

С. М. ПЕРСИН  
 (ЛЕНИНГРАД)

### О ПОГРЕШНОСТИ И НОВЫХ МЕТОДАХ ЦИФРОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В настоящей статье приводится анализ алгоритмов цифровых измерений при воспроизведении процесса по дискретным отсчетам и для одиночного измерения. Оба эти вопроса объединены общим подходом: одиночное аналого-цифровое преобразование рассматривается как восстановление значения процесса по квантованным по уровню отсчетам. Это позволяет использовать общие методы анализа погрешностей цифровых измерений и предложить новые алгоритмы, в частности для аналого-цифровых преобразователей (АЦП).

**Погрешность цифрового воспроизведения процесса.** При цифровых измерениях возникает задача нахождения интересующих нас характеристик процесса по его квантованным по уровню дискретным отсчетам. Влияние квантования по уровню на погрешность воспроизведения обсуждалось в [1, 2]. Ниже рассматривается общий случай, когда шкалы квантования для каждого из отсчетов могут быть выбраны различными.

Вспользуемся сначала идеализированной моделью цифровых измерений, при которой процесс измерения полагается безынерционным. При этом квантование по уровню можно рассматривать как нелинейное преобразование суммы  $z_i$  измеряемого сигнала  $x_i$  и погрешности  $y_i$  в момент измерения  $t_i$  (рис. 1, а;  $z_{ik}$  —числовые значения, приписываемые дискретным уровням). Примем, что искомая характеристика процесса  $V$  (для момента  $t_0$ ) находится по некоторой функции  $W$   $n$  квантованных по

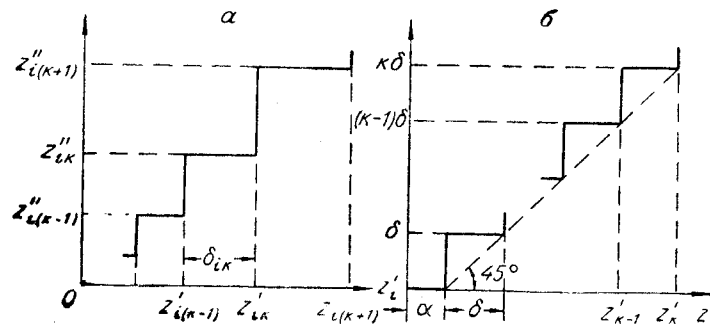


Рис. 1.

уровню результатов измерений  $z_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) в моменты  $t_1, \dots, t_n$ . Погрешность равна  $\sigma = W - V$ .

Наиболее эффективным является нахождение оптимальной шкалы для каждого из  $n$  измерений. Более просто применение линейных шкал с изменением от измерения к измерению положения шкалы и величины шага квантования  $\delta$  (см. рис. 1, б). В дальнейшем рассматривается изменение только положения шкалы (начальной фазы  $\alpha$ ;  $0 \leq \alpha \leq \delta$ ), так как эта ситуация наиболее проста и представляет практический интерес для повышения точности как при обработке ряда измерений, так и для отдельных измерений.

Совместное распределение значений измеряемой величины  $x_1, \dots, x_n$  и погрешности  $\sigma$  может быть представлено в виде

$$f_1(\sigma, x_1, \dots, x_n) = \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \omega_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \times \\ \times \omega_y(y_1, \dots, y_n) \omega_x(x_1, \dots, x_n) \varphi[W(z_1, \dots, z_n) - \\ - \sigma/x_1, \dots, x_n] dy_1 \cdots dy_n d\alpha_1 \cdots d\alpha_n, \quad (1)$$

где

$$z_i = \delta \Pi \left[ \frac{x_i + y_i + \delta - \alpha_i}{\delta} \right]; \quad (2)$$

$\omega_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\omega_y(y_1, \dots, y_n)$ ,  $\omega_x(x_1, \dots, x_n)$  —  $n$ -мерные распределения начальной фазы квантования, случайной погрешности и измеряемой величины в моменты измерений;  $\Pi$  — целая часть числа;  $\varphi(V/x_1, \dots, x_n)$  — условное распределение искомой характеристики  $V$  (в момент  $t_0$ ). Для случая, когда  $x$ ,  $y$  и  $\alpha$  зависимы, достаточно подставить в (1) соответствующие условные распределения.

Интегрируя по всем реализациям вектора  $X$  (с компонентами  $x_1, \dots, x_n$ ), из (1) несложно записать выражение для распределения погрешности  $\sigma$ . В частности, при  $V = x(t_0) = x_0$  (задача воспроизведения процесса) и  $W = \sum_{i=1}^n a_i z_i$  получим

$$f(\sigma) = \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \omega_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \times \\ \times \omega_y(y_1, \dots, y_n) \omega_x\left(\sum_{i=1}^n a_i z_i - \sigma, x_1, \dots, x_n\right) \times \\ \times dy_1 \cdots dy_n d\alpha_1 \cdots d\alpha_n dx_1 \cdots dx_n, \quad (3)$$

где  $\omega_x(x_0, x_1, \dots, x_n)$  —  $(n+1)$ -мерное распределение измеряемой величины;  $z_i$  определяется по (2). Выражение (3) может быть записано в ином виде:

$$f(\sigma) = \sum_{k_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{N-1} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \omega_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \times \\ \times \omega_x\left(\sum_{i=1}^n a_i k_i \delta - \sigma, x_1, \dots, x_n\right) \omega_y(y_1 + k_1 \delta - x_1 - \delta + \alpha_1, \dots, \\ y_n + k_n \delta - x_n - \delta + \alpha_n) dy_1 \cdots dy_n dx_1 \cdots dx_n d\alpha_1 \cdots d\alpha_n, \quad (4)$$

где  $N$  — число квантов шкалы прибора;  $k_i = \frac{z_i}{\delta}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — целые числа. В (1) — (4) влиянием эффекта на краях шкалы пренебрегаем.

Из (4), выделяя выражение для разности векторов  $Y(y_1, \dots, y_n)$  и  $A(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , можно сделать вывод, что, если  $x$ ,  $y$  и  $\alpha$  независимы, квантование со сдвигом шкалы от измерения к измерению может быть сведено к квантованию с фиксированной для всех измерений фазой  $\alpha_k$ , но с заменой  $n$ -мерного распределения погрешности  $n$ -мерным распределением разности  $y - \alpha + \alpha_k$ . Этот вывод позволяет упростить нахождение статистических характеристик погрешности и количества измерительной информации (в частности, и для одиночного измерения при квантовании со случайной фазой).

Из (3) и (4) можно найти условные распределения  $f(\sigma/X)$  и  $f(\sigma/z_1, \dots, z_n)$  погрешности  $\sigma$  при известных значениях измеряемой величины  $x_i$  или результатов измерений  $z_i = k_i \delta$ . Например,  $f(\sigma/X)$  определяется выражением (1), деленным на  $\omega_x(X)$ . Несложно получить также выражения для моментов (условных либо осредненных). Для одного способа квантования такие выражения рассмотрены ниже.

В ряде случаев могут представлять интерес статистические характеристики не погрешности  $\sigma$ , а других величин: оценки  $\sum_{i=1}^n a_i z_i$ ; дополнительной погрешности от влияния квантования по уровню  $\sum_{i=1}^n a_i (z_i - x_i - y_i)$ ; дополнительной погрешности от влияния квантования по уровню и случайной погрешности  $\sum_{i=1}^n a_i (z_i - x_i)$ ; эти характеристики находятся аналогично. Для первого и третьего случаев, например, достаточно в (3) заменить  $\omega_x \left( \sum_{i=1}^n a_i z_i - \sigma, x_1, \dots, x_n \right)$  произведениями  $\omega_x(X)$  на  $\delta_1 \left[ \sum_{i=1}^n a_i z_i - \sigma \right]$  и  $\delta_1 \left[ \sum_{i=1}^n a_i (z_i - x_i) - \sigma \right]$ , где  $\delta_1(\tau)$  — дельта-функция.

Методы выбора фаз  $\alpha_i$ , т. е. распределение  $\omega_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , могут быть весьма различны. При анализе погрешности цифровых измерений основное внимание уделено двум случаям: квантованию с фазой  $\alpha_k$ , общей для всех измерений, и с независимыми случайными начальными фазами [1—6]. Значительное повышение точности воспроизведения (и одиночного измерения) может иметь место при изменении начальной фазы по детерминированному закону либо при комбинированном (заданном плюс случайном) характере сдвига фаз [6—8]. Здесь может быть полезен ряд вариантов: 1) сдвиг шкалы от измерения к измерению полностью задан; 2) используется  $m$  комбинаций начальных фаз  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  со случайным выбором комбинации; 3) используется случайный сдвиг серий заданных начальных фаз либо каждой фазы в серии и т. д.  $f(\sigma)$  для каждого из методов получим из (3) при подстановке соответствующего  $n$ -мерного распределения фаз, например, для первого варианта  $\omega_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{i=1}^n \delta_1(\alpha_i - \alpha_{ik})$ . При квантовании с фиксированной шкалой  $\alpha_{ik} = \alpha_k$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Квантование со сдвигом шкалы представляет, в частности, интерес

для случая, когда измеряемая величина за время  $n$  измерений меняется сравнительно мало и может быть представлена в виде некоторого разложения, например  $x = x_n + at + bt^2$ . При этом

$$f(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x_n, a, b) \left\{ \int_0^{\delta} \dots \int_0^{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\alpha}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \times \right. \\ \left. \times \omega_y(y_1, \dots, y_n) \delta_1 \left[ \sum_{i=1}^n a_i z_i - x_n - at_0 - bt_0^2 - \sigma \right] \times \right. \\ \left. \times dy_1 \dots dy_n da_1 \dots da_n \right\} db da dx_n. \quad (5)$$

Выражение в фигурных скобках в (5) — условное распределение погрешности  $f(\sigma/x_n, a, b)$ . Частные случаи (5) — погрешность при неизменном значении  $x$  за время обработки и погрешность одиночного цифрового измерения (идеального).

