

К Р А Т К И Е С О О Б Щ Е Н И Я

УДК 681.2.088

В. П. ХАВКИН, А. Е. ЧЕРКАССКИЙ  
(Москва)

**О ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ  
ИНЕРЦИОННЫМ ДАТЧИКОМ  
С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ**

Датчики, использующие эффект поглощения (радиоизотопные, фотоэлектрические), нашли широкое применение при измерении распределенных параметров в металлургической, текстильной и некоторых других отраслях промышленности. Задачей измерения обычно является определение среднего значения контролируемого параметра и показателя его неравномерности (например, среднеквадратического отклонения).

Так как такие датчики имеют конечные размеры, при измерении осуществляется усреднение контролируемого параметра (в этом смысле датчик является инерционным); кроме того, оценки статистических характеристик измеряемого параметра оказываются, вообще говоря, смещенными из-за экспоненциального характера кривой поглощения.

Для уменьшения смещения оценок последовательно с датчиком может быть включен нелинейный преобразователь с логарифмической характеристикой (рис. 1). Очевидно, что для точечного (безынерционного) датчика процесс на выходе преобразователя  $\Omega(t)$  тождественен контролируемому процессу.

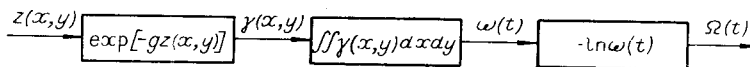


Рис. 1.

Ниже рассматривается смещение оценок первых четырех центральных моментов процесса на выходе преобразователя относительно моментов контролируемого процесса при измерении по описанной схеме.

Допустим, что контролируемый параметр  $z$  описывается однородным случайным полем  $z(x, y)$  с эллиптической анизотропией и корреляционной функцией вида

$$\rho[\tau, h] = \rho[\mu(\tau^2 + A^2 h^2)]. \quad (1)$$

Справедливость такой гипотезы для технологических процессов текстильной промышленности показана в работе\*.

В измерительной системе реализуются операции нелинейного преобразования случайного поля

$$\gamma(x, y) = \exp[-gz(x, y)], \quad (2)$$

усреднения значений  $\gamma(x, y)$

$$\omega(t) = \omega(x, y) = \frac{1}{ab} \int_{y-0,5b}^{y+0,5b} \int_{x-0,5a}^{x+0,5a} \gamma(u, v) dudv \quad (3)$$

и обратного нелинейного преобразования

$$\Omega(t) = -\ln \omega(t). \quad (4)$$

\*А. Е. Черкасский, В. П. Хавкин. Двумерная вероятностная модель текстильного продукта.— В сб. трудов Московского текстильного института, т. 22. М., 1969.

Допустим, что размеры датчика прямоугольной формы много меньше интервалов корреляции измеряемого случайного поля в соответствующем направлении, т. е.

$$a \ll \tau_k, \quad b \ll h_k, \quad (5)$$

где  $a, b$  — линейные размеры датчика в направлениях  $x, y$ ;  $\tau_k, h_k$  — интервалы корреляции случайного поля. Это допущение практически всегда выполняется, так как только в этом случае ошибка измерения может быть приемлемой.

В силу гауссовости случайного поля функция распределения процесса  $\gamma(x, y)$  есть

$$f(\gamma) = \frac{1}{\gamma g \sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\ln \gamma + gm)^2}{2g^2 \sigma^2} \right], \quad (6)$$

где  $m, \sigma^2$  — математическое ожидание и дисперсия случайного поля. Из (3) и (6) следует, что

$$M(\omega) = \exp \left( \frac{\beta^2}{2} - \alpha \right), \quad (7)$$

где

$$\alpha = gm; \quad \beta = g\sigma. \quad (8)$$

Определим  $n$ -й начальный момент случайного процесса  $\omega(t)$  на выходе датчика

$$M(\omega^n) = \frac{1}{(ab)^n} \int_{y-0,5b}^{y+0,5b} \int_{x-0,5a}^{x+0,5a} \dots \int M \left\{ \exp \left[ -g \sum_{k=1}^n z(x_k, y_k) \right] \right\} dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_n. \quad (9)$$

Полагая  $\sum_{k=1}^n z(x_k, y_k) = z(x, y)$ , получаем:

$$m_z = nm; \quad \sigma_z^2 = n\sigma^2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \rho(x_i - x_j; y_i - y_j). \quad (10)$$

Из (7) и (10) следует, что

$$M \{ \exp [-gZ] \} = \exp \left( \frac{n\beta^2}{2} - n\alpha \right) \exp \left\{ \frac{\beta^2}{2} \left[ -\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \mu [(x_i - x_j)^2 - A(y_i - y_j)^2] \right] \right\}. \quad (11)$$

