

Я. И. КАПИЦКИЙ, М. П. ЦАПЕНКО

(Новосибирск)

ЦИФРО-АНАЛОГОВЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА РАЗЛОЖЕНИИ ФУРЬЕ — УОЛША

Практическая реализация функциональных преобразователей (ФП) [1], устройств для формирования сигналов (Ф) [2] и развертывающих устройств (РУ) [3] в большинстве случаев основана на использовании кусочно-ступенчатой, кусочно-линейной (реже нелинейной) аппроксимации исходной функции. В принципе ФП, Ф и РУ могут быть построены на основе приближения функции суммой обобщенного ряда Фурье по системе ортогональных функций $\{\varphi_n(t)\}$. Использование ортогональных разложений при реализации ФП, Ф и РУ в некоторых случаях может оказаться весьма эффективным, если учитывать, что при заданной погрешности приближения число коэффициентов разложения может быть меньше числа участков кусочной аппроксимации, а при необходимости погрешность приближения может быть уменьшена увеличением числа членов разложения, причем предшествующие коэффициенты Фурье остаются без изменения.

Затруднения, возникающие при практической реализации ФП, Ф и РУ, основанных на применении математического аппарата рядов Фурье, связаны в основном со сложностью получения всех используемых функций ортогональной системы $\{\varphi_n(t)\}$. В связи с этим определенный интерес представляет система ортогональных функций Уолша [4, 5], которые могут быть легко сформированы в виде электрических сигналов. Возможность использования разложения Фурье — Уолша при реализации ФП уже была показана в [6]. В настоящей работе рассматриваются принципы построения и анализ погрешностей цифро-аналоговых ФП, основанных на разложении Фурье — Уолша, а также схемы основных узлов и примеры использования ФП при обработке сигналов в измерительных информационных системах.

Функции Уолша (рис. 1) определяются из выражения

$$W_l = R_\alpha R_\beta R_\gamma, \quad (1)$$

где $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma$ — функции Радемахера. Действительно, рекуррентное соотношение

$$W_k^{***} = W_{k \oplus l}, \quad (2)$$

где \oplus означает сложение по модулю 2. Если разделить функции Уолша на четные W_c^i и нечетные W_s^i [7], то (2) примет вид:

$$W_c^i W_c^k = W_c^{(i \oplus k)}; W_c^i W_s^{(k+1)} = W_s^{[(i \oplus k) + 1]}; W_s^{(i+1)} W_s^{(k+1)} = W_c^{(i \oplus k)}. \quad (3)$$

Ряд Фурье — Уолша для функций $f(t)$ с интегрируемым на $[0, T]$ квадратом представляется следующим образом:

$$f(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_s^i W_s^i + a_c^i W_c^i), \quad (4)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt; a_s^i = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) W_s^i dt; a_c^i = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) W_c^i dt. \quad (5)$$

Если известны значения функции $f(k)$ в двоично-рациональных точках $k/2^n$, где $k = 1, 2, \dots, 2^n$, то коэффициенты Фурье — Уолша определяются как

$$a_i = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \text{sign} W_{ik} f(k), \quad (6)$$

где $\text{sign} W_{ik}$ — знак функции Уолша W_i на отрезке $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$.

Наилучшее равномерное приближение функции может быть получено, если при вычислении коэффициентов a_i по формуле (6) положить

$$f(k) = \frac{f(k)_{\max} \pm f(k)_{\min}}{2},$$

где $f(k)_{\max}$ и $f(k)_{\min}$ — соответственно максимальное и минимальное значения функции $f(t)$ на отрезке $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$.

При вычислении коэффициентов Фурье — Уолша целесообразно использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье — Уолша (БПФУ). Наиболее простой алгоритм БПФУ может быть получен при использовании преобразования Адамара для каждой пары последовательных значений исходных данных [8]

$$\begin{bmatrix} B_{k,i} \\ B_{k,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ H \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{k-1,i} \\ B_{k-1,i+1} \end{bmatrix}; B_{1,i} = f(k); \\ i = 1, 3, 5, \dots, 2^n - 1; k = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (7)$$

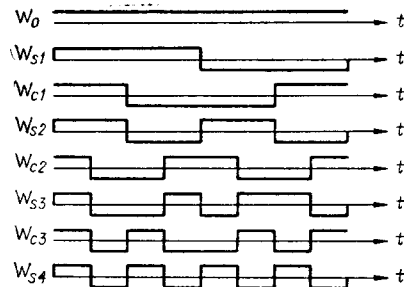


Рис. 1. Функции Уолша.

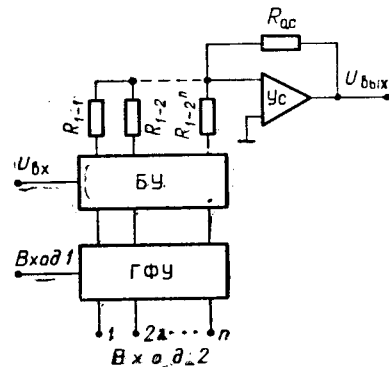


Рис. 2. Блок-схема устройства.

