответственно максимальные значения абсолютных ошибок интеграторов I_1 и I_2 .

Предполагается, что при $B_2 < 0$ выполняется условие $|B_2| < M \{z_i^2\}$; в противном случае знаменатель (6) будет уменьшаться и алгоритм (6) расходиться. Рассмотрим разность

$$\Delta c_i(t) = \hat{c}_i(t) - c_i(t). \quad (7)$$

Для этого запишем (6) в виде

$$\frac{d\hat{c}_i(t)}{dt} = \frac{[y(t) - a_1 - \hat{c}_i(t) z_1(t)] z_1(t)}{A_0 + \int_0^t [z_i^2(\tau) + B_2] d\tau} + A_3 + B_1 + \frac{A_2 + A_1 z_1(t)}{A_0 + \int_0^t [z_i^2(\tau) + B_2] d\tau}. \quad (8)$$

Подставляя (8) и (2) в (7), получим

$$\Delta c_i(t) = A_2 \mu(t) + A_1 \eta(t) + (A_3 + B_1) t, \quad (9)$$

где

$$\mu(\theta) = \int_0^\theta \frac{dt}{A_0 + \int_0^t [z_i^2(\tau) + B_2] d\tau}; \quad (10)$$

$$\eta(\theta) = \int_0^\theta \frac{z_1(t) dt}{A_0 + \int_0^t [z_i^2(\tau) + B_2] d\tau}. \quad (11)$$

Можно показать (см. приложение), что $\mu(\theta)$ расходится, находясь при этом между двумя логарифмическими кривыми. Так же расходится $\eta(\theta)$ при нецентрированном $z_i(t)$. При центрированном $z_i(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) \leq \frac{1}{D \{z_1(t)\} + B_2} \left[\frac{1}{A_0} \int_0^\infty \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega + 0,5 \int_0^\infty f(\omega) d\omega \right], \quad (12)$$

где $f(\omega)$ — спектр амплитуд $z_i(t)$.

Ошибки идеального (2) и реального (6) алгоритмов представлены на рис. 4, а и б соответственно.

Из выражений (9) — (12) ясно, что погрешности A_1, A_2, A_3 и B_1 вызывают расходимость алгоритма (6). Поэтому увеличение времени обучения приводит к росту ошибки Δc_i , причем наибольший вклад в эту ошибку вносят погрешности A_3 и B_1 , возрастающие со временем, а погрешности A_1 и A_2 дают ошибку, нарастающую по логарифмическому закону. Отсюда следует, что наибольшие требования должны предъявляться к делителю D и интегратору I_2 .

Как уже было отмечено, несмотря на расходимость ошибки $\Delta c_i(t)$, оценить значение \hat{c}_i^* по $c_i(t)$ все же можно, так как какое-то время $\hat{c}_i(t)$ приближается к \hat{c}_i^* .

На практике выражения (9) — (11) можно использовать для определения такого времени обучения, чтобы ошибка Δc не превосходила заранее заданной (ϵ_0). Для этого в процессе обучения необходимо вычислять $\Delta c_i(t)$ до тех пор, пока будет выполняться неравенство $\Delta c_i(t) < \epsilon_0$. В случае задания относительной ошибки ϵ_1 имеем $\epsilon_0 = \epsilon_1 \hat{c}_i(t)$. Посмотрим, нельзя ли уменьшить ошибку Δc_i , изменив характер погрешностей элементов. Будем считать, что ограничены относительные погрешности элементов. Для множителей и делителя это значит, что их выходные напряжения равны нулю при нуле на любом из входов,

а для интеграторов — что выходное напряжение не изменяется при нуле на входе. Тогда можем записать

$$\frac{d\tilde{c}_i(t)}{dt} + \frac{[y(t) - a_{i-1} - \tilde{c}_i(t) z_i(t)(1 + \Delta_1)] z_i(t)(1 + \Delta_2)}{A_0 + \int_0^t z_1^2(\tau) d\tau}, \quad (13)$$

