

В. Е. БОРЗЫХ, Л. Т. МИЛОВ

(Рязань)

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В практике обработки сигналов, характеризующих состояние различных систем, часто требуется осуществить операцию интегрирования этих сигналов. В качестве примеров можно назвать задачи определения пройденного пути по известной скорости объекта или определения скорости по известному ускорению [1]. Задача интегрирования с определенным весом решается также в самонастраивающихся системах и системах автоматического контроля, когда информация о динамических свойствах объекта или характере его входных сигналов получается путем вычисления моментов выходных сигналов [2].

В ряде случаев операция интегрирования осуществляется с помощью цифровых вычислительных машин по формулам приближенного интегрирования. Использование вычислительных машин обусловлено как требованиями к точности интегрирования, так и тем, что обрабатываемые сигналы иногда поступают в закодированном виде в дискретные моменты времени. В результате дискретного представления сигналов по времени процесс интегрирования происходит с методической погрешностью. В настоящее время анализу погрешностей численного интегрирования посвящено значительное количество работ [3, 4], в которых оценка погрешностей производится без учета динамических свойств источников интегрируемых сигналов на основе лишь априорного значения производных определенного порядка этих сигналов.

Необходимость в учете свойств источников интегрируемых сигналов можно показать на следующем примере. Классическая оценка погрешности интегрирования методом трапеций имеет вид

$$R \leq \frac{b-a}{1} M_2 T_0^2, \quad (1)$$

где $b-a$ — интервал интегрирования; M_2 — максимальное значение второй производной функции; T_0 — шаг дискретизации по времени.

В случае интегрирования выходного сигнала апериодического звена первого порядка, при ограниченном по модулю входном сигнале, вторая производная M_2 не ограничена и,

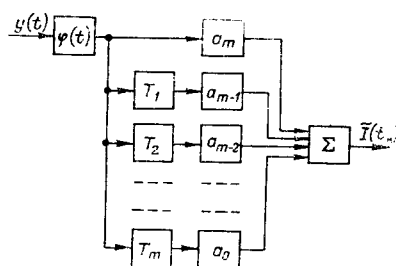


Рис. 1.

следовательно, расчет по формуле (1) указывает на возможность появления сколь угодно большой погрешности. В то же время, как будет показано в данной работе, эта погрешность является ограниченной и может быть точно рассчитана.

В общем случае возникает задача вычисления интеграла

$$I(t) = \int_0^t \varphi(t) y(t) dt, \quad (2)$$

где $y(t)$ — интегрируемый сигнал, $\varphi(t)$ — функция веса, которую требуется привести к требуемому виду и записывается следующим образом:

$$\varphi_2(t) = 1 [t - (t_n - t_n)] - 1(t - t_n), \quad (4)$$

где t_n — момент наблюдения интеграла; t_n — интервал интегрирования. Приближенное интегрирование с весом $\varphi_1(t)$ сигнала $y(t)$ производится с помощью квадратурной формулы

$$\tilde{I}(t_n) = \sum_{i=0}^m a_i \varphi_1(t_i) y(t_i), \quad (5)$$

где t_i — узлы интегрирования, $t_n - t_n \leq t_i \leq t_n$; $m+1$ — число узлов интегрирования; a_i — постоянные весовые коэффициенты, определяемые из конкретной квадратурной формулы.

Структурная схема, отображающая операцию (5), представлена на рис. 1. Интегрируемый сигнал с весом $\varphi(t)$ задерживается на интервалы времени $T_i = t_n - t_i$ и умножается на весовые коэффициенты a^i . В момент $t = t_n$ на выходе сумматора получается величина (5).

В случае интегрирования с равномерным шагом T_0 имеем $T_i = iT_0$. Ввиду наиболее частого использования квадратурных формул с равномерным шагом в дальнейшем для простоты рассматривается именно этот случай. Предлагаемая в работе методика анализа легко распространяется и на общий случай неравномерного шага интегрирования.