**Аналого-цифровое преобразование как воспроизведение по ряду отсчетов.** Реальное цифровое измерение — не мгновенный отсчет, а конечный процесс; характеристики АЦП в общем случае зависят от его алгоритма и совпадают с рассмотренной выше идеальной моделью, если сумма  $x+y$  за время измерения постоянна. Изменение  $x$  может приводить к существенной динамической погрешности АЦП,

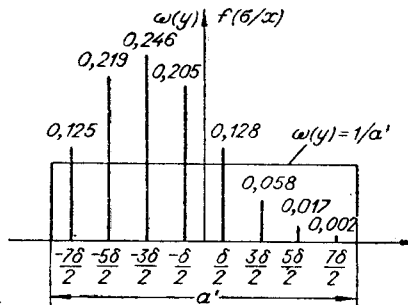


Рис. 2.

зависящей от его алгоритма и выбора момента  $t_0$ , к которому относится результат; изменение  $y$  может приводить к искажению закона распределения погрешности результатов измерений при неизменном  $x$  и, в частности, к смещению математического ожидания, т. е. появлению систематической погрешности [9—12]. В качестве примера на рис. 2 приведено условное распределение погрешности измерений  $f(\sigma/x)$  для развертывающего уравнивания при некоррелированных погрешностях  $y$  отдельных шагов (при равномерном распределении  $y$ ,  $a' = 8\delta$  и  $x = \text{Ц}\left(\frac{x}{\delta}\right) = \frac{\delta}{2}$ ).

Важно отметить, что указанная систематическая погрешность не может быть исключена при  $\delta \rightarrow 0$ , напротив, с уменьшением  $\delta$  может даже возрастать. Некоторые методы ее уменьшения рассмотрены в [12].

Аналого-цифровое преобразование обычно состоит из ряда операций сравнения и может рассматриваться как нахождение значения процесса по его отсчетам. В качестве последних выступают результаты сравнений. Каждый такой отсчет можно представить как идеальное квантование суммы  $x_i + y_i$  в момент сравнения  $t_i$  при величине кванта, равной всей шкале прибора  $L$ , числе квантов, равном двум, и фазе  $\alpha$ , равной опорному уровню  $u$ , с которым производится сравнение. Очевидно,  $0 \leq u \leq L$ . Результат такого измерения  $z_i$  может быть определен из (2), с заменой  $\delta$  на  $L$  и  $\alpha_i$  на  $u_i$ ; при этом возможны два исхода измерения:  $z_i = 0$ , если  $x_i + y_i < u_i$ , и  $z_i = L$ , если  $x_i + y_i \geq u_i$  (полагаем, что сумма  $x+y$  не выходит за шкалу).

Окончательный результат измерения  $W$  при подобном подходе находится, как и выше, в виде  $W = \sum_{i=1}^n a_i z_i$ ;  $n$  и  $a_i$  зависят от алгорит-

ма АЦП. Например, при двоичном поразрядном кодировании  $n$  равно числу разрядов, а «веса»  $a_i$  последовательных сравнений — соответственно  $1/2, 1/4, 1/8$  и т. д. Для метода единичных приращений  $a_i = \frac{1}{N}$ .

Подобный подход позволяет описать погрешность реального измерения как погрешность воспроизведения по ряду отсчетов. Основная особенность заключается здесь в том, что ход процесса аналого-цифрового преобразования обычно зависит от результатов предшествующих операций сравнения. Поэтому в приведенных выше выражениях следует заменить распределение  $\omega_a(a_1, \dots, a_n)$  на условное распределение фаз  $\omega_u(u_1, \dots, u_n/X + Y)$ , т. е. задать алгоритм изменения фаз.

Важно отметить, что рассматриваемая модель может быть дополнена звеньями, учитывающими частотные характеристики узлов АЦП.

Для АЦП с несколькими схемами сравнения число квантов для каждого грубого измерения может быть больше двух. Для некоторых АЦП в подобной модели следует полагать  $\delta \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ).

Рассмотренный подход может быть использован не только для одиночного измерения, но при воспроизведении по ряду результатов измерений, не отвечающих идеальной модели, и, в частности, позволяет предложить и описать группу новых алгоритмов АЦП.

**Новые методы аналого-цифрового преобразования.** В рассматриваемых преобразователях используется не уравнивание измеряемой величины (подразрядное и т. п.), а суммирование результатов  $n$  операций сравнения, причем выбор фаз  $u_i$  не зависит от исходов сравнений. Математически такие алгоритмы полностью соответствуют постановке задачи воспроизведения по  $n$  грубым отсчетам; при этом в отличие от обычных АЦП распределение  $\omega_u(u_1, \dots, u_n)$  не зависит от  $X$  и  $Y$ .

Многообразие возможных алгоритмов и схем подобных АЦП определяется наличием большого числа представляющих интерес распределений  $\omega_u(u_1, \dots, u_n)$ . Как указывалось выше, особый интерес вызывает изменение фазы от сравнения к сравнению по заданному закону и комбинация этого метода со случайным выбором последовательности фаз либо случайными вариациями их значений. Даже для простейшего случая — заданных фаз  $u_i$  — использование различных алгоритмов их смены может существенно влиять на характеристики подобного АЦП (его случайную и динамическую погрешности).

Рассмотрим АЦП с детерминированной сменой заданных фаз  $u_i = (i - 1)\delta + \alpha$ , где  $i = 1, \dots, N$ ;  $0 \leq \alpha < \delta$ ;  $\alpha, \delta = \frac{L}{N}$  и  $N$  — эквивалентные параметры идеального квантователя.

Пример структурной схемы такого преобразователя приведен на рис. 3, а (СФΟΥ — схема формирования опорных уровней; СС — схема сравнения; Сч — счетчик; СУ — схема управления). СУ с помощью

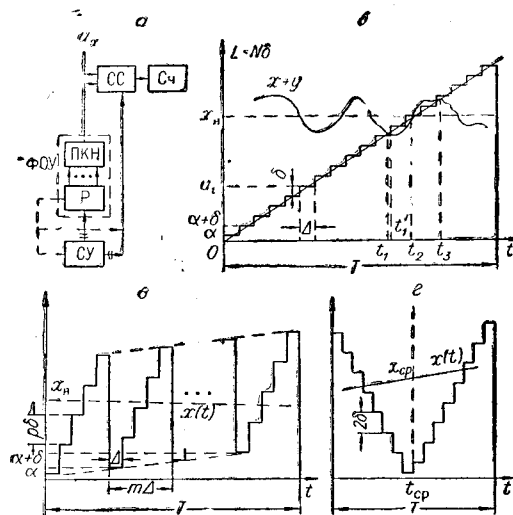


Рис. 3

схемы СФОР формирует очередной опорный уровень и подает импульс опроса на схему сравнения. Если СС сработала, ее выходной импульс поступает на счетчик Сч. Число таких операций всегда равно  $N$ . В отличие от обычных АЦП последовательность перебора  $N$  опорных уровней в принципе может быть произвольной и не зависит от результатов сравнений (от  $X$  и  $Y$ ). Некоторые соображения по ее выбору рассматриваются ниже. Окончательный результат после  $N$  сравнений содержится в счетчике Сч.

На рис. 3, а СФОР реализована в виде регистра  $P$ , управляющего преобразователем кода в напряжение (ПКН). При этом ввод уровня  $u_i$  осуществляется как ввод соответствующего кода на  $P$ . Штрихами показан простейший вариант управления схемой, при котором уровни выбираются в порядке их увеличения. Импульсы из СУ поступают на вход счетчика  $P$  (с емкостью  $N$  импульсов) до его переполнения. Подобный метод внешне сходен с обычным развертывающим кодированием. Однако в обычном АЦП процесс измерения заканчивается при первом же срабатывании СС (в момент  $t_1$ ; см. рис. 3, б); здесь же он проходит независимо от срабатывания СС (до перебора всех опорных уровней). В частности, для рис. 3, б на счетчик Сч поступают импульсы и в интервале  $t_2 - t_3$ .

Рассматриваемый способ может быть использован и при непрерывном уравнивании (при  $\delta \rightarrow 0$ ); в этом случае измеряется суммарное время нахождения СС в одном из состояний ( $0 - t_1$  и  $t_2 - t_3$ ). Характеристики погрешности  $\sigma$  подобных АЦП могут быть получены как частный случай из выражений для погрешности воспроизведения, если положить число квантов шкалы равным двум, число измерений  $n$  — числу операций сравнения  $N$ , величину кванта равной  $L$ ,  $a_i = u_i$  и  $a_i = \frac{1}{N}$ .