где $[H]$ — матрица Адамара второго порядка. Для вычисления 2^n коэффициентов необходимо n раз последовательно применить преобразование (7), и, следовательно, весь цикл вычисления коэффициентов Фурье — Уолша с помощью алгоритма БПФУ содержит только $n2^n$ арифметических операций типа «сложение — вычитание».

Устройства, основанные на разложении Фурье — Уолша, могут быть реализованы в соответствии с (6) или (4), причем в первом случае осуществляется анализ сигнала, во втором — синтез сигнала по заданным коэффициентам разложения. Ниже рассматриваются принципы построения, функциональные возможности и основные характеристики реализованного в соответствии с (4) цифро-аналогового функционального преобразователя (ФП). Как показано на рис. 2, ФП состоит из генератора функций Уолша (ГФУ), блока умножения (БУ) функций Уолша на заданные коэффициенты разложения и на входной сигнал $U_{вх}$ и суммирующего усилителя Ус. Представленная блок-схема ФП является общей для подобных устройств при других применяемых системах ортогональных функций. Однако использование системы Уолша имеет свои особенности, на которых следует кратко остановиться. Как уже отмечалось выше, преимущество системы Уолша перед другими ортогональными системами и полиномами заключается в простоте реализации генератора функций Уолша и осуществления операции умножения функций Уолша на исследуемый сигнал (при анализе сигналов) или на заданные коэффициенты разложения (при синтезе сигналов). Получение функций Уолша из функций Радемахера, которые могут генерироваться двоичным счетчиком, основано на использовании двоичных схем сложения по модулю 2, причем, как следует из (1), любая функция Уолша может быть сформирована независимо от других. Однако при высоких порядках используемых функций Уолша применение такого метода для построения генератора функций Уолша вряд ли оправдано, так как приводит к громоздкой схеме генератора функций Уолша. Целесообразнее воспользоваться рекуррентными соотношениями (3). Поскольку функции Уолша принимают только значения $+1$ и -1 , то выполнение операций перемножения их с сигналом соответствует его суммированию со знаком, определяемым значением функций Уолша в каждый данный момент времени, и поэтому может осуществляться с помощью ключей, управляемых сигналами, соответствующими функциям Уолша.

Общее выражение для выходного сигнала рассматриваемого ФП может быть представлено в виде

$$U_{вых} = U_{вх} K \Phi_n(N), \quad (8)$$

где $U_{вх}$ — входной сигнал; K — обобщенный коэффициент передачи суммирующего усилителя, который можно изменять, например, используя в качестве $R_{о.с}$ цифровое управляемое сопротивление; $\Phi_n(N)$ — аппроксимированная функция дискретных значений аргумента N , определяемая соотношением

$$\Phi_n(N) = \sum_{i=1}^{2^n} a_i W_i(N).$$

Коэффициенты разложения a_i вычисляются для аппроксимируемой исходной функции $\varphi(t)$ по формуле для среднеквадратичного или равномерного приближения функций.

Могут найти практическое применение следующие частные случаи:

$$U_{вх} = \text{const} = 1; K = \text{const} = 1; N = \text{const} = N; U_{вых} = \Phi_n(N); \quad (9)$$

$$U_{вх} = \text{const} = 1; K = \text{const} = 1; N = \text{var} = N(t);$$

$$U_{\text{вых}}(t) = \varphi_n(t + mT); \quad T = \frac{2^n}{F}; \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad (10)$$

$$U_{\text{вх}} = \text{var} = U_{\text{вх}}(t); \quad K = \text{const} = 1; \quad N = \text{const} = N; \\ U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(t) \varphi_n(N); \quad (11)$$

$$U_{\text{вх}} = \text{const} = 1; \quad K = \text{const} = 1; \quad U_{\text{вых}}(N_1) = U_1; \quad N_1 = \psi(U_1). \quad (12)$$

Выражения (9) — (12) описывают соответственно работу формирователя дискретных значений аппроксимированной функции, генератора периодических сигналов, цифро-аналогового функционального преобразователя и развертывающего устройства. В (10) F — частота импульсов, которые подаются на вход счетчика, а в (12) $\psi(U_1)$ — функция, обратная аппроксимированной функции $\varphi_n(N)$.

В соответствии с (11) устройство осуществляет умножение сигнала $U_{\text{вх}}(t)$ на значения аппроксимированной функции, соответствующие дискретным значениям аргумента. Если использовать два устройства (с общим генератором функций Уолша), аппроксимирующие тригонометрические функции $\sin\left(\frac{\pi N}{2^n}\right)$ и $\cos\left(\frac{\pi N}{2^n}\right)$, и подавать входной сигнал одновременно на входы устройств, то

$$U_{1\text{вых}} = U_{\text{вх}}(t) \sin\left(\frac{\pi N}{2^n}\right); \quad U_{2\text{вых}} = U_{\text{вх}}(t) \cos\left(\frac{\pi N}{2^n}\right). \quad (13)$$

Необходимость в выполнении вычислительных операций, соответствующих (13), встречается при гармоническом анализе и, как будет показано ниже, при линейном преобразовании системы декартовых координат.

