

**В. И. ВАСИЛЬЕВ, В. С. ДАВЫДОВ**  
 (Новосибирск)

### ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СИГНАЛОВ, ЗАДАНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ

При проектировании дискретных систем передачи информации возникают задачи установления процедуры представления непрерывной функции на дискретном множестве отсчетов. Вопросы оптимальной дискретизации сигналов наиболее полно рассмотрены в работах Н. А. Железнова. Однако в большинстве практических случаев оптимальная обработка сигналов затруднена, что вызывает потребность в разработке методов оценки точности представления количественных данных при неоптимальном разложении сигналов.

Ниже рассматривается дискретизация случайных стационарных сигналов и синтез разложения на основе обобщенного ряда Фурье. Корреляционная функция случайного сигнала  $R(t)$  предполагается известной, а эффективный интервал корреляции  $\tau_0 \ll T$ , где  $[0, T]$  — время существования реализации сигнала  $f(t)$ . В качестве критерия верности используется функционал [1]

$$\nu = \frac{1}{T} \int_0^T M \{ \Delta^2(t) \} dt, \quad (1)$$

где  $\Delta(t) = f(t) - f_N(t)$  — ошибка при замене сигнала  $f(t)$  функцией  $f_N(t)$ , полученной на выходе схемы разложения. Функция  $f(t)$  предполагается интегрируемой вместе со своим квадратом на интервале  $[0, T]$ .

Минимум среднеквадратичной ошибки при ограниченном числе членов разложения  $N = T/\tau$  ( $\tau$  — интервал дискретизации) достигается в случае представления функции  $f(t)$  отрезком ряда Фурье в системе ортогональных функций  $\{ \varphi_k(t) \}$  [2]

$$f_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi_k(t), \quad (2)$$

где

$$a_k = \int_0^T f(t) \varphi_k(t) dt; \quad (3)$$

$$\int_0^T \varphi_k(t) \varphi_m(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } k = m; \\ 0 & \text{при } k \neq m. \end{cases} \quad (4)$$

Положим

$$\varphi_k(t) = \varphi(t - k\tau) = \begin{cases} \varphi(t); & k\tau \leq t \leq (k+1)\tau; \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases} \quad (5)$$

Без потери общности можно считать математическим ожиданием сигнала  $M\{f(t)\} = 0$ , а его нормой  $\|f(t)\| = 1$ . Подставив (2) в (1) и учитывая условия (3)—(5), находим

$$\begin{aligned} \nu &= 1 - \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \varphi(t) \int_0^{\tau} \varphi(x) R(t, x) dx dt + \\ &+ \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \varphi^2(t) \int_0^{\tau} \varphi(x) \int_0^{\tau} \varphi(y) R(x, y) dx dy dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Можно показать, что функция  $\varphi(x)$ , доставляющая минимум выражению (6), удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^{\tau} \varphi(x) R(x, t) dx = 0, \quad (7)$$

где

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\tau} \varphi(x) \int_0^{\tau} \varphi(y) R(x, y) dx dy. \quad (8)$$

Если собственные числа (7) расположены так, что

$$\frac{1}{\lambda_1} \geq \frac{1}{\lambda_2} \geq \dots \geq \frac{1}{\lambda_n}, \quad (9)$$

то минимум (6) доставляет функция  $\varphi(t)$ , являющаяся решением (7) при  $\lambda = \lambda_1$  [2—4]. Тогда из (6) имеем

$$\nu = 1 - \frac{1}{\tau \lambda_1}. \quad (10)$$

Минимальная ошибка достигается при разложении сигнала  $f(t)$  по нескольким функциям  $\varphi_i(t)$ ,  $i = 1 \div n$ . В этом случае

$$f_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^n a_{ik} \varphi_{ik}(t); \quad (11)$$

$$\varphi_{ik}(t) = \varphi_i(t - k\tau) = \begin{cases} \varphi_i(t); & k\tau \leq t \leq (k+1)\tau; \\ 0 & \text{при других } t; \end{cases} \quad (12)$$

$$a_{ik} = \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} f(t) \varphi_i(t - k\tau) dt; \quad (13)$$

$$\nu = 1 - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}. \quad (14)$$

Из (14) по заданной величине ошибки  $\nu$  можно найти  $n$  при известном  $\tau$ . Схему разложения сигнала  $f(t)$ , согласно (11), назовем многоканальной дискретной системой связи (рис. 1). При  $n=1$  получаем одноканальную дискретную систему класса  $A[1]$ .

