

Ю. В. БОНДАРЕНКО, В. П. ИЛЬИН, Г. С. ПОПОВА

(Новосибирск)

### О ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТАХ ТРАЕКТОРИЙ ЭЛЕКТРОНОВ В ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯХ

**Введение.** В настоящей работе рассматриваются методические вопросы, связанные с задачей расчета на ЭВМ некоторых параметров изображения в электронно-оптических преобразователях [1].

Расчет электростатического поля проводится с помощью разностных методов, реализация которых описана в [2]. По вычисленным значениям потенциалов в узлах сетки определяются траектории электронов путем численного интегрирования уравнений движения при заданных начальных условиях.

Каждая траектория рассматривается как элементарная трубка тока, величина которого зависит от плотности тока эмиссии. По параметрам траекторий находится распределение заряда в расчетной области. Для учета тока пучка строятся последовательные приближения по объемному заряду. Электронно-оптические свойства системы определяются по виду расчетных траекторий электронов, формирующих изображение.

В статье приводятся численные эксперименты по оценке эффективности применяемых методов. Исследуется зависимость точности результатов и затрачиваемого машинного времени от таких параметров, как величина шага сетки, точность решения разностных уравнений, временной шаг при расчете траекторий, а также количество траекторий при определении влияния объемного заряда.

Вычисления проводятся на БЭСМ-6. Программа допускает расчеты электронно-оптических систем с различными конфигурациями электродов, граничными условиями для потенциалов и начальными данными для электронного пучка.

**Математическая постановка и методы решения задачи.** Электростатический потенциал  $\varphi$  осесимметричной электронно-оптической системы при известном распределении плотности объемного заряда  $\rho$  определяется как решение уравнения Пуассона

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho \quad (1)$$

в замкнутой области  $G$  с заданными граничными условиями.

Траектории заряженных частиц находятся интегрированием уравнений движения

$$\ddot{r} = -e/m \nabla_r \varphi; \quad \ddot{z} = -e/m \nabla_z \varphi \quad (2)$$

при заданных начальных значениях координат и скоростей ( $e, m$  — заряд и масса электрона). Рассматривая отдельные траектории как элементарные трубки тока и пользуясь уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0, \quad (3)$$

можно определить распределение заряда в расчетной области по начальной плотности тока и форме траекторий. Задача расчета поля и траекторий с учетом объемного заряда решается с помощью итерационного процесса, состоящего из последовательного вычисления потенциалов (в качестве начального приближения для плотности зарядов выбирается  $\rho=0$ ), траекторий, зарядов, снова поля с пересчитанным распределением зарядов и т. д.

Численное решение уравнения Пуассона проводится с помощью пятиточечных разностных уравнений на прямоугольных сетках с кусочно-постоянным шагом [2]. Отметим, что на оси симметрии аппроксимируется уравнение

$$2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho, \quad (4)$$

получаемое из (1) предельным переходом при  $r \rightarrow 0$ . При этом условие симметрии учитывается выражением  $\varphi(-h) = \varphi(h)$ , что обеспечивает точность второго порядка  $O(h^2)$  для используемой системы разностных уравнений.

Система разностных уравнений решается итерационным методом верхней релаксации с прогонками по строкам и автоматическим выбором оптимального релаксационного параметра [2]. Итерации продолжаются до тех пор, пока во всех узлах два соседних приближения не совпадают с точностью до заданной величины  $\varepsilon$ . Численное интегрирование системы (2) с начальными условиями  $x|_{t=0} = x_0, y|_{t=0} = y_0, v_x|_{t=0} = v_{x0}, v_y|_{t=0} = v_{y0}$  проводится с помощью модификации метода Рунге — Куты:

$$\begin{aligned} \dot{r}^{n+1} &= \dot{r}^n - \Delta t_n e/m \nabla_r \varphi \left( r^n + \frac{1}{2}, z^n + \frac{1}{2} \right); \\ \dot{z}^{n+1} &= \dot{z}^n - \Delta t_n e/m \nabla_z \varphi \left( r^n + \frac{1}{2}, z^n + \frac{1}{2} \right); \\ r^{n+\frac{1}{2}} &= r^n + \frac{\Delta t_n}{2} \dot{r}^n; \quad r^{n+1} = r^n + \frac{\Delta t_n}{2} (\dot{r}^n + \dot{r}^{n+1}); \\ z^{n+\frac{1}{2}} &= z^n + \frac{\Delta t_n}{2} \dot{z}^n; \quad z^{n+1} = z^n + \frac{\Delta t_n}{2} (\dot{z}^n + \dot{z}^{n+1}), \end{aligned} \quad (5)$$