Сопrotивления $R_{1-i} \div R_{1-2^n}$ рассчитываются исходя из вычисленных коэффициентов Фурье — Уолша для приближения в среднем или равномерного приближения, причем

$$R_{1-i} = \frac{R_{\text{о.с}}}{a_i}. \quad (14)$$

Следует отметить важное обстоятельство: если коэффициенты разложения вычисляются по формуле (5), что обеспечивает приближение в среднем, то при необходимости шаг квантования аргумента может быть уменьшен за счет увеличения числа используемых функций Уолша, причем все предшествующие коэффициенты разложения, а соответственно и значения сопротивлений в суммирующем усилителе остаются без изменений. Последние не выполняются для равномерного приближения.

Основную среднеквадратичную погрешность устройства можно выразить так:

$$\delta \approx \sqrt{\delta_a^2 + \delta_{\text{и}}^2}, \quad (15)$$

где δ_a — погрешность аппроксимации (теоретическая); $\delta_{\text{и}}$ — инструментальная погрешность.

Погрешность аппроксимации, обусловленная конечным числом используемых членов разложения, определяется следующим образом:

$$\delta_a = \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^{2^n} a_i^2}.$$

Число используемых членов разложения может быть значительно меньше 2^n , если учитывать важные свойства ортогональных разложе-

ний, рассмотренных выше. Дополнительная погрешность аппроксимации, возникающая при отбрасывании m членов разложения, равна

$$\delta_a^{(m)} = \sqrt{\sum_{i=2^{n-m}}^{2^n} a_i^2},$$

и соответственно погрешность аппроксимации при использовании $2^n - m$ членов разложения определится из выражения

$$\delta_a^{(2^n-m)} = \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^{2^n-m} a_i^2}.$$

Рассмотрим конкретный пример. В табл. 1 приведены коэффициенты разложения Фурье—Уолша для функции $f(t) = \sin \pi t$. В разложении

Таблица 1

W_i	$a_i \cdot 10^5$	W_i	$a_i \cdot 10^5$	W_i	$a_i \cdot 10^5$	W_i	$a_i \cdot 10^5$
W_0	63 665	$W_{c^{14}}$	1295	$W_{c^{24}}$	154	$W_{c^{10}}$	25
W_{c^1}	26 370	W_{c^4}	1247	$W_{c^{29}}$	129	$W_{c^{19}}$	13
W_{c^3}	12 663	$W_{c^{30}}$	647	W_{c^9}	128	$W_{c^{26}}$	13
W_{c^7}	6270	$W_{c^{12}}$	622	$W_{c^{16}}$	77	$W_{c^{23}}$	8
W_{c^2}	5245	W_{c^5}	517	$W_{c^{25}}$	64	$W_{c^{18}}$	6
$W_{c^{15}}$	3128	$W_{c^{28}}$	311	$W_{c^{11}}$	61	$W_{c^{22}}$	3
W_{c^6}	2597	W_{c^8}	308	$W_{c^{17}}$	32	$W_{c^{20}}$	2
$W_{c^{31}}$	1563	$W_{c^{13}}$	258	$W_{c^{27}}$	31	$W_{c^{21}}$	1

отсутствуют коэффициенты a_i , так как функция $f(t)$ четная. Вычисленные значения среднеквадратичных погрешностей аппроксимации при использовании 32, 20 и 10 коэффициентов разложения соответственно равны: $\delta_a^{(32)} = 0,0094$; $\delta_a^{(20)} = 0,0095$; $\delta_a^{(10)} = 0,0151$. Рассмотренный пример показывает, что уменьшение количества используемых коэффициентов разложения от 32 до 20 слабо влияет на среднеквадратичную погрешность аппроксимации. Это позволяет в устройствах, подобных описанному, при заданной δ_a использовать количество коэффициентов разложения Фурье—Уолша значительно меньше 2^n .

Приведем краткий анализ инструментальной погрешности, которую в общем случае можно разделить на статическую и динамическую составляющие. Статическая инструментальная погрешность обусловлена неточностью установки коэффициентов передачи суммирующего усилителя для каждого коэффициента разложения и погрешностью выполнения операции умножения. Динамическая инструментальная погрешность связана с задержками сигналов, приводящими к нарушению ортогональности генерируемых функций Уолша. Однако в сравнительно низкочастотном диапазоне и использовании быстродействующих элементов влиянием динамической погрешности можно пренебречь. В дальнейшем будет рассматриваться только статическая погрешность. Если δ_i — составляющая инструментