

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, Н. Н. КАРЛСОН,
 А. А. НЕСТЕРОВ, Н. П. ФИЛИПОВА
 (Новосибирск)

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОРРЕКЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ПУЧКА ЧАСТИЦ В УСКОРИТЕЛЯХ

Одной из актуальных проблем для циклических ускорителей заряженных частиц является стабилизация пучка частиц относительно центра вакуумной камеры. Действие внешних возмущений приводит к столкновению частиц со стенками вакуумной камеры и потере пучка. Существующий метод коррекции орбит [1—3] позволяет скомпенсировать отклонения, вызванные только неоднородностью магнитного поля, но не позволяет уменьшать амплитуду бетатронных колебаний. Тенденции к увеличению плотности пучка частиц, энергии и ускорению «тяжелых» частиц приводят к возникновению неустойчивых движений (структурных неустойчивостей) и необходимости в разработке методов их подавления.

В данной работе предлагается новый подход к стабилизации пучка частиц, основанный на теории оптимальных процессов [4] для систем с управляемой структурой [5]. Метод позволяет уменьшать амплитуду бетатронных колебаний и стабилизировать пучок как при действии внешних возмущений, так и при наличии структурных неустойчивостей.

1. Некоторые определения и постановка задачи. Движение центра тяжести сгустка частиц в ускорителе с жесткой фокусировкой и участками с однородным магнитным полем при бетатронных колебаниях частиц описывается в отклонениях от центра вакуумной камеры дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\Theta^2} + [a_0(\Theta) + \Delta a_0(\Theta)]x &= \sum_{\substack{m+k>0 \\ m,k \geq 0}} a_{mk}(\Theta) x^m \left(\frac{dx}{d\Theta}\right)^k + \\ &+ F_1 + F_3 + F_5(x) + \hbar \frac{\Delta p}{p} + m_1(\Theta) + u_1(\Theta); \\ \frac{d^2z}{d\Theta^2} - [a_0(\Theta) + \Delta a_0(\Theta)]z &= \sum_{\substack{m+k>0 \\ m,k \geq 0}} \tilde{a}_{mk}(\Theta) z^m \left(\frac{dz}{d\Theta}\right)^k + \\ &+ F_2 + F_4 + F_6(z) + m_2(\Theta) + u_2(\Theta); \end{aligned} \quad (1)$$

$$|\Delta a_0(\Theta)| \leq A \ll |a_0|; \quad |m_i(\Theta)| \leq M_i; \quad |u_i(\Theta)| \leq U_i; \quad i = 1, 2,$$

где x — отклонение центра тяжести пучка частиц от центра вакуумной камеры в радиальной (горизонтальной) плоскости; z — отклонение в

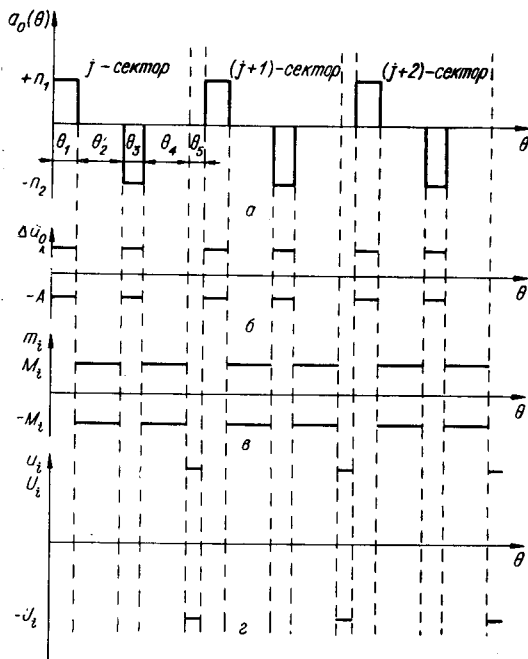


Рис. 1.