Разложив корреляционную функцию случайного поля в степенной ряд и выполнив интегрирование (9), после преобразований получим приближенное выражение для  $M(\omega^n)$  в виде

$$M(\omega^n) \approx \exp \left( \frac{n^2 \beta^2}{2} - n\alpha \right) \left[ 1 + \frac{n(1-n)\beta^2}{12} (p+q) \right], \quad (12)$$

где

$$p = \mu a^2; \quad q = \mu A^2 b^2. \quad (13)$$

Выше было показано, что лишь при  $a=b=0$  случайный процесс на выходе  $\Omega(t)$  будет гауссовским. При выполнении условия (5) естественно предположить, что функция распределения  $f(\Omega)$  может быть представлена в виде разложения по степеням нормального распределения. Переходя от распределения  $f(\Omega)$  к  $f(\omega)$ , получим разложение последнего распределения по степеням логнормального распределения, что, в свою очередь, позволит связать моменты процесса  $\Omega(t)$  с моментами  $M_f(\omega^n)$ , полученными из разложения  $f(\omega)$ . Из равенства

$$M(\omega^n) = M_f(\omega^n) \quad (14)$$

находим смещение моментов процесса  $\Omega(t)$  относительно моментов измеряемого случайного поля.

Допустим, что функция распределения процесса  $\Omega(t)$  с достаточной точностью описывается тремя членами ряда Грамма — Шарлье

$$(x) = \Phi(x) \left[ 1 - x(3-x^2) \frac{S_K}{3!} + (x^4 - 6x^2 + 3) \frac{E_x}{4!} \right], \quad (15)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Для процесса  $\Omega(t)$  с математическим ожиданием  $\bar{m}$  и дисперсией  $\sigma^2$  имеем

$$f(\Omega) = \frac{\exp\left[-\frac{(\Omega - \bar{m})^2}{2\bar{\sigma}^2}\right]}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}} \left\{ 1 - \frac{\Omega - \bar{m}}{3!\bar{\sigma}} \left[ 3 - \frac{(\Omega - \bar{m})^2}{\bar{\sigma}^2} \right] S_k + \frac{1}{4!} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{(\Omega - \bar{m})^4}{\bar{\sigma}^4} - 6 \frac{(\Omega - \bar{m})^2}{\bar{\sigma}^2} + 3 \right] E_x \right\}.$$

Переходя, согласно (4), от  $f(\Omega)$  к распределению  $f(\omega)$ , получим разложение по степеням логнормального распределения

$$f(\omega) = \frac{\exp\left[-\frac{(\ln \omega + \bar{m})^2}{2\bar{\sigma}^2}\right]}{\omega \bar{\sigma} \sqrt{2\pi}} \left\{ 1 - \frac{\ln \omega + \bar{m}}{3!\bar{\sigma}} \left[ 3 - \frac{(\ln \omega + \bar{m})^2}{\bar{\sigma}^2} \right] S_k + \frac{1}{4!} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{(\ln \omega + \bar{m})^4}{\bar{\sigma}^4} - 6 \frac{(\ln \omega + \bar{m})^2}{\bar{\sigma}^2} + 3 \right] E_x \right\}. \quad (16)$$

Отсюда  $n$ -начальный момент распределения (16) равен

$$M_f(\omega^n) = \exp\left(\frac{n^2 \bar{\sigma}^2}{2} - n\bar{m}\right) \left( 1 + \frac{n^3 \bar{\sigma}^3}{6} S_k + \frac{n^4 \bar{\sigma}^4}{24} E_x \right). \quad (17)$$

Линеаризуем выражение (17) для  $\bar{\sigma} = \beta$ ;  $\bar{m} = \alpha$ ;  $\beta^3 S_k = 0$ ;  $\beta^4 E_x = 0$ ;

$$M(\omega^n) \approx \exp\left(\frac{n^2 \beta^2}{2} - n\alpha\right) \left( 1 - n \Delta \bar{m} + n^2 \beta \Delta \bar{\sigma} + \frac{n^3 \beta^3}{6} \Delta S_k + \frac{n^4 \beta^4}{24} \Delta E_x \right), \quad (18)$$

где  $\Delta \bar{m}$ ;  $\Delta \bar{\sigma}$ ;  $\Delta S_k$ ;  $\Delta E_x$  — смещения математического ожидания, среднеквадратического отклонения, коэффициентов асимметрии и эксцесса процесса  $\Omega(t)$  относительно соответствующих характеристик измеряемого случайного поля  $z(x, y)$ .