имеющей погрешность  $O(h^2)$  и требующей при просчете очередного шага однократного вычисления правой части. Шаг интегрирования  $\Delta t_n$  подбирается так, чтобы расстояние  $l_n$  между соседними точками траектории  $(r_n, z_n), (r_{n+1}, z_{n+1})$  составляло примерно заданную часть от среднего шага сетки  $h$  (точнее,  $\frac{1}{2} < \frac{2 \Delta l_n}{h_x + h_y} < 2$ ). Начальные данные для траекторий задаются в виде «фронта» частиц, определяющего поток с эмиттирующего участка катода с начальным распределением скоростей и плотности тока. Фронт задается уравнением кривой катода и координатами точек его начала и конца. По выбранному числу траекторий  $N_T$  отрезок кривой разбивается на  $N_T$  интервалов равной длины и середина каждого из них принимается за точку выхода траектории  $(r_t, z_t), t = 1, 2, 3, \dots, N_T$ . Величина тока соответствующей трубки определяется как

$I_t = j(r_t, z_t) \Delta S_t$ , где  $\Delta S_t = 2\pi r_t \sqrt{\left(\frac{r_{t+1} - r_{t-1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_{t+1} - z_{t-1}}{2}\right)^2}$  — начальное поперечное сечение трубки, а плотность тока  $j_t$  определяется по величине эмиссионной способности катода  $j_s$  с учетом возможности ограничения тока пространственным зарядом:

$$j_t = \min \left\{ j_s; 2,33 \cdot 10^{-6} \frac{\varphi_t^{3/2} \text{ (В)}}{d^2 \text{ (см)}} \right\}, \quad (6)$$

где  $\varphi_t$  — потенциал в точке, расположенной на расстоянии  $d$  от точки  $(r_t, z_t)$  по нормали к поверхности катода. Величина  $d$  принимается достаточно малой для того, чтобы поле вблизи катода могло рассматриваться как поле плоского диода. Для вычисления объемного заряда используется выражение

$$q_{n_i} = I_i \Delta t_n, \quad (7)$$

определяющее величину заряда на интервале  $I_n$  траектории с током  $I_i$ , где  $\Delta t_n$  — время прохождения частицей этого интервала. При расчете всех траекторий значения таких элементарных зарядов относятся к соответствующим ближайшим узлам сетки и затем используются при решении разностных уравнений для потенциала.

Используемую последовательность расчета полей, траекторий и зарядов можно записать в виде:

$$\Delta \varphi^{n+1} = -4\pi \rho^n, \quad \rho^0 = 0; \quad \rho^{n+1} = \omega_n \rho^{n-1} + (1 - \omega_n) \rho^n, \quad (8)$$

где  $\rho^{n+1}$  — распределение зарядов по ячейкам сетки, полученной при расчете траекторий;  $\omega_n$  — последовательность релаксационных параметров, вводимая для управления скоростью сходимости ( $0 < \omega_n \leq 1$ ).

**Описание численных результатов.** Расчеты проводились для однокаскадного электронно-оптического преобразователя, конфигурация электродов которого приведена на рисунке.