вертикальной плоскости; Θ — азимутальный угол; $a_0(\Theta)$ — коэффициент в случае жесткой фокусировки, периодически и скачкообразно изменяющийся в функции угла Θ , как это качественно представлено на рис. 1, а. Значение $a_0(\Theta) = n_1$ соответствует прохождению потока частиц под фокусирующим магнитом, а $a_0(\Theta) = -n_2$ — прохождению под дефокусирующим магнитом: $\Delta a_0(\Theta)$ — ограниченный управляющий параметр, имеющий ту же периодичность, что и коэффициент $a_0(\Theta)$, но в отличие от него может принимать каждый раз некоторое значение в диапазоне от $+A$ до $-A$ (см. рис. 1, б). Возникновение Δa_0 связано с возможностью расположения на фокусирующих и дефокусирующих магнитах дополнительных обмоток, с помощью которых можно несколько усили-

вать либо ослаблять неоднородное магнитное поле. Без потери общности излагаемого ниже метода стабилизации и с целью упрощения выкладок ограничения на управляющие параметры $\Delta a_0(\Theta)$, $m_i(\Theta)$ и $u_i(\Theta)$ принимаются симметричными. Управляющий параметр $m_i(\Theta)$ является также ограниченным и периодически может принимать некоторое значение в диапазоне $[+M_i, -M_i]$ (см. рис. 1, в). Его появление связано с возможностью размещения дополнительных обмоток, способных несколько изменять однородное магнитное поле. И последний управляющий параметр u_i характеризует воздействие на центр тяжести пучка заряженных частиц электрических импульсов, ограниченных по амплитуде и прикладываемых соответственно к вертикальным и горизонтальным пластинам, помещенным между секторами (см. рис. 1, г). Выражения $\sum a_{mk} x^m \left(\frac{dx}{d\Theta}\right)^k$ и $\sum \tilde{a}_{mk} z^m \left(\frac{dz}{d\Theta}\right)^k$ отражают влияние на систему (1)

внешних возмущений, вызванных неоднородностями магнитных полей. Функции F_1 и F_2 вызваны влиянием радиальных и вертикальных бетатронных колебаний, а F_3 и F_4 — влиянием синхротронных колебаний и случайных воздействий на бетатронные колебания. Функции $F_5(x)$ и $F_6(z)$ обуславливают возможные нелинейные эффекты, математическое описание которых нам зачастую неизвестно. Поэтому их целесообразно представить в виде некоторых возмущений, действующих на управляемую систему. Член $\hbar \Delta p/p$ характеризует влияние ускоряющего электрического поля на радиальные бетатронные колебания.

В результате действия на систему (1) различного рода возмущений увеличиваются отклонения центра тяжести пучка частиц от центра вакуумной камеры, что может вообще привести к потере пучка.

В данной работе ставится задача нахождения алгоритмов изменения управляющих параметров $\Delta a_0(\Theta)$, $m_i(\Theta)$ и $u_i(\Theta)$, обеспечивающих перевод центра тяжести пучка в центр вакуумной камеры за наименьший пройденный пучком азимутальный угол $\bar{\Theta}$.

Следует подчеркнуть, что некоторые из управляющих параметров в частных случаях (различных типах и конструкциях ускорителей) могут отсутствовать либо иметь отличное от приведенного выше расположение по углу Θ , что, естественно, изменяет характер процессов, но не изменяет излагаемого ниже метода определения оптимальных алгоритмов переключения управляющих параметров.

2. Метод решения и основные соотношения. Радиальные (X) и вертикальные (Z) бетатронные колебания связаны в общем случае между собой через функции F_1 и F_2 , а также посредством управляющего параметра Δa_0 . Однако, как будет показано ниже, достаточно ограничиться рассмотрением одного из уравнений системы (1), например уравнением для радиальных бетатронных колебаний. Запишем последнее в нормальной форме

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\Theta} = x_2; \quad \frac{dx_2}{d\Theta} = \sum_{\substack{m+k>0 \\ m,k \geq 0}} a_{mk}(\Theta) x_1^m x_2^k + F_1 + F_3 + F_5(x_1) + h \frac{\Delta p}{p} - \\ - [a_0(\Theta) + \Delta a_0(\Theta)] x_1 + m_1(\Theta) + u_1(\Theta); \end{aligned} \quad (2)$$

$$|\Delta a_0(\Theta)| \leq A \ll |a_0(\Theta)|; \quad |m_1(\Theta)| \leq M_1; \quad |u_1(\Theta)| \leq U_1.$$

Состояние центра тяжести пучка и процесс движения теперь однозначно характеризуются положением изображающей точки системы (2) на фазовой плоскости $x_1 x_2$, а задача перевода пучка частиц в центр вакуумной камеры математически адекватна задаче перевода под действием управляющих параметров u_1 , m_1 и Δa_0 изображающей точки из любого начального состояния $X(0) \neq 0$ в начало координат $X(\bar{\Theta}) = 0$ за наименьшую величину $\bar{\Theta}$.