Приравнявая в соответствии с (14) правые части выражений (12) и (18), получим систему уравнений

$$n \Delta \bar{m} - n^2 \beta \Delta \bar{\sigma} - \frac{n^3 \beta^3}{6} \Delta S_k - \frac{n^4 \beta^4}{24} \Delta E_x = \frac{n \beta^2 (n-1)}{12} (p+q); \quad n = 1, 2, 3, 4. \quad (19)$$

В случае изотропного случайного поля правая часть системы (19) равна  $\frac{1}{6} n \beta^2 (n-1) p$ ;

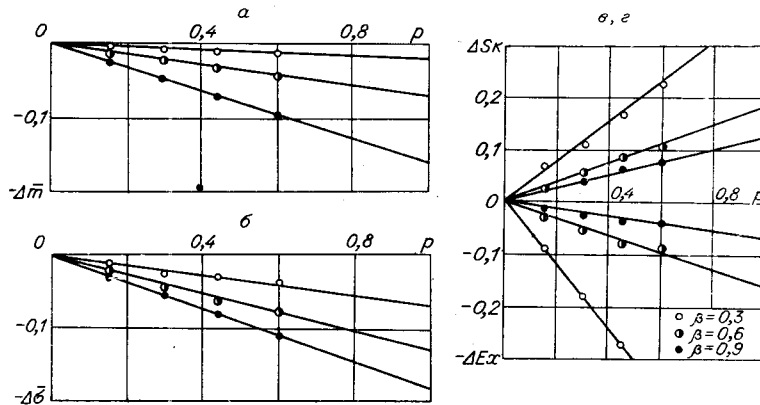


Рис. 2.

в одномерном случае (измерение сосредоточенного параметра) —  $\frac{1}{12} n \beta^2 (n-1) p$ .

Решение системы для изотропного случайного поля имеет следующий вид:

$$\Delta \bar{m} = -0,195 p \beta^2; \Delta \bar{\sigma} = -0,210 p \beta; \Delta S_k = 0,115 \frac{p}{\beta}; \Delta E_x = -0,057 \frac{p}{\beta^2}.$$

На рис. 2 приведены некоторые результаты моделирования рассмотренной задачи на ЦВМ. Результаты, полученные при моделировании, достаточно близки к расчетным.

Поступило в редакцию  
11 ноября 1970 г.,  
окончательный вариант —  
11 мая 1971 г.

УДК 621.391.19

Е. С. НЕЖЕВЕНКО, Г. И. САЛОВ,  
П. Е. ТВЕРДОХЛЕБ, Г. Д. УМАНЦЕВ  
(Новосибирск)

### ЛИНЕЙНЫЙ ОБУЧАЕМЫЙ КЛАССИФИКАТОР ОПТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Одной из актуальных задач проблемы автоматизации научного эксперимента является задача создания устройств для классификации оптических изображений со случайным изменением параметров при неполной априорной информации. Обычно изображения, подлежащие анализу, представляются на фотопленке или фотопластинке, так что их коэффициент пропускания является функцией двух переменных  $s$  и  $t$ . Классификация может быть осуществлена путем вычисления значения дискриминантной функции (иначе функционала) от изображения и принятия по этому значению решения о принадлежности изображения к тому или иному классу.

Известно, что любой непрерывный функционал можно аппроксимировать функциональными степенными рядами (см., например, [1]). Чем ниже степень функционала, тем легче его физическое моделирование. Наиболее просто реализуем линейный функционал. Пусть изображение  $x(s, t)$ ,  $a \leq s, t \leq b$  — реализация одного из  $k$  классов изображений  $\xi_i(s, t)$ ,  $i=1, \dots, k$ .

Полагаем, что существуют вероятности (возможно, неизвестные экспериментатору) появления каждого из  $\xi_i(s, t)$ . Тогда линейный функционал от изображения  $x(s, t)$  имеет вид

$$(x, h) = \int_a^b \int_a^b x(s, t) h(s, t) ds dt,$$

и задача заключается в отыскании подходящей для классификации (весовой) функции  $h(s, t)$ .

В настоящей работе показано, что, применяя относительно новый материал — фотохромный [2], можно сравнительно легко получить  $h(s, t)$  экспериментальным путем с помощью рекуррентной процедуры, рассмотренной в [3]. Линейный функционал в этом случае является оценкой среднеквадратического приближения к идеальному функционалу, принимающему значение  $d=d_i$ , если  $x(s, t)$  принадлежит  $\xi_i(s, t)$ . Исходной информацией для осуществления упомянутой рекуррентной процедуры является независимая выборка  $x_1(s, t), \dots, x_N(s, t)$  ( $N > k$ ) из совокупности изображений классов  $\{\xi_i(s, t)\}$ , насколько это возможно, показательная для всей совокупности, а также известная последовательность значений  $d_{i_1}, \dots, d_{i_N}$  и идеального функционала, соответствующая этой выборке.

Если  $h_1(s, t)$  — любая функция с интегрируемым квадратом на  $(a, b) \times (a, b)$ , независимая от  $x_1(s, t), \dots, x_N(s, t)$ , то последовательность  $\{h_n(s, t)\}$  определяется по формуле

$$h_{n+1}(s, t) = h_n(s, t) + a_n(d_{i_n}) - \int_a^b \int_a^b x_n(u, v) h_n(u, v) du dv x_n(s, t),$$