Запишем выражения для условных математического ожидания и дисперсии погрешности  $\sigma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i - x_0$ . Результат  $i$ -го опроса  $z_i$  —

случайная величина, принимающая значение  $L = N\delta$  с вероятностью  $P(z_i/x_i) = P_i = 1 - F(u_i - x_i)$  ( $x$  и  $y$  полагаем независимыми) и значение 0 с вероятностью  $(1 - P_i)$ . Очевидно,  $M(z_i/x_i) = L P_i$  и

$$M(\sigma/X) = \frac{L}{N} \left[ N - \sum_{i=1}^N F(u_i - x_i) \right] - M(x_0/X); \quad (6)$$

$$M(\sigma^2/X) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_{ij} + M(x_0^2/X), \quad (7)$$

где  $F(y)$  — интегральный закон распределения погрешности  $y$ ,  $R_{ij} = M(z_i z_j/x_i, x_j)$  — условный корреляционный момент результатов  $i$ -го и  $j$ -го сравнений (точка сверху обозначает центрированную величину). Для стационарного процесса  $y$

$$R_{ij} = N^2 \delta^2 \left\{ \int_{u_i}^{\infty} \int_{u_j}^{\infty} \omega_y(\xi_1 - x_i, \xi_2 - x_j, t_i - t_j) d\xi_1 d\xi_2 - [1 - F(u_i - x_i)] [1 - F(u_j - x_j)] \right\}. \quad (8)$$

В частности, если погрешности опросов  $y_i (i = 1, \dots, n)$  не коррелированы, при  $i \neq j$   $R_{ij} = 0$  и

$$M(\hat{\sigma}^2/X) = \delta^2 \sum_{i=1}^N F(u_i - x_i) [1 - F(u_i - x_i)] + M(x_0^2/X). \quad (9)$$

Если погрешности опросов равны, при  $u_i - x_i \leq u_j - x_j$   $R_{ij} = P_j (1 - P_i) \delta^2 N^2$  (нормированный корреляционный момент  $r_{ij} = \frac{R_{ij}}{\sqrt{R_{ii} R_{jj}}} = \sqrt{\frac{(1 - P_i) P_j}{P_i (1 - P_j)}}$ ).

Из (6) и (7) несложно найти  $M(\sigma^2/X)$  и  $M(\sigma^2)$ ; эти моменты в общем случае существенно зависят от последовательности опросов.

1. Рассмотрим частный случай, когда значение  $x$  за время измерения может считаться неизменным (и  $x_0$  равным  $x$ ). С учетом выбранных значений  $u_i$  из (6) получим

$$M(\sigma/x) = \delta \left[ N - \sum_{i=1}^N F(i\delta - \delta + \alpha - x) \right] - x. \quad (10)$$

Дисперсия  $M(\hat{\sigma}^2/x)$  для двух случаев, когда погрешности опросов  $y_i (i = 1, \dots, N)$  не коррелированы и когда они равны между собой, имеет вид:

$$\begin{aligned} M(\hat{\sigma}^2/x) &= \delta^2 \sum_{i=1}^N F(i\delta - \delta + \alpha - x) [1 - F(i\delta - \delta + \alpha - x)]; \quad (11) \\ M(\hat{\sigma}^2/x) &= \delta^2 \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{j=1}^i (1 - P_j) P_i + \sum_{j=i+1}^N P_j (1 - P_i) \right] = \\ &= \delta^2 \left[ \sum_{i=1}^N (2i - 1) P_i - \left( \sum_{i=1}^N P_i \right)^2 \right] = \delta^2 \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N F(i\delta - \delta + \alpha - x) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N (2N - 2i + 1) F(i\delta - \delta + \alpha - x) \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

Несложно убедиться, что, если эффектом на краях шкалы можно пренебречь, т. е. если  $F(N\delta - x) \approx 1$  и  $F(-x) \approx 0$ , (10) и (12) совпадают с выражениями для идеального квантования (с квантом  $\delta$ , фазой  $\alpha$  и числом квантов  $N$ ). Например, для  $M(\sigma/x)$  при идеальном квантовании получим

$$\begin{aligned} M(\sigma/x) &= \sum_{i=1}^N i\delta [F(i\delta - x + \alpha) - F(i\delta - \delta - x + \alpha)] - x = \\ &= \delta \left[ N F(N\delta - x + \alpha) - \sum_{i=1}^N F(i\delta - \delta - x + \alpha) \right] - x. \end{aligned}$$

Итак, для рассматриваемых методов математическое ожидание погрешности  $M(\sigma/x)$  — то же, что и при идеальном квантовании, независимо от степени корреляции погрешностей  $y$  отдельных опросов и последовательности перебора начальных фаз. В частности, при  $\delta \rightarrow 0$   $M(\sigma/x) \rightarrow 0$ . Таким образом, в предлагаемых АЦП исключается существенный недостаток обычных алгоритмов.