Для нахождения оптимального алгоритма изменения управляющих параметров используем принцип максимума. Согласно формализму принципа максимума, находим функцию Гамильтона H

$$\begin{aligned} H = \psi_1 x_2 + \psi_2 \left\{ \sum_{\substack{m+k>0 \\ m,k \geq 0}} a_{mk}(\Theta) x_1^m x_2^k + F_1 + F_3 + F_5 + \right. \\ \left. + h \frac{\Delta p}{p} - [a_0(\Theta) + \Delta a_0(\Theta)] x_1 + m_1(\Theta) + u_1(\Theta) \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

и сопряженную систему

$$\frac{d\psi_i}{d\Theta} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Минимум угла вращения центра тяжести пучка достигается тогда, когда H принимает максимальное значение. Функция H максимальна, если выполняются условия:

$$\Delta a_0(\Theta) = -A \operatorname{sign} \psi_2 x_1; \quad (5)$$

$$m_1(\Theta) = M_1 \operatorname{sign} \psi_2; \quad (6)$$

$$u_1(\Theta) = U_1 \operatorname{sign} \psi_2. \quad (7)$$

Из (5)–(7) непосредственно следует, что решение поставленной задачи достигается при скачкообразном изменении управляющих параметров, которые принимают свои крайние значения. Переключение управляющих параметров происходит на некоторых линиях переключения удовлетворяющих условию $\psi_2 = 0$. Кроме того, переключение параметра Δa_0 происходит, когда выполняется условие $x_1 = 0$. Для сопряженной системы можно записать следующую систему уравнений:

$$\frac{d\psi_1}{d\Theta} = \left[a_0(\Theta) + \Delta a_0(\Theta) - \frac{\partial F_5}{\partial x_1} - \sum_{\substack{m+k>0; \\ m,k>0}} a_{mk}(\Theta) m x_1^{m-1} x_2^k \right] \psi_2; \quad (8)$$

$$\frac{d\psi_2}{d\Theta} = -\psi_1 - \psi_2 \sum_{\substack{m+k>0; \\ m,k>0}} a_{mk}(\Theta) k x_1^m x_2^{k-1}$$

и найти такие начальные условия $\psi_1(0)$ и $\psi_2(0)$, при которых достигается решение поставленной выше задачи.

Можно резко упростить решение поставленной задачи, если разбить исходную систему (2) на ряд подсистем в соответствии с тем математическим описанием, которое она имеет в каждом секторе на углах $\Theta_1 \div \Theta_5$ (см. рис. 1). При решении задачи необходимо исходить из принципа оптимальности, согласно которому движение системы на каждом участке осуществляется оптимально, независимо от характера предыдущего движения. Когда центр тяжести пучка находится в пределах фокусирующего магнита (угол Θ_1), то управление можно осуществлять лишь с помощью параметра Δa_0 . Найдем алгоритм его изменения в функции фазовых координат x_1 и x_2 . Для этого запишем невозмущенное движение системы (2) в следующем виде:

$$\frac{d^2 x}{d\Theta^2} + [n_1 + \Delta a_0] x = 0, \quad |\Delta a_0| \leq A. \quad (9)$$

Говорит об оптимальном по минимуму параметра $\bar{\Theta}$ движении в начало координат для системы (9) некорректно, так как предел параметра $\bar{\Theta}$ при стремлении изображающей точки к началу координат равен бесконечности. Поэтому для нахождения алгоритма изменения управляющего параметра Δa_0 введем в правую часть некоторый малый параметр η , который в дальнейшем устремим к нулю. Корректность такого приема обоснована в [6].

Запишем (9) с учетом малого параметра η в нормальной форме

$$\frac{dx_1}{d\Theta} = x_2; \quad \frac{dx_2}{d\Theta} = -[n_1 + \Delta a_0] x_1 + \eta; \quad |\Delta a_0| \leq A; \quad |\eta| \leq \varepsilon \ll 1 \quad (10)$$

и соответствующую ей сопряженную систему $\psi(\psi_1, \psi_2)$

$$\frac{d\psi_1}{d\Theta} = (n_1 + \Delta a_0) \psi_2; \quad \frac{d\psi_2}{d\Theta} = -\psi_1. \quad (11)$$

Функция Гамильтона H (3) максимальна, если

$$\eta = \varepsilon \operatorname{sign} \psi_2; \quad (12)$$

$$\Delta a_0 = -A \operatorname{sign} \psi_2 x_1. \quad (13)$$

Обратив в (10) параметр Θ и анализируя обратное движение изображающей точки из начала координат, нетрудно найти знак для ψ_2 на всей фазовой плоскости $x_1 x_2$. При $\eta \rightarrow 0$ смена знака ψ_2 происходит на оси x_1 , причем справедливо выражение $\psi_2 = -|\psi_2| \operatorname{sign} x_2$. Подставляя его в (13), окончательно получаем следующий алгоритм переключения параметра Δa_0 под каждым фокусирующим магнитом

$$\Delta a_0 = A \operatorname{sign} x_1 \operatorname{sign} x_2. \quad (14)$$

На рис. 2 приведены фазовые траектории движения и значения параметра Δa_0 в каждом квадранте. Однако двигаться по подобной фазовой траектории изображающая точка будет до тех пор, пока центр тяжести пучка находится в области фокусирующего магнита (угла Θ_1 на рис. 1, а). Поэтому истинное движение под фокусирующими магнитами будет состоять из отдельных участков фазовых траекторий, при-

веденных на рис. 2 и ведущих изображающую точку в начало координат. Важно отметить следующее обстоятельство. При действии на систему различного рода внешних возмущений, которые стоят в правых частях системы (1), фазовые траектории движения будут как-то искажаться. Но совершенно независимо от того, в какой квадрант и с какими начальными условиями попадает изображающая точка на фазовую плоскость и какие возмущения, искажающие характер движения, действуют на систему, переключение управляющего параметра под каждым фокусирующим магнитом осуществляется, согласно условию (14).

Пройдя под фокусирующим магнитом, пучок попадает в однородное магнитное поле. Это соответствует участкам Θ_2 и Θ_4 для каждого сектора на рис. 1. Управление теперь возможно только с помощью параметра m_1 . Движение центра тяжести сгустка описывается без учета внешних возмущений следующей системой:

$$\frac{dx_1}{d\theta} = x_2; \quad \frac{dx_2}{d\theta} = m_1; \quad |m_1| \leq M_1. \quad (15)$$

Для такой системы, применяя принцип максимума, получаем следующий алгоритм переключения управляющего параметра m_1 :

$$m_1 = -M_1 \operatorname{sign}(\sqrt{2M_1 |x_1|} \operatorname{sign} x_1 + x_2), \quad (16)$$

где x_1 и x_2 — фазовые координаты центра тяжести сгустка, находящегося в однородном магнитном поле. На рис. 3 показана линия переключения L , делящая всю плоскость на две области, в каждой из которых управление постоянно и принимает одно из двух возможных значений $\pm M_1$. Показаны фазовые траектории, по частям которых осуществляется движение к началу координат всякий раз, как только пучок входит в зону действия параметра m_1 .

Пройдя однородное магнитное поле, пучок попадает в неоднородное магнитное поле под дефокусирующим магнитом. Движение центра тяжести пучка описывается системой

$$\frac{dx_1}{d\theta} = x_2, \quad \frac{dx_2}{d\theta} = (n_2 + \Delta a_0) x_1, \quad |\Delta a_0| \leq A. \quad (17)$$

Эта система отличается от (10) только знаком и величиной коэффициента во втором уравнении, что связано с действием дефокусирующего магнитного поля. Введем, как и ранее, для корректности построений малый параметр η и исследуем поведение функции ψ_2 на всей фазовой

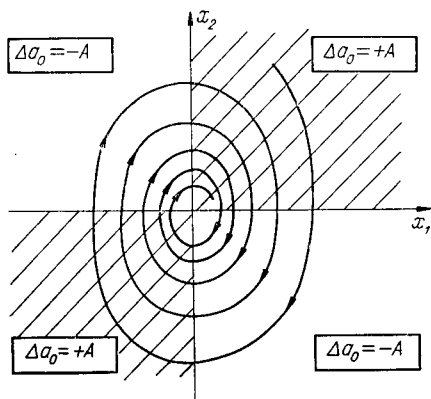


Рис. 2.

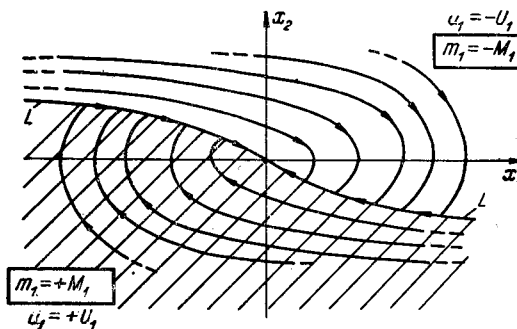


Рис. 3.