Постановка задачи. Требуется определить максимальную методическую погрешность численного интегрирования по формуле (5) с известными коэффициентами a_i и $T_i = iT_0$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m$) сигнала $y(t)$, являющегося выходным сигналом линейного стационарного объекта с передаточной функцией $W_0(p)$ и импульсной переходной функцией $k_0(t)$ при ограниченном входном сигнале объекта $x(t)$:

$$|x(t)| \leq M. \quad (6)$$

Решение задачи. Сигнал ошибки интегрирования находится путем сравнения в момент t_n точного значения интеграла I и приближенного \tilde{I} , вычисленных соответственно по формулам (2), (5), что отражено на структурной схеме рис. 2.

Для определения максимальной погрешности $\Delta I_{\max}(t_n)$ интегрирования в момент наблюдения t_n необходимо подобрать наихудший входной сигнал этой схемы $x^*(t)$, при котором выходной сигнал схемы рис. 2 принимает максимальное значение. Наихудший входной сигнал определяется с помощью импульсной переходной функции $\bar{K}_\Delta(\tau, t_n)$ ин-

версно-сопряженной системы [5]. При этом выходной сигнал системы $\Delta I(t)$ принимает следующее максимальное значение:

$$\Delta I_{\max}(t_n) = M \int_0^{t_n} |\tilde{k}_\Delta(\tau, t_n)| d\tau. \quad (7)$$

Преобразованная структурная схема инверсно-сопряженной системы, построенная по правилам [6], представлена на рис. 3.

Из (7) следует, что на вход этой схемы необходимо подать дельта-функцию, а затем выходной сигнал схемы выпрямить и проинтегрировать в пределах от 0 до $t_n = NT_0$. Для вычисления выходного сигнала необходимо знать сигнал

$$V(\tau) = 1(\tau) \varphi_2(t_n - \tau) - \sum_{i=0}^m a_{m-i} \delta(\tau - iT_0). \quad (8)$$

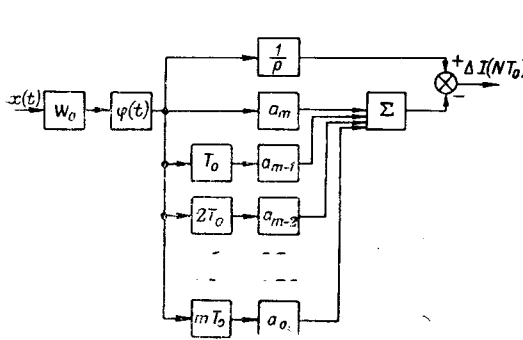


Рис. 2.

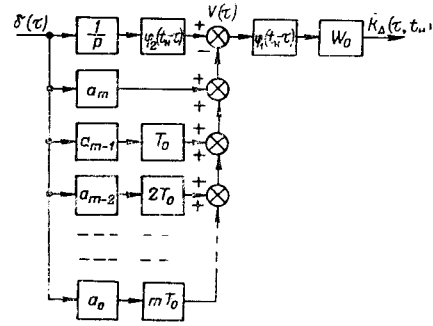


Рис. 3.

Принимая во внимание, что $\varphi_2(t_n - \tau) = 1(\tau) - 1(\tau - mT_0)$, находим функцию

$$\begin{aligned} \bar{k}_\Delta(\tau, t_n) = & \int_0^\tau [1(\tau_1) - 1(\tau_1 - mT_0)] \varphi_1(t_n - \tau_1) k_0(\tau - \tau_1) dt_1 - \\ & - \sum_{i=0}^m a_{m-i} \varphi_1(t_n - iT_0) k_0(\tau - iT_0). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), вычислим максимум погрешности интегрирования, соответствующий моменту наблюдения $t_n = NT_0$. Нетрудно показать, что при заданной $\varphi(t)$ абсолютный максимум (7) достигается, если $t_n \rightarrow \infty$.

Приложение

Применим изложенную выше методику для расчета погрешностей численного интегрирования выходных сигналов типовых звеньев.