Дисперсия  $M(\hat{\sigma}^2/x)$  совпадает со случаем идеального квантования при 100% корреляции погрешностей опросов и может быть значительно меньше, если погрешность  $y$  за время измерения существенно меняется. Покажем это. При пренебрежении краевым эффектом зависимости

$M(\sigma/x)$  и  $M(\sigma^2/x)$  от  $x$  в (10), (11) и (12) являются периодическими с периодом  $\delta$ . Интегрируя по  $x$ , из (11) для осредненной дисперсии получим

$$D_1 = \int_L \omega_x(x) M(\sigma^2/x) dx \approx \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} M(\sigma^2/x) dx \approx \delta \int_{-\infty}^{\infty} F(y) [1 - F(y)] dy. \quad (13)$$

Из (13) следует, что при некоррелированных погрешностях  $u_i$  дисперсия  $D_1$  обратно пропорциональна числу опросов  $N$  и при большом  $N$  может быть значительно меньше дисперсии погрешности при идеальном квантовании с тем же квантом  $\delta = \frac{L}{N}$  (и дисперсии случайной погрешности  $D_y$ ). Этот вывод объясняется тем, что при использовании предлагаемых алгоритмов имеет место осреднение за одно измерение (результатов  $N$  грубых измерений). В частности, при  $\delta \rightarrow 0$  в рассматриваемом случае  $D_1 \rightarrow 0$ , а при идеальном квантовании  $D_{1н} \rightarrow D_y$ . При равномерном распределении  $y$  с плотностью  $\frac{1}{a'}$  для этих двух случаев из (13) и [6] имеем:  $D_1 = \frac{a' \delta}{6}$  и  $D_{1н} = \frac{1}{12} \left[ (a')^2 + \delta^2 + \left( \frac{\delta_3}{a'} \right)^2 (\delta - \delta_3)^2 \right]$ , где  $\delta_3 = a' - \delta \text{Ц} \left( \frac{a'}{\delta} \right)$ .

Таким образом, рассматриваемые алгоритмы не только исключают недостатки обычных АЦП при слабой корреляции погрешностей шагов  $u_i$ , но в ряде случаев позволяют заметно повысить точность и по сравнению с идеальным квантованием.

В (11) и (12) последовательность выбора фазы  $u_i$  значения не имеет; в общем случае  $M(\sigma^2/x)$  и  $D_1$  в отличие от  $M(\sigma/x)$  зависят от этой последовательности. Если процесс  $y$  — нормальный, для нахождения оптимального алгоритма выбора фаз  $u_i$ , при котором  $D_1$  минимальна, достаточно знать корреляционную функцию  $R_y(t)$  и интервал  $\Delta$  между опросами.

Рассмотрим некоторые достаточно простые алгоритмы, представляющие практический интерес. На рис. 3, в общее число шагов  $N$  разбивается на  $p$  серий;  $N = pm$ . Преимуществом такого алгоритма является пригодность его для всех  $x$ , возможность уменьшения динамической погрешности и простота реализации: достаточно в счетчике Р (см. рис. 3, а) первыми триггерами (осуществляющими деление на  $m$ ) управлять последними ключами в ПКН (с большим «весом»), а последующими триггерами (осуществляющими деление на  $p$ ), наоборот — первыми ключами. Возможны различные варианты такого алгоритма.

Как видно из (8),  $R_{ij} \approx 0$ , если хотя бы для одного из значений  $u_i$  или  $u_j$   $F(u-x) \approx 1$  или  $F(u-x) \approx 0$ , т. е. практически важна степень корреляции погрешностей опросов с фазами  $u$ , близкими к  $x$ . Уменьшение дисперсии  $M(\sigma^2/x)$  при подобных алгоритмах достигается за счет того, что для всех  $x$  соседние во времени опросы, погрешности которых могут быть заметно коррелированы, разнесены по величине фаз  $u$  (шаг  $p\delta$  вместо  $\delta$ ), а опросы с близким между собой и с  $x$  значениями фаз разнесены по времени (шаг  $m\Delta$  или  $2m\Delta$  вместо  $\Delta$ ). Так, для приведенного выше примера, если при  $t \geq m\Delta$   $R_y(t) \approx 0$  и  $p\delta \geq a'$ , то  $D_1 = \frac{a' \delta}{6}$



даже при  $R_y(\Delta) \approx 1$ . Выигрыш по сравнению с выбором фаз по рис. 3, б может быть значителен.

2. Рассмотрим динамическую погрешность, связанную с изменением  $x$  за время измерения. Эта погрешность существенно зависит от алгоритма перебора фаз  $u_i$  и метода выбора  $t_0$ .