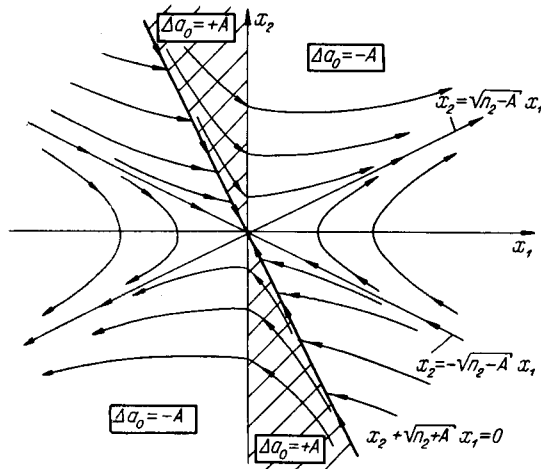


Рис. 4.

плоскости x_1x_2 , обращая в (17) параметр Θ . Нетрудно установить, что ψ_2 меняет знак на прямой $\sqrt{n_2 + A}x_1 + x_2 = 0$. С учетом (5) окончательно получаем, что переключение управляющего параметра Δa_0 в зоне дефокусирующего магнита осуществляется по алгоритму

$$\Delta a_0 = -A \operatorname{sign}(\sqrt{n_2 + A}x_1 + x_2) \operatorname{sign} x_1. \quad (18)$$

Соответствующие фазовые траектории, по отрезкам которых происходит движение изображающей точки, приведены на рис. 4. Движение

происходит по гиперболам, уравнения которых имеют вид

$$\left[\frac{x_2 - \lambda_1 x_1}{c_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \right]^{\lambda_1} = \left[\frac{\lambda_2 x_1 - x_2}{c_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \right]^{\lambda_2}, \quad (19)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Корни λ_1 и λ_2 в области $\Delta a_0 = -A$ равны $\lambda_1 = \sqrt{n_2 - A}$ и $\lambda_2 = -\sqrt{n_2 - A}$. В области $\Delta a_0 = +A$ имеем $\lambda_1 = \sqrt{n_2 + A}$ и $\lambda_2 = -\sqrt{n_2 + A}$.

Здесь уместно вернуться к связи между радиальными и вертикальными бетатронными колебаниями, т. е. к связи между системами X и Z в (1) и достаточности рассмотрения системы (2). Действительно, магнит, являющийся фокусирующим для системы (X), является дефокусирующим для системы (Z) и наоборот. Поэтому для одновременного уменьшения амплитуд радиальных и вертикальных колебаний управление Δa_0 в фокусирующем магните для системы X (согласно рис. 1) подается только тогда и такого знака, когда одновременно выполняются условия:

$$\begin{aligned} \Delta a_0 &= A \operatorname{sign} x_1 \operatorname{sign} x_2; \\ \Delta a_0 &= -A \operatorname{sign}(\sqrt{n_1 + A}z_1 + z_2) \operatorname{sign} z_1. \end{aligned} \quad (20)$$

Управление Δa_0 в дефокусирующем магните подается при одновременном выполнении условий

$$\Delta a_0 = -A \operatorname{sign}(\sqrt{n_2 + A}x_1 + x_2) \operatorname{sign} x_1; \quad \Delta a_0 = A \operatorname{sign} z_1 \operatorname{sign} z_2. \quad (21)$$

Управление с помощью параметров m_i и u_i системами X и Z осуществляется автономно, поскольку управляющие параметры независимы.

Осталось найти алгоритмы переключения последнего управляющего параметра u_1 . В промежутке между секторами (интервалы Θ_5 на рис. 1) движение описывается уравнениями:

$$\frac{dx_1}{d\Theta} = x_2; \quad \frac{dx_2}{d\Theta} = u_1; \quad |u_1| \leq U_1. \quad (22)$$

Система (22) аналогична (15), поэтому алгоритм переключения параметра u_1 совпадает по форме с (16) и имеет вид

$$u_1 = -U_1 \operatorname{sign}(\sqrt{2U_1|x_1|} \operatorname{sign} x_1 + x_2). \quad (23)$$

Существенное различие между u_1 и m_1 заключается в их физической природе и в связанной с ней технической реализацией.

Итак, суммарная фазовая траектория движения изображающей точки будет состоять из пяти отрезков. Чем больше амплитуды управляющих воздействий, тем скорее осуществляется переход в начало координат.