Рассмотрим численные эксперименты, связанные с оценкой точности получаемых результатов. Варьируемыми величинами, определяющими погрешность счета и машинное время, являются шаг разностной сетки, задаваемая точность решения разностных уравнений  $\epsilon$ , а также параметр  $\Delta$ , определяющий шаг численного интегрирования уравнений движения  $\Delta t_n$ . При нулевых значениях плотности тока  $j$  и потенциала катода  $\varphi_k = 0$  проводились расчеты со значениями параметров:  $\Delta = 0,8; 0,4; 0,2; 0,15; 0,1$ ;  $\epsilon = 2^{-13}, 2^{-19}, 2^{-21}$ . Полученные результаты сравнивались для различных вариантов с последовательным изменением параметров, и за окончательные значения  $\Delta$ ,  $\epsilon$  принимались такие, при уменьшении которых параметры траекторий уже практически не меняются. Аналогично сравнивались результаты, полученные на различных разностных сетках.

Количество зон с постоянными шагами по  $r$  было выбрано равным 5, а количество зон по  $z$  — равным 6:

$$r_0 = -12,5; r_1 = 50; r_2 = 100; r_3 = 520; r_4 = 1000; r_5 = 2200;$$

$$z_0 = 0; z_1 = 200; z_2 = 500; z_3 = 2500; z_4 = 4400; z_5 = 6400; z_6 = 8825$$

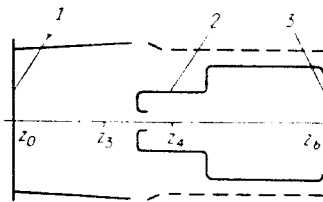


Схема однокаскадного электронно-оптического преобразователя:

1 — фотокатод; 2 — анод; 3 — экран.

(единица длины везде  $10^{-3}$  см). Здесь  $r_i$  ( $i=0, 1, \dots, 5$ ) — границы зон по  $r$ ;  $z_i$  ( $i=0, 1, \dots, 6$ ) — границы зон по  $z$ .

Эксперименты проводились на следующих сетках: а)  $l_1=5$ ;  $l_2=2$ ;  $l_3=8$ ;  $l_4=5$ ;  $l_5=7$ ;  $m_1=8$ ;  $m_2=6$ ;  $m_3=20$ ;  $m_4=38$ ;  $m_5=15$ ;  $m_6=6$ ; б)  $l_1=9$ ;  $l_2=4$ ;  $l_3=16$ ;  $l_4=8$ ;  $l_5=9$ ;  $m_1=16$ ;  $m_2=12$ ;  $m_3=40$ ;  $m_4=76$ ;  $m_5=20$ ;  $m_6=8$ , где  $l_i$  ( $i=1, \dots, 5$ ) — число интервалов в зонах по  $r$ ;  $m_i$  ( $i=1, \dots, 6$ ) — число шагов в зонах по  $z$ .

Было проведено сравнение параметров траектории электронов при использовании сеток «а» и «б». В табл. 1 приведены значения ординат электронов в плоскости экрана. Расчеты проводились при  $\Delta=0,8$ ;  $\varepsilon=2^{-13}$ ;  $\rho_0$  — ордината начала траектории.

Таблица 1			Таблица 2				Таблица 3			
$\rho_0$	Сетка		$\rho_0$	$\varepsilon$			$\rho_0$	$\Delta$		
	а	б		$2^{-13}$	$2^{-19}$	$2^{-21}$		0,2	0,15	0,05
40	42,59	44,86	40	43,57	43,24	43,25	40	43,14	43,31	43,33
120	124,6	111,3	120	124,47	125,56	125,59	120	124,08	124,57	124,52
200	181,5	176,8	200	183,56	181,09	181,10	200	180,70	181,50	180,82
280	245,1	245,0	280	251,77	250,04	250,07				

Количество итераций и время счета на первой и второй сетках соответственно равны:  $N_1=221$ ;  $t_1=198$  с;  $N_2=477$ ;  $t_2=902$  с. Как видно из табл. 1, результаты, полученные на разных сетках, для приосевых траекторий отличаются, однако для качественного анализа в дальнейших расчетах была выбрана сетка «а» как более экономная.

В табл. 2 приведены значения  $r_{\text{экр}}$  для указанных  $\rho_0$  при различных  $\varepsilon$  ( $\Delta$  везде равно 0,4). За окончательное значение взято  $\varepsilon=2^{-19}$ , так как при его дальнейшем уменьшении параметры исследуемых траекторий почти не менялись. Отметим, что число итераций и время для  $\varepsilon=2^{-19}$  соответственно равны:  $N=302$ ;  $t=225$  с.