Полагая, что за время измерения  $x = x_n + at$  и используется выбор фаз по рис. 3, б, из (6) получим

$$M(W/x_n, a) = \delta \left[ N - \sum_{i=1}^N F(u_i - x_i) \right] = \delta \left\{ N - \sum_{i=1}^N F[i(\delta - a\Delta) - x_n'] \right\}, \quad (14)$$

где  $x_n' = x_n + \delta - a$ . Из (14) и (10) следует, что при пренебрежении крайевым эффектом  $M(W/x_n, a)$  равно отношению  $\frac{\delta}{\delta - a\Delta}$ , умноженному на условное математическое ожидание результата  $M(W_n/x_n')$  при идеальном квантовании,  $x = x_n$ , величине кванта  $\delta' = \delta - a\Delta$  и фазе  $\alpha' = \delta'$ , т. е.

$$M(W/x_n, a) = \frac{\delta}{\delta'} \left\{ x_n' - \frac{\delta'}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta'}{\pi i} C_i \sin \left( i \frac{2\pi}{\delta'} x_n' + \beta_i \right) \right\}, \quad (15)$$

где

$$C_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}; \quad \beta_i = \operatorname{arctg} \frac{B_i}{A_i}; \quad A_i = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_y(y) \cos \frac{i 2\pi y}{\delta'} dy;$$

$$B_i = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_y(y) \sin \frac{i 2\pi y}{\delta'} dy.$$

Алгоритм по рис. 3, в может быть представлен как  $p$  измерений с квантом  $\delta_2 = p\delta$ , но с разными значениями  $\alpha_j$ ,  $x_{nj}$  и в общем случае  $a_j$ ; при этом

$$M(W/x_n, a, \dots) = \sum_{j=1}^p M(W_j/x_{nj}, a_j). \quad (16)$$

При линейном изменении  $x$  за время измерения

$$M(W/x_n, a) = \frac{\delta_2}{\delta_2 - a\Delta} \left\{ x_n + \frac{a\Delta}{2} + \frac{p-1}{2p} aT + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_2'}{\pi i} C_i' \times \right.$$

$$\left. \times \sin \left( E_i + \frac{p-1}{2} K_i \right) \frac{\sin \frac{p K_i}{2}}{\sin \frac{K_i}{2}} \right\}, \quad (17)$$

где  $E_i = i \frac{2\pi}{\delta_2} \left( x_n + a\Delta - \frac{\delta}{2} \right) + \beta_i'$ ;  $K_i = i \frac{2\pi}{\delta_2'} \left( \frac{aT}{p} - \delta \right)$ ;  $C_i'$  и  $\beta_i'$  определяются как  $C_i$  и  $\beta_i$ , но с заменой  $\delta'$  на  $\delta_2' = \delta_2 - a\Delta$ . Последнее слагаемое в фигурных скобках лежит между погрешностями идеального квантования с квантами  $\delta_2'$  и  $\frac{\delta_2'}{p}$ .

Для уменьшения динамической погрешности большой интерес представляет последовательность выбора фаз по рис. 3, г. Для ее реализации

з качестве Р (см. рис. 3, а) следует использовать реверсивный счетчик. Здесь как бы осредняются два измерения с отработкой от  $t_{cp}$  и  $M(W/x_{cp}, a)$  определяется по (16), где  $a_1 = -a$ ;  $a_2 = a$ ;  $p = 2$ .

Если влиянием квантования по уровню можно пренебречь,  $M(W/x_{cp}, a)$  для алгоритмов по рис. 3, в и г приближенно равно  $(x_{cp} - \frac{aT}{2p}) \left(1 - \frac{aT}{pL}\right)^{-1}$  и  $x_{cp} \left[1 - \left(\frac{aT}{2L}\right)^2\right]^{-1}$ . Важно отметить, что характер зависимости динамической погрешности от  $x_{cp}$  и  $a$  при общем датировании результата (т. е. при выборе  $t_0$ , независимом от  $W$ ) для алгоритмов по рис. 3, б, в и г различны. В первых двух случаях (при  $\frac{aT}{L} \ll 1$  и  $t_0 = t_{cp}$ ) величина погрешности приближенно равна  $\frac{aT}{p} \left(\frac{x_{cp}}{L} - \frac{1}{2}\right)$ , т. е. содержит составляющие — не зависящую от  $x$  и пропорциональную  $x$ . Знак погрешности зависит и от  $a$ , и от  $x_{cp}$ . В третьем случае погрешность пропорциональна  $x_{cp}$  и не отрицательна. При  $\frac{aT}{L} \cdot 100\% = 2\%$  максимальное значение динамической погрешности для указанных случаев составит 1%, 1/p% (при  $p=10$ —0,1%) и 0,01%, т. е. третий алгоритм при общем датировании весьма эффективен. Представляет интерес также комбинированный алгоритм (по рис. 3, в и г).

Для оптимального выбора  $t_0$  при общем датировании результата минимизируется дисперсия  $M(\sigma^2)$ . В частности, если изменение  $x$  за время измерения полагается линейным, имеем:

$$M(\sigma^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x_n, a) \{ [M(W/x_n, a) - x_n - at_0]^2 + M(W^2/x_n, a) \} da dx_n,$$

откуда

$$t_0 = \frac{1}{M(a^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x_n, a) a [-x_n + M(W/x_n, a)] da dx_n. \quad (18)$$

При индивидуальном датировании результата цифрового измерения (или результата  $W$  обработки  $n$  измерений  $z_i$ ) минимизируется условная дисперсия  $M(\sigma^2/W)$  или  $M(\sigma^2/z_1, \dots, z_n)$ . Такой метод эффективен (особенно для алгоритмов по рис. 3, б и в), но усложняет обработку.