3. Стабилизация структурно неустойчивых систем. Система (1) становится структурно неустойчивой, если в ее левой части появляются, например, члены $\left(-a_1 \frac{dx}{d\theta}\right)$ и $\left(-\tilde{a}_1 \frac{dz}{d\theta}\right)$.

Рассмотрим процесс стабилизации системы (X) с помощью одного лишь управляющего параметра u_1 . Введение дополнительно управления по Δa_0 и m_1 только улучшит качество стабилизации [6]. Уравнения движения в нормальной форме запишем в виде

$$\frac{dx_1}{d\theta} = x_2; \quad \frac{dx_2}{d\theta} = -a_0(\theta)x_1 + a_1x_2 + F(\theta) + u_1; \quad |u_1| \leq U_1. \quad (24)$$

В (24) принято, что коэффициент $a_0(\theta)$ по-прежнему изменяется периодически и скачкообразно в функции θ ; коэффициент a_1 считается постоянным на всем интервале независимой переменной θ ; управление u_1 действует в дискретные интервалы между секторами (в интервалах Θ_5 рис. 1). Через $F(\theta)$ обозначены все возмущающие воздействия. Тогда движение изображающей точки в интервалах Θ_1 (под фокусирующими магнитами) происходит по отрезкам раскручивающихся спиралей, описываемых уравнениями

$$(x_2 - \alpha x_1)^2 + (\beta x_1)^2 - c^2 \beta^2 \exp\left[-\frac{2\alpha}{\beta}\left(\varphi + \operatorname{arctg} \frac{x_2 - \alpha x_1}{\beta x_1}\right)\right] = 0, \quad (25)$$

где $\alpha = \frac{a_1}{2}$ и $\beta = \sqrt{n_1 - \frac{a_1^2}{4}}$ — соответственно вещественная и мнимая части комплексных корней; c и φ — произвольные постоянные. На интервалах Θ_2 и Θ_4 (в однородных магнитных полях) движение происходит по отрезкам фазовых траекторий, являющихся прямыми линиями

$$x_2 - a_1(x_1 - c) = 0, \quad (26)$$

где c — постоянная интегрирования. В интервалах Θ_3 (под дефокусирующими магнитами) движение изображающей точки происходит по гиперболам, описываемым уравнением (19) с той лишь разницей, что корни λ_1 и λ_2 определяются из выражения

$$\lambda_{1,2} = 0,5 \left(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4n_2} \right). \quad (27)$$

Между секторами на интервалах Θ_5 движение описывается неоднородной системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{d\theta} = x_2; \quad \frac{dx_2}{d\theta} = a_1x_2 + u_1; \quad |u_1| \leq U_1. \quad (28)$$

Управляющее воздействие переключается на линии L (рис. 5), уравнение которой имеет вид

$$x_1 - \frac{x_2}{a_1} + \frac{u_1}{a_1^2} \ln\left(1 + \frac{a_1}{u_1} x_2\right) = 0. \quad (29)$$

Фазовые траектории, по отрезкам которых происходит движение, приведены на рис. 5 и описываются уравнением

$$x_1 - \frac{1}{a_1} \left(x_2 + \frac{u_1}{a_1} \right) + \frac{u_1}{a_1^2} \ln \frac{1}{c_1} \left(x_2 + \frac{u_1}{a_1} \right) - c_2 = 0, \quad (30)$$

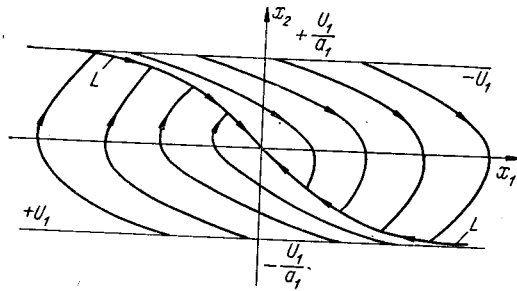


Рис. 5.

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования. Из анализа (29) и (30) следует, что на фазовой плоскости существует некоторая область, ограниченная прямыми $x_2 = \pm U_1/a_1$ из любой точки которой обеспечивается переход в начало координат. Эта область управляемости тем больше, чем больше амплитуда управляющего воздействия U_1 и чем меньше коэффициент a_1 .