1. Погрешность интегрирования по формуле левосторонних прямоугольников выходного сигнала интегратора. В этом примере и всех последующих примем, что $\varphi(t) = \varphi_2(t)$ и находится из (4). Соответствующая квадратурная формула имеет вид

$$\tilde{T}(NT_0) = T_0 \sum_{i=N-m}^{N-1} y(iT_0), \quad (10)$$

и, следовательно, $a_i = T_0$ для $0 \leq i \leq m-1$, $a_m = 0$. По формуле (8) находим сигнал

$$V(\tau) = 1(\tau) - 1(\tau - mT_0) - T_0 \sum_{i=1}^m \delta(\tau - iT_0). \quad (11)$$

Принимая во внимание, что $k_0(\tau) = 1(\tau)$ и учитывая (11), из (9) найдем импульсную переходную функцию инверсно-сопряженной системы (рис. 4)

$$\bar{k}_\Delta(\tau, t_n) = \tau - (\tau - mT_0) 1(\tau - mT_0) - T_0 \sum_{i=1}^m 1(\tau - iT_0). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (7), получим

$$\Delta I_{\max} = M_1 \frac{mT_0^2}{2}, \quad (13)$$

где M_1 — максимум первой производной интегрируемого сигнала.

2. Погрешность интегрирования методом трапеций выходного сигнала интегратора. Квадратурная формула для метода трапеций записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(NT_0) = T_0 \{ & 0,5y[(N-m)T_0] + y[(N-m+1)T_0] + \dots \\ & \dots + y[(N-1)T_0] + 0,5y(NT_0) \}. \end{aligned} \quad (14)$$

Следовательно $a_0 = a_m = 0,5T_0$; $a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = T_0$. Из (8) определяем

$$V(\tau) = 1(\tau) - 1(\tau - mT_0) - 0,5T_0 [\delta(\tau) + \delta(\tau - mT_0)] - T_0 \sum_{i=1}^{m-1} \delta(\tau - iT_0). \quad (15)$$

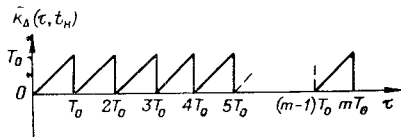


Рис. 4.

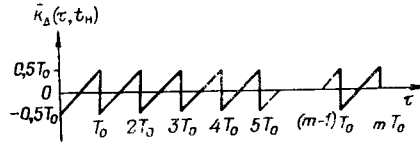


Рис. 5.

Импульсная переходная функция $\bar{k}_\Delta(\tau, t_n)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{k}_\Delta(\tau, t_n) = & \tau - (\tau - mT_0) 1(\tau - mT_0) - 0,5T_0 [1(\tau) + 1(\tau - mT_0)] - \\ & - T_0 \sum_{i=1}^{m-1} 1(\tau - iT_0). \end{aligned} \quad (16)$$

Интегрируя модуль функции (16), представленной на рис. 5, вычислим максимум погрешности интегрирования

$$\Delta I_{\max} = M_1 \frac{mT_0^2}{4}. \quad (17)$$

3. Погрешность интегрирования по формуле левосторонних прямоугольников выходного сигнала аperiodического звена $W(p) = \frac{1}{Tp+1}$. Сигнал $V(\tau)$ совпадает с выражением (11). Импульсную переходную функцию инверсно-сопряженной системы вычисляем как реакцию аperiodического звена на входной сигнал $V(\tau)$:

$$\bar{k}_\Delta(\tau, t_n) = \begin{cases} 1 - a_k e^{-\frac{\tau}{T}}; & (k-1)T_0 \leq \tau < kT_0; \quad k = 1, 2, \dots, m; \\ (a_{m+1} - e^{m\theta}) e^{-\frac{\tau}{T}}; & mT_0 \leq \tau \leq t_n = NT_0, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$a_k = 1 + \theta e^\theta \frac{1 - e^{(k-1)\theta}}{1 - e^\theta}; \quad \theta = \frac{T_0}{T}.$$