Фильтры с импульсными переходными характеристиками, определяемыми согласно (7), практически трудно реализовать. Поэтому формулы (10) и (14) можно использовать для расчета предельно достижимой верности разложения сигнала.

Представляет интерес найти оценку точности схемы разложения с стиком  $\varphi_1(t)$ , фильтр  $\varphi_2(t)$ , а отсчеты сигнала после фильтра  $\Phi_1$  берутся в моменты времени  $t = k\tau$ . Положим

$$\varphi_{ik}(t) = \varphi_i(t - k\tau) = \begin{cases} \varphi_i(t); & k\tau \leq t \leq (k+1)\tau; \\ 0 & \text{при других } t; \end{cases} \quad (15)$$

$$\int_0^T \varphi_i(t - k\tau) \varphi_i(t - m\tau) dt = \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \varphi_i(t - k\tau) \varphi_i(t - m\tau) dt = \begin{cases} \delta_i & \text{при } m = k; \\ 0 & \text{при } m \neq k; \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (16)$$

Тогда для ошибки разложения имеет место следующее выражение:

$$\nu = 1 - \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \varphi_2(t) \int_0^{\tau} R(t, x) \varphi_1(x) dx dt + \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \varphi_2^2(t) \int_0^{\tau} \varphi_1(x) \int_0^{\tau} \varphi_1(y) R(x, y) dx dy dt. \quad (17)$$

При известной функции корреляции и заданном фильтре  $\Phi_1$  или  $\Phi_2$  можно найти другой фильтр, минимизирующий (17). Если фильтры не заданы, то, принимая  $\varphi_2(t) = \varphi_1(t) = \varphi(t)$ , получим (6).

Для практических целей желательно иметь фильтры, не зависящие от вида сигнала. Удобно принять импульсные переходные характеристики фильтров:

$$\varphi_1(t - k\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}; & k\tau \leq t \leq (k+1)\tau; \\ 0 & \text{при других } t; \end{cases} \quad (18)$$

$$\varphi_2(t - k\tau) = \begin{cases} 1; & k\tau \leq t \leq (k+1)\tau; \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

Подставив выражения (18) в (17), находим

$$\nu = 1 - \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) R(t) dt. \quad (19)$$

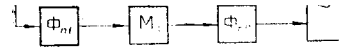


Рис. 1. Многоканальная дискретная система разложения:

Д — датчик сигнала  $f(t)$ ; ГИ — генератор опорных импульсов;  $\Phi_{i1}$  и  $\Phi_{i2}$  — входные и выходные фильтры;  $M_i$  — модулятор.

Используя результаты [5] для значения первого собственного числа интегрального уравнения (7), легко найти оценки для ошибки дискретизации сигнала:

$$1 - \sup_{-\infty < \omega < \infty} \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) R(t) \cos \omega t dt \geq \nu; \quad (20)$$

$$1 - \sup_{-\infty < \omega < \infty} \frac{2}{\tau} \int_0^{\infty} R(t) \cos \omega t dt \leq \nu.$$

Если функция корреляции сигнала неотрицательна, то

$$1 - \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) R(t) dt \geq \nu \geq 1 - \frac{2}{\tau} \int_0^{\infty} R(t) dt. \quad (21)$$

Сравнивая (19) и (21), видим, что ошибка разложения (19) совпадает с верхней оценкой точности оптимального разложения (10) при неотрицательной функции корреляции сигнала, т. е. схема разложения с фильтрами (18) близка к оптимальной.

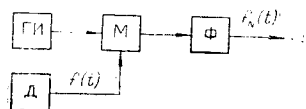


Рис. 2. Схема разложения класса В.