Итак, суммарное движение будет состоять из чередующейся последовательности пяти отрезков фазовых траекторий, причем только на одном из них (пятом) осуществляется управляемое движение к началу координат. Если управляющее воздействие достаточно велико, то суммарная фазовая траектория сходится к началу координат. При недостаточно эффективном управлении процесс расходится. Увеличивая амплитуду управления, можно всегда добиться сходящегося процесса.

4. Некоторые аспекты технической реализации и результаты моделирования. Найденные алгоритмы переключения управляющих параметров справедливы независимо от их числа и количества мест приложения по периметру ускорителя. Это позволяет значительно упростить техническую реализацию, если управление осуществлять только по одному параметру и в одном месте. Амплитуды управляющих воздействий должны быть соизмеримы с амплитудами возмущающих воздействий. Например, возмущения, возникающие из-за неоднородностей магнитных полей после статической коррекции составляют 10^{-4} — 10^{-5} от основного поля. Следовательно, при динамической фокусировке пучка речь идет о переключении с высокой частотой достаточно слабых магнитных и электрических полей. Частота необходимых переключений порядка нескольких мегагерц.

Для эффективного управления необходимо измерять фазовые координаты и производить вычисление управляющего параметра по приведенным выше формулам. При таких малых временах необходимо свести к минимуму процесс вычисления управляющих воздействий. Поскольку на практике к точности стабилизации пучка не предъявляются жестких требований, можно пойти на некоторое упрощение алгоритмов, связанное с аппроксимацией их более простыми выражениями. Например, учитывая, что U_i и M_i достаточно малы, вместо (16) и (23) для переключения управляющих параметров можно использовать следующий приближенный алгоритм:

$$u_1 = -U_1 \operatorname{sign} x_2; \quad m_1 = -M_1 \operatorname{sign} x_2 \quad (31)$$

Из (31) непосредственно видно, что измерения фазовых координат достаточно производить с точностью до знака; при этом ко времени измерения предъявляются весьма жесткие требования.

Идеальной формой управляющих воздействий являются прямоугольные импульсы. Можно, однако, сильно исказить форму импульсов, получая стабилизирующий эффект. Например, подавать высокочастотные гармонические воздействия с управляемой фазой. При управлении по параметрам u_i и m_i их частота должна равняться частоте бетатронных колебаний, а при управлении по параметру Δa — удвоенной частоте бетатронных колебаний.

Экспериментальная проверка предложенного принципа динамической фокусировки была проведена при моделировании на аналоговой вычислительной машине радиальных бетатронных колебаний, описываемых системой дифференциальных уравнений (2). Моделирование проводилось в предположении равенства интервалов $\Theta_1 \div \Theta_4$ при $\Theta_5 = 0$ и $n_1 = n_2$. В качестве прототипа был принят ускоритель с жесткой фокусировкой, содержащий 36 секторов (72 магнита) с коэффициентом спада магнитного поля порядка 300. На всей длине ускорителя уклады $\times x_1^m x_2^k$ при $k=0$ и при $m=1$. Если фазовые траектории на рис. 6 не являются расходящимися, то при действии внешнего возмущения они расходятся.

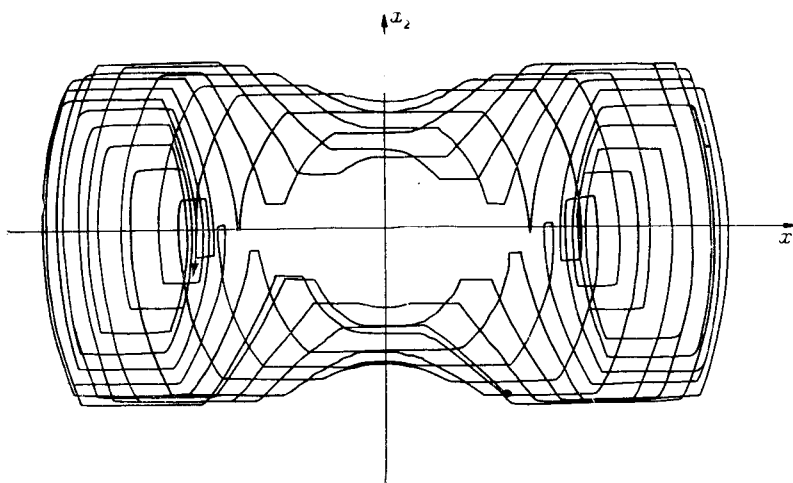


Рис. 6.