где Δ_1 и Δ_2 — максимально относительные ошибки множителей M_{N_1} и M_{N_2} соответственно. Сделав в (13) замену переменной $z_i(t) = \frac{u_i(t)}{1 + \Delta_1}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{c}_i(t)}{dt} &= \frac{[y(t) - a_{i-1} - c_i(t) u_i(t)] u_i(t) u_1(t) \frac{1 + \Delta_2}{1 + \Delta_1}}{A_0 + \frac{1}{(1 + \Delta_2)^2} \int_0^t u_i^2(\tau) d\tau} = \\ &= \frac{[y(t) - a_{i-1} - \tilde{c}_i(t) u_i(t)] u_i(t)(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)}{(1 + \Delta_2)^2 A_0 + \int_0^t u_i^2(\tau) d\tau}. \end{aligned} \quad (14)$$

Пренебрегая членом $\Delta_1 \Delta_2$ и обозначив $\Delta_1 + \Delta_2 = \delta$, определим из (14):

$$\frac{d\tilde{c}_i(t)}{dt} = \frac{[y(t) - a_{i-1} - c_i(t) u_i(t)] u_i(t) (1 + \delta)}{(1 + \Delta_2)^2 A_0 + \int_0^t u_i^2(\tau) d\tau}. \quad (15)$$

Поступая так же, как и при выводе (9), найдем

$$\Delta \tilde{c}_i(t) = \delta \int_0^t \frac{u_i(t) dt}{\int_0^t u_i^2(\tau) d\tau + (1 + \Delta_2)^2 A_0}. \quad (16)$$

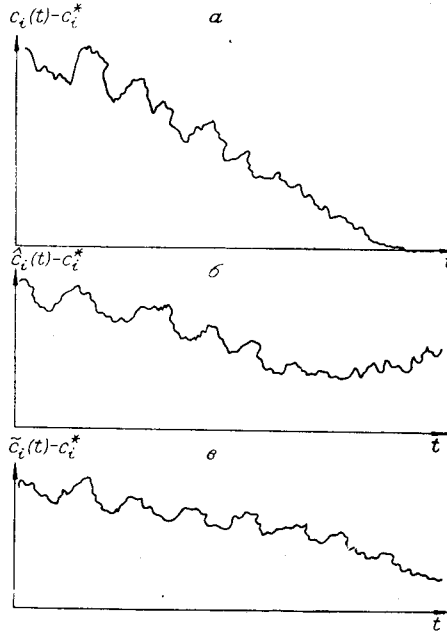


Рис. 4.

Аналогично (12) при центрированном $u_i(t)$

$$\lim \Delta \tilde{c}_i(t) \leq \frac{\delta}{D \{u_i(t)\}} \times \left[\frac{1}{(1 + \Delta_2)^2 A_0} \times \int_0^\infty \frac{\psi(\omega)}{\omega} d\omega + 0,5 \int_0^\infty \psi(\omega) d\omega \right], \quad (17)$$

где $\psi(\omega)$ — спектр амплитуд $u_i(t)$.

Как видно из (17), (см. рис. 4, б), при центрированном $u_i(t)$ значение $\Delta \tilde{c}_i(t)$ не превосходит некоторой постоянной величины, т. е. алгоритм (13) сходится, несмотря на погрешности элементов, а при нецентрированном $u_i(t)$ расходится, но медленно, по логарифмическому закону.

Это показывает целесообразность построения схемы, реализующей алгоритм из элементов, характеристики которых проходят через начало координат.

В В О Д Ы

Для расчета параметров адаптивных функциональных преобразователей, реализующих оптимальные алгоритмы адаптации (2), необходимо знать оценку среднего значения аргумента $x(t)$ и время его пребывания в зоне каждого участка аппроксимации.

Погрешность интегратора I_1 приводит к накоплению ошибки в процессе обучения, поэтому требования к его точности должны быть наиболее высокими.

Увеличение продолжительности обучения может привести к росту смещения оценки настраиваемого параметра.