Из (17) легко получить выражение для ошибки разложения при отсутствии фильтра  $\Phi_1$  (рис. 2). Следуя [1], будем называть такую схему схемой разложения класса В. Полагая переднюю характеристику фильтра  $\Phi_1 h_1(t) \equiv 1$ , а

$$\varphi_2(t - k\tau) = \begin{cases} \varphi(t); & k\tau \leq t \leq (k+1)\tau; \\ 0 & \text{при других } t, \end{cases} \quad (22)$$

получим

$$\nu = 1 - \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \varphi(t) R(t) dt + \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \varphi^2(t) dt. \quad (23)$$

Из (23), составляя уравнение Эйлера, находим:

$$\varphi(t) = R(t); \quad (24)$$

$$\nu = 1 - \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} R^2(t) dt. \quad (25)$$

Выбрав фильтр  $\Phi_2$ , согласно (18), имеем схему разложения, не зависящую от функции корреляции сигнала, с ошибкой, определяемой из (23):

$$\nu = 2 \left[ 1 - \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} R(t) dt \right]. \quad (26)$$

Если коэффициент передачи фильтра  $\Phi_2$  изменять в зависимости от шага дискретизации, то можно получить более точную схему разложения. Положим

$$\varphi(t - k\tau) = \begin{cases} \varphi(t) = \alpha; & k\tau \leq t \leq (k+1)\tau; \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases} \quad (27)$$

Тогда из (23) находим

$$\varphi(t) = a = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} R(t) dt; \quad (28)$$

$$\nu = 1 - \left[ \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} R(t) dt \right]^2. \quad (29)$$

Выбор интервала дискретизации  $\tau$  реальных сигналов часто выполняют на основе теоремы В. А. Котельникова [6] для сигналов с прямоугольным спектром, ограниченным частотой  $\omega_0$ . Можно показать, что для таких сигналов разложение с помощью схем класса *A* и класса *B* равноценно при  $\tau = \frac{\pi}{\omega_0}$ . В схеме класса *A*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{\sin \omega_0(t - k\tau)}{\omega_0(t - k\tau)} \quad \text{при } \tau = \frac{\pi}{\omega_0}, \quad (30)$$

где

$$a_k = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin \omega_0(t - k\tau)}{\omega_0(t - k\tau)} dt; \quad (31)$$

в схеме класса *B*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\tau) \frac{\sin \omega_0(t - k\tau)}{\omega_0(t - k\tau)} \quad \text{при } \tau = \frac{\pi}{\omega_0}. \quad (32)$$

Для реальных сигналов эти схемы дают различную точность. Выражение (6) получено с учетом ортогональности функций и остается верным для идеального фильтра, нормированная импульсная переходная характеристика которого определяется следующим выражением:

$$\varphi(t) = \frac{1}{V\tau} \frac{\sin \frac{\pi}{\tau} t}{\frac{\pi}{\tau} t}. \quad (33)$$

Подставив (33) в (6) и заменив интервал интегрирования симметричным  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ , находим

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \nu = 1 - \frac{2}{\tau} \int_0^{\infty} R(t) \frac{\sin \frac{\pi}{\tau} t}{\frac{\pi}{\tau} t} dt. \quad (34)$$

Аналогично для схемы класса *B* из (23) получим

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \nu = 2 \left[ 1 - \frac{2}{\tau} \int_0^{\infty} R(t) \frac{\sin \frac{\pi}{\tau} t}{\frac{\pi}{\tau} t} dt \right], \quad (35)$$

т. е. данная схема обеспечивает точность разложения в два раза хуже схемы класса А. Идеальные фильтры практически нереализуемы, поэтому полученные выражения представляют интерес только теоретически. Схемы с идеальными фильтрами дают высокую верность разложения в своем классе схем.

Формулы (10), (19), (21), (25) согласуются с результатами, полученными в работе [1], формула (26) — с [7], формула (25) — с [8]. Несмотря на то, что формулы получены для стационарных сигналов, приведенные результаты верны также и для квазистационарных сигналов, если  $\tau_0 \ll T$  [1], при замене их эквивалентным стационарным случайным процессом.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для любых схем разложения случайных сигналов с неограниченным спектром ошибка разложения  $\nu$  зависит от вида функции корреляции  $R(t)$  и интервала дискретизации  $\tau$ . Сравнить различные схемы можно по коэффициенту избыточности  $\gamma = N/N_0$ , где  $N_0 = T/\tau_0$  — число некоррелированных «в среднем» отсчетов;  $N = T/\tau$  — требуемое число отсчетов для достижения заданной верности  $\nu$ . Подставив  $N$  и  $N_0$  в выражение для  $\gamma$ , получим

$$\gamma = \tau_0/\tau. \quad (36)$$

Лучшей следует считать схему, в которой при одинаковой верности  $\nu$  требуется меньший коэффициент избыточности. Наиболее простыми получаются выражения  $\nu$  при

$$R(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau_0}; & |t| \leq \tau_0; \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases} \quad (37)$$