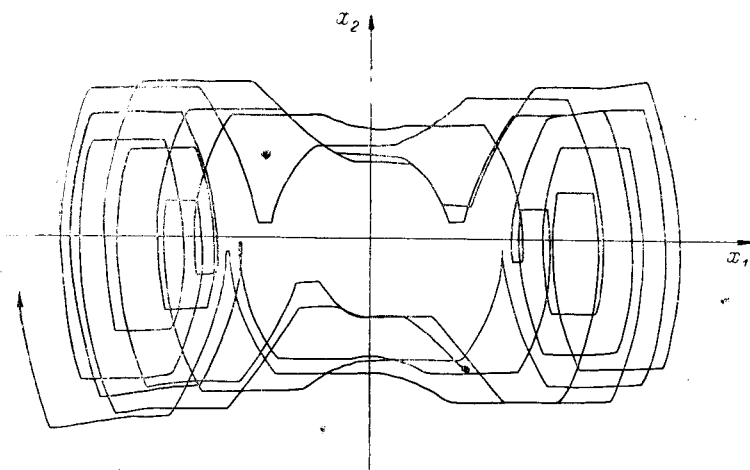


Рис. 7.

На рис. 8 показан фазовый портрет движения при включении управления по параметру Δa_0 и одновременном действии на систему того же внешнего возмущения. Управляющие воздействия подавались только на дефокусирующие магниты (для простоты реализации) и амплитуда их в три раза превышала амплитуду резонансного внешнего возмущения. Из рисунка непосредственно видно, что введение управления по-

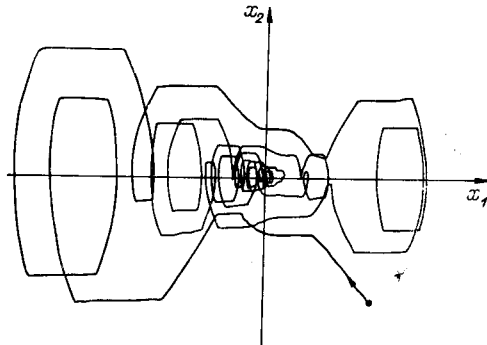


Рис. 8.

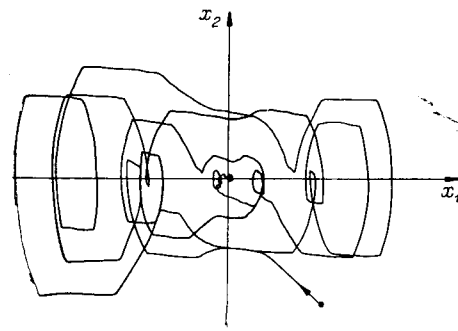


Рис. 9.

зволяет эффективно стабилизировать систему при наличии резонанса. На рис. 9 приведен фазовый портрет движения при включении другого управляющего воздействия m_1 для тех же начальных условий при действии на систему того же внешнего возмущения. Фазовые траектории сходятся к началу координат, полностью подавляя бетатронные колебания.

Из теории оптимальных процессов известно, что для рассматриваемых динамических систем второго порядка введение оптимального управления обеспечивает монотонное скручивание фазовых траекторий. Приведенные фазовые траектории иллюстрируют это свойство и показывают, что обеспечивается монотонное убывание амплитуд бетатронных колебаний и исключается выброс пучка на стенку вакуумной камеры.

Заключение. Предложенный принцип динамической фокусировки, основанный на теории оптимальных процессов, позволяет значительно уменьшить амплитуды колебаний центра тяжести сгустка заряженных частиц в ускорителе, стабилизировать пучок в случае внешних возмущений и при наличии структурных неустойчивостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев. Теория циклических ускорителей. М., Физматгиз, 1962.
2. E. D. Courant, H. S. Snyder. Theory of the Alternating — Gradient Synchrotron.— *Ann. of Phys.*, 1958, v. 3, № 1.
3. Н. Л. Сосенский. Динамика частиц в сильнофокусирующей магнитной системе с коррекцией нелинейных искажений поля по информации о пучке.— В сб. «Труды Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц». М., ВИНТИ, 1970.
4. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
5. В. М. Александров, А. А. Нестеров. Оптимальное по быстрдействию управление структурой динамической системы и регулирующим воздействием.— В сб. «Многосвязные и инвариантные системы. Нелинейные и дискретные системы». М., «Наука», 1968.
6. В. И. Александров, А. А. Нестеров. Оптимальная система с управляемой структурой.— *Изв. СО АН СССР, серия техн. наук*, 1965, вып. 2, № 6.

Поступила в редакцию
28 апреля 1971 г.