3. Итак, рассматриваемые методы позволяют исключить недостатки обычных алгоритмов, связанные с изменением  $y$  за время измерения (и даже повысить точность по сравнению с идеальным квантованием). Независимость выбора фаз от  $x$  упрощает также уменьшение динамической погрешности.

Выше и значения фаз, и последовательность их перебора полагались заданными. Совмещение подобных алгоритмов со случайным изменением этих параметров открывает дополнительные возможности. Например, если использовать случайное смещение для серий из  $N$  фаз либо каждой фазы и принять это смещение распределенным равномерно в диапазоне  $0 - \delta$ , то  $M(\sigma/x) = 0$  при любом  $\delta$ . Другой пример: если в АЦП по рис. 3, а начальное положение счетчика — случайный код с равномерным распределением, аргумент результата измерения приближенно также распределен равномерно (независимо от  $x$ ), что может быть полезно при осреднении (т. е. систематическая динамическая погрешность может быть преобразована в случайную).

Рассматриваемые алгоритмы обладают высокой помехоустойчивостью. В обычных АЦП ложное срабатывание схемы сравнения может привести к большим ошибкам, вплоть до  $L$ ; здесь же погрешность составляет единицу младшего разряда  $\delta = L/N$ .

Как указывалось, эффективность подобных методов связана с осреднением в малой области  $L'$ , примыкающей к  $x$ ; применять их для всего диапазона  $L$  нет никакой необходимости. Это позволяет существенно повысить быстродействие, поскольку отношение  $L/L'$  составляет обычно 2 порядка и более.

Рассматриваемые методы наиболее целесообразно использовать во второй ступени двухступенчатых преобразователей, служащей для точного измерения в узком диапазоне. Первая (грубая) ступень при этом может быть весьма быстродействующей (построена по методам одного отсчета, поразрядному, единичных приращений с большим квантом). Большой интерес подобный алгоритм представляет также при осреднении приращений от некоторого уровня, определяемого измеряемой величиной. Характер работы двухступенчатых преобразователей и устройств с осреднением приращений [12] понятен из рис. 4. При обработке ряда измерений (или приращений) алгоритмы смены фаз для каждого из измерений могут быть различны.

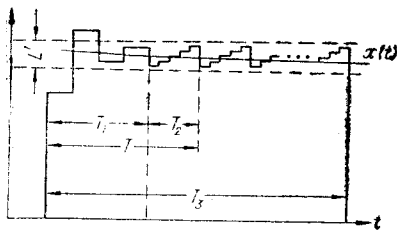


Рис. 4.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Шенброт. О методической ошибке цифрового измерения случайного процесса.— *Автометрия*, 1968, № 2.
2. В. М. Ефимов. Статистические характеристики погрешности цифрового воспроизведения.— В сб. «Информационные методы в системах управления, измерений и контроля». Владивосток, 1968.
3. И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. М., Гостехиздат, 1955.
4. А. С. Немировский. Вероятностные методы в измерительной технике. М., Стандартгиз, 1964.
5. М. Л. Езерский, А. М. Куперман. О выборе шага квантования по уровню и по времени при цифровом осреднении.— *Автометрия*, 1967, № 4.
6. С. М. Персин. Квантование по уровню при цифровых измерениях.— *Автометрия*, 1969, № 2.
7. С. М. Персин. Исследование некоторых алгоритмов цифровых измерений. Кибернетические методы в теории и практике измерений.— VII Всесоюзная научно-техническая конференция. Тезисы докладов. Л., 1970.
8. L. V. Haggis. Random Time — Modulation of the Main Band for Increased Accuracy in Digital Range Measurement.— *IRE Trans. Acron. and Nanig. Electronics*, 1956, v. 3, № 2.
9. П. Е. Твердохлеб. Свойства случайных погрешностей цифратора поразрядного уравновешивания с двоичной системой кодирования.— *Автометрия*, 1966, № 2.
10. А. Н. Касперович, Н. В. Литвинов. К вопросу о динамической ошибке цифрового прибора поразрядного уравновешивания.— *Автометрия*, 1967, № 2.
11. В. М. Ефимов, В. И. Рабинович. О погрешности цифрового прибора, обусловленной изменением измеряемой величины за время измерения.— *Автометрия*, 1967, № 2.
12. С. М. Персин. Некоторые вопросы статистической обработки результатов измерений.— В сб. «Информационные методы в системах управления, измерений и контроля». Владивосток, 1968.

Поступила в редакцию  
14 сентября 1970 г.