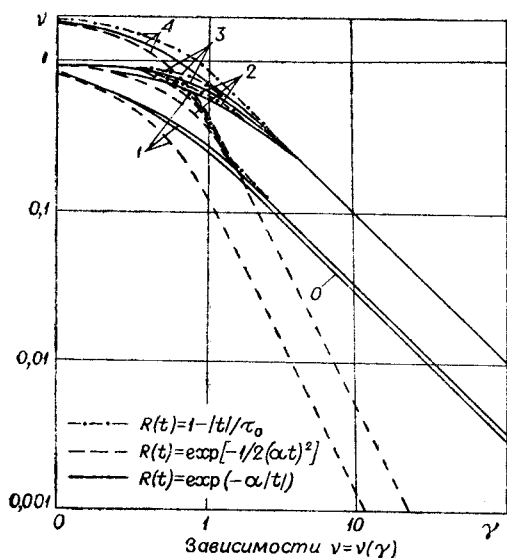


Рис. 3. Зависимость  $\nu = \nu(\gamma)$ :  
0 — разложение по собственным функциям; 1 — разложение класса А с фильтрами (18); 2 — разложение класса В с  $\Phi(t) = R(t)$ ; 3 — разложение класса В с  $\Phi(t)$  из (18); 4 — разложение класса В с  $\Phi(t) = 1$ .

Находим:

для схемы класса А с фильтрами (18)

$$\nu = \frac{1}{3\gamma}; \quad \gamma \geq 1; \quad (38)$$

для схемы класса В с фильтром (18)

$$\nu = \frac{1}{\gamma}; \quad \gamma \geq 1; \quad (39)$$

для схемы класса В с фильтром (27)

$$\nu = \frac{1}{\gamma} \left( 1 - \frac{1}{4\gamma} \right), \quad \gamma \geq 1. \quad (40)$$

Можно рекомендовать выбор  $\gamma$  по заданному  $\nu$  из (38) — (40), а затем уточнить  $\nu$  по формулам (19), (26), (29). На рис. 3 приведены зависимости  $\nu = \nu(\gamma)$  в различных схемах разложения для трех

функций корреляции:  $R(t)$ , определяемой выражением (37);  $R(t) = \exp(-a|t|)$ ,  $\tau_0 = 1/a$ ;  $R(t) = \exp\left[-\frac{1}{2}(at)^2\right]$ ,  $\tau_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a}$ . Выбор этих функций обусловлен тем, что широкий класс корреляционных функций занимает промежуточное положение между ними [9].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Железнов. Принцип дискретизации стохастических сигналов с неограниченным спектром и некоторые результаты теории импульсной передачи сообщений.— Радиотехника и электроника, 1958, т. 3, вып. 1.
2. Л. Я. Цлаф. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М., «Наука», 1966.
3. С. Г. Михлин. Интегральные уравнения. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
4. И. И. Привалов. Интегральные уравнения. М.—Л., ОНТИ, 1937.
5. И. В. Козин. Оценка наибольшего собственного числа интегрального уравнения.— Труды ЛИАП «Системы обработки и передачи информации», вып. 63. Л., 1969.
6. В. А. Котельников. Теория потенциальной помехоустойчивости. М.—Л., Госэнергоиздат, 1956.
7. В. С. Малов, В. Ф. Дмитриев. Кодо-импульсные телеизмерительные системы. М., «Энергия», 1969.
8. А. И. Величкин. Теория дискретной передачи непрерывных сообщений. М., «Советское радио», 1970.
9. В. М. Ефимов. Квантование по времени при измерении и контроле. М., «Энергия», 1969.

*Поступила в редакцию  
1 апреля 1970 г.*