В табл. 3 приведены значения  $r_{\text{экр}}$  для тех же траекторий при  $\varepsilon=2^{-19}$  и различных  $\Delta$ . Как видно из таблицы,  $r_{\text{экр}}$  для  $\Delta=0,15$  и  $\Delta=0,05$  уже практически не отличаются, поэтому за окончательное значение шага интегрирования взято  $\Delta=0,15$ . Время расчета при этом всего на

Таблица 4

$N$ по $q$	$z$					
	25	50	75	100	125	150
1	10,56207	21,12934	31,71382	42,32456	52,9704	63,66013
5	10,05568	20,16322	30,34809	40,60223	50,92524	61,32067
10	9,70475	19,49857	29,41466	39,42827	49,53446	59,73368
14	9,68506	19,46108	29,36267	39,36507	49,4613	59,6498
15	9,63408	19,45919	29,3600	39,3618	49,45743	59,6451
20 (20 трубок)	9,69798	19,4963	29,4082	39,4989	49,50018	59,68153

25 с больше, чем для  $\Delta=0,4$ . Для выбранных значений  $\Delta$ ,  $\varepsilon$  и  $\omega=0,5$  были проведены методические эксперименты для исследования сходимости итерационного процесса по объемному заряду. При плотности тока  $j=3$  мА/см<sup>2</sup> весь фронт был разделен на 10 трубок тока. В табл. 4 даны

значения поля в нескольких точках на оси после 1, 5, 10, 14, 15 итераций по объемному заряду. На 15-й итерации поле уже почти не отличается от предыдущего приближения. На 15 приближений потребовалось 2189 с машинного времени. Далее, для более точного учета объемного заряда фронт был разделен на 20 трубок тока и проведено еще 5 итераций. Поле изменилось незначительно (см. табл. 4).

Отметим, что в последних приближениях незначительное изменение поля (порядка 0,1%) приводит к смещению конечных точек траекторий на величину того же порядка. В табл. 5 представлены значения  $r_{\text{экр}}$  для четырех траекторий после 10 и 15 итераций по объемному заряду.

Таблица 5

$N$ по $q$	$r_0$			
	40	120	200	280
10	22,013	94,472	152,684	219,879
15	22,624	94,785	152,417	217,197

Таблица 6

$N$ по $q$	$z$					
	25	50	75	100	125	150
1	10,56207	21,12934	31,71382	42,32456	52,9704	63,66013
5	10,15984	20,36081	30,62852	40,95702	51,34768	61,80406
8	10,13515	20,31697	30,56448	40,87461	51,24871	61,69033
9	10,13355	20,31477	30,56037	40,86934	51,24240	61,68312
10	10,13264	20,31256	30,55802	40,86633	51,23879	61,678

При плотности тока  $j=1,5$  мА/см<sup>2</sup> фронт был разделен на 10 трубок тока и проведено 10 итераций по объемному заряду. Данные по этому эксперименту приведены в табл. 6. Как видно из таблицы, поле после 9 и 10 итераций по  $q$  отличается незначительно. Для 10 итераций потребовалось 1461 с машинного времени.

Заметим, что при плотности тока  $j=30$  мА/см<sup>2</sup> итерации по объемному заряду не сходились, причем на отдельных приближениях поле вблизи катода принимало отрицательные значения. По-видимому, это свидетельствует о том, что данная величина  $j$  превышает допустимый уровень, который соответствует режиму ограничения тока объемным зарядом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Бондаренко, В. И. Бударных, В. П. Ильин, А. М. Искольдский, Ю. Е. Нестерихин, Г. С. Полова, А. Ф. Шестаков. Электронно-оптические преобразователи в режиме форсированных световых загрузок.—Автометрия, 1971, № 6.
2. В. П. Ильин, Б. И. Голубцов. Автоматизация решения краевых задач для уравнения Пуассона. Новосибирск, «Наука», 1969.

Поступила в редакцию  
5 февраля 1971 г.