Подставляя (18) в (7) и учитывая, что (18) изменяет знак при $\tau = T \ln a_k$ и $\tau = kT_0$, находим максимальную погрешность интегрирования

$$\Delta I_{\max}(NT_0) = M \left\{ m^2 T_0 - 2mT - 2T \sum_{k=1}^m \ln a_k + T(1 + e^\theta) \sum_{k=1}^m a_k e^{-k\theta} + \right.$$

$$+ T \left(\frac{\theta e^\theta}{e^\theta - 1} - 1 \right) (1 - e^{-m\theta}) [1 - e^{-(N-m)\theta}]. \quad (19)$$

Абсолютный максимум достигается при $N \rightarrow \infty$. При малых $\theta = T_0/T < 0,2$ из (19) можно получить приближенную формулу

$$\Delta I_{\max}(NT_0) \approx MT \left\{ \frac{m\theta^2}{4} + \frac{\theta^2}{4} \frac{1 - e^{-2m\theta}}{1 - e^{-2\theta}} + \frac{\theta}{2} (1 - e^{-m\theta}) [1 - e^{-(N-m)\theta}] \right\}. \quad (20)$$

4. Погрешность интегрирования по формуле трапеций выходного сигнала аperiodического звена. Сигнал $V(\tau)$ совпадает с (15). Импульсную переходную функцию находим как реакцию аperiodического звена на сигнал $V(\tau)$:

$$\bar{k}_\Delta(\tau, t_{II}) = \begin{cases} 1 - b_k e^{-\frac{\tau}{T}}; & (k-1)T_0 \leq \tau < kT_0; \quad k = 1, 2, \dots, m; \\ \left[b_{m+1} - \left(\frac{\theta}{2} + 1 \right) e^{-m\theta} \right] e^{-\frac{\tau}{T}}; & mT_0 \leq \tau \leq NT_0, \end{cases} \quad (21)$$

где $b_k = 1 + \frac{\theta}{2} + \theta e^\theta \frac{e^{(k-1)\theta} - 1}{e^\theta - 1}$.

Подставляя (21) в (7) и учитывая, что (22) изменяет знак при $\tau = T \ln b_k$ и $\tau = kT_0$, вычисляем максимальную погрешность интегрирования

$$\Delta I_{\max}(NT_0) = MT \left\{ m^2\theta - 2m + 2 \sum_{k=1}^m \ln b_k + (1 + e^\theta) \sum_{k=1}^m b_k e^{-k\theta} + \left(1 - \frac{\theta}{2} + \frac{\theta e^\theta}{e^\theta - 1} \right) (1 - e^{-m\theta}) [1 - e^{-(N-m)\theta}] \right\}. \quad (22)$$

При малых $\theta < 0,2$ из (22) можно получить приближенную формулу

$$\Delta I_{\max}(NT_0) \approx MT \left\{ m \frac{\theta^2}{4} + \frac{\theta^2}{6} \frac{1 - e^{-m\theta}}{1 - e^{-\theta}} + \frac{\theta^2}{12} (1 - e^{-m\theta}) [1 - e^{-(N-m)\theta}] \right\}. \quad (23)$$

Заключение. Предложенная методика расчета максимальных погрешностей интегрирования выходных сигналов линейных систем является общей, так как позволяет, с одной стороны, решить большинство известных задач в их классической постановке, с другой — она дает способ решения задач, которые не могут быть решены классическими методами (см. примеры 2—4 в приложении).

Одним из основных достоинств метода является то, что поставленная задача может быть решена путем моделирования инверсно-сопряженной системы (см. рис. 3) и вычисления (7) на простых вычислительных машинах, что значительно облегчает расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ю. Ишлинский. Инерциальное управление баллистическими ракетами. М., «Наука», 1968.
2. Техническая кибернетика, кн. 2. Под ред. В. В. Солодовникова. М., «Машиностроение», 1967.
3. В. И. Крылов. Приближенное вычисление интегралов. М., Физматгиз, 1959.
4. И. С. Березин, Н. П. Жидков, т. I. Методы вычислений. М., «Наука», 1966.
5. В. Е. Борзых, Л. Т. Милов. К определению погрешности интерполяции выходных сигналов линейных динамических систем.— ИВУЗ, «Приборостроение», 1969, № 11.
6. А. В. Солодов. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. М., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
5 апреля 1971 г.