Для уменьшения смещения оценки целесообразно центрировать сигнал $x(t) - x_{i-1}$, а также использовать нелинейные элементы, характеристика вход — выход которых проходит через начало координат.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим поведение величин $\mu(\theta)$ и $\eta(\theta)$, определяемых (10) и (11), при увеличении времени обучения θ . Для этого проанализируем выражение

$$\int_0^\theta \frac{dt}{A_0 + \int_0^t z^2(\tau) d\tau}. \quad (\text{П.1})$$

Предположим, что $z^2(t)$ ограничена, т. е. $z^2(t) \leq R$, где $R = \text{const} > 0$. Тогда

$$\int_0^t z^2(\tau) d\tau \leq \int_0^t R d\tau = Rt.$$

Это значит, что

$$\int_0^\theta \frac{dt}{A_0 + \int_0^t z^2(\tau) d\tau} \geq \int_0^\theta \frac{dt}{A_0 + Rt} = \frac{1}{R} \ln \frac{A_0 + R\theta}{A_0}. \quad (\text{П.2})$$

С другой стороны, можно утверждать, что для реального процесса $z(t)$ (если только после некоторого момента времени $z(t)$ не становится тождественно равным 0) существует такое $r > 0$, что

$$\int_0^t z^2(\tau) d\tau \geq \int_0^t r d\tau = rt. \quad (\text{П.3})$$

Поэтому

$$\int_0^\theta \frac{dt}{A_0 + \int_0^t z^2(\tau) d\tau} \leq \int_0^\theta \frac{dt}{A_0 + rt} = \frac{1}{r} \ln \frac{A_0 + r\theta}{A_0}. \quad (\text{П.4})$$

Следовательно,

$$\frac{1}{R} \ln \left(\frac{A_0 + R\theta}{A_0} \right) \leq \int_0^\theta \frac{dt}{A_0 + \int_0^t z^2(\tau) d\tau} \leq \frac{1}{r} \ln \left(\frac{A_0 + r\theta}{A_0} \right). \quad (\text{П.5})$$

Отсюда видно, что процесс

$$\mu(\theta) = \int_0^\theta \frac{dt}{A_0 + \int_0^t (z_i^2(\tau) + B) d\tau}$$

расходится, находясь при этом между двумя логарифмическими кривыми.

Для исследования поведения $\eta(\theta)$ представим $z(t)$ в виде суммы $z(t) = M\{z(t)\} + \xi(t)$, причем $\{M \xi(t)\} = 0$.

Тогда из (11) получим сумму двух процессов

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{\pi \Delta \omega_i \max \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \Delta \omega_i f(\omega_i) \sin(\omega_i t + b_i) \right], \quad (\text{П.7})$$

причем постоянная составляющая отсутствует, так как $\xi(t)$ центрировано. Подставим это выражение во второе слагаемое из (П.6):

$$\int_0^{\theta} \frac{\xi(t) dt}{A_0 + \int_0^t z^2(\tau) d\tau} = \frac{2}{\pi} \lim_{\pi \Delta \omega_i \max \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \Delta \omega_i f(\omega_i) \int_0^{\theta} \frac{\sin(\omega_i t + b_i) dt}{A_0 + \int_0^t z^2(\tau) d\tau} \right]. \quad (\text{П.8})$$

Оценим одно слагаемое из суммы (П.8):

$$\Delta \omega_i f(\omega_i) \int_0^{\theta} \frac{\sin(\omega_i t + b_i) dt}{A_0 + \int_0^t z^2(\tau) d\tau}. \quad (\text{П.9})$$

Как уже отмечалось, существует $r > 0$ такое, что $\int_0^t z^2(\tau) d\tau \geq rt$. Поэтому

$$\Delta \omega_i f(\omega_i) \int_0^{\theta} \frac{\sin(\omega_i t + b_i) dt}{A_0 + \int_0^t z^2(\tau) d\tau} \leq \Delta \omega_i f(\omega_i) \int_0^{\theta} \frac{\sin(\omega_i t + b_i) dt}{A_0 + rt}. \quad (\text{П.10})$$

Сделаем в правой части (П.10) замену переменной

$$\omega_i t + b_i = u, \quad (\text{П.11})$$

откуда $t = \frac{u - b_i}{\omega_i}$; $dt = \frac{1}{\omega_i} du$. Тогда

$$\int_0^{\theta} \frac{\sin(\omega_i t + b_i) dt}{A_0 + rt} = \frac{1}{r} \int_{b_i}^{\omega_i \theta + b_i} \frac{\sin u du}{\frac{A_0 \omega_i}{r} - b_i + u} \leq \frac{1}{r} \int_0^{\omega_i \theta} \frac{\sin u du}{\frac{A_0 \omega_i}{r} + u}. \quad (\text{П.12})$$

Оценим интеграл в правой части неравенства, обозначив $\frac{A_0 \omega_i}{r} = q$:

$$\int_0^{\omega_i \theta} \frac{\sin u du}{q + u} < \int_0^{\pi} \frac{du}{q + u} + \int_{\pi}^{\omega_i \theta} \frac{\sin u du}{u} = \ln \left(1 + \frac{\pi}{q} \right) + \text{Si}(\omega_i \theta) - \text{Si}(\pi). \quad (\text{П.13})$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \infty} \int_0^{\omega_i \theta} \frac{\sin u du}{q + u} &< \ln \left(1 + \frac{\pi}{q} \right) + \frac{\pi}{2} - \text{Si}(\pi) \approx \ln \left(1 + \frac{\pi}{q} \right) + 0,5 = \ln \times \\ &\times \left(1 + \frac{\pi r}{A_0 \omega_i} \right) + 0,5. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Итак, найдена оценка для (П.10)

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \int_0^{\theta} \frac{\sin(\omega t + b_i) dt}{A_0 + rt} < \frac{1}{r} \left[\ln \left(1 + \frac{\pi r}{A_0 \omega_i} \right) + 0,5 \right]. \quad (\text{П.15})$$

Отсюда, учитывая (П.8) и (П.10), получим, что

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \int_0^{\theta} \frac{\xi(t) dt}{A_0 + \int_0^t z^2(\tau) d\tau} < \frac{2}{\pi r} \left[\int_0^{\infty} f(\omega) \ln \left(1 + \frac{\pi r}{A_0 \omega} \right) d\omega + 0,5 \int_0^{\infty} f(\omega) d\omega \right], \quad (\text{П.16})$$

где $f(\omega)$ — спектр $\xi(t)$. Очевидно, эта же оценка годится и для предела величины

$$\eta(t) = \int_0^t \frac{z_i(t) dt}{A_0 + \int_0^t [z_i^2(\tau) + B_2] d\tau} \quad (\text{П.17})$$

при $M\{z_i(t)\} = 0$.

Чтобы можно было пользоваться этой оценкой, надо как можно точнее оценить число r . Видимо, можно принять значение r несколько меньшее, чем $M\{[z_i(t) + B_2]\} = D\{z(t)\} + B_2$. Можно, например, считать, что

$$r = 0,9 [D\{z_i(t)\} + B_2].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Ли. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М., «Наука», 1966.
2. Я. З. Цыпкин. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., «Наука», 1968.
3. Я. З. Цыпкин. Оптимальные гибридные алгоритмы адаптации и обучения.— Автоматика и телемеханика, 1968, № 8.
4. В. Д. Смолов. Диодные функциональные преобразователи. Л., «Энергия», 1967.
5. А. С. Гинзбург. Математическая непрерывная логика и изображение функций. М., «Энергия», 1968.
6. Р. Томович, У. Карплюс. Быстродействующие аналоговые вычислительные машины. М., «Мир», 1964.
7. Э. Д. Аведьян, Р. А. Симсарьян. Адаптивный функциональный преобразователь в задаче определения параметров технологического процесса по косвенным показателям.— Автоматика и телемеханика, 1969, № 11.
8. Э. Д. Аведьян, Р. А. Симсарьян. Оптимальные алгоритмы адаптации для идентификации нелинейных статических объектов и их применение.— Труды I конференции молодых специалистов ВЦ АН АрмССР и Ереванского университета. Ереван, 1969.
9. Б. Я. Коган. Электронные модулирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. М., Физматгиз, 1963.
10. S. P. Colussi, V. Pollotina. Методы оптимизации допусков на весовые коэффициенты адаптивных пороговых элементов.— Экспресс-информация. Техническая кибернетика, 1968, № 46.
11. А. А. Ромашов. О сходимости некоторых алгоритмов обучения для адаптивных пороговых элементов при неидеальных весовых компонентах.— Автоматика и телемеханика, 1968, № 4.

Поступила в редакцию
1 октября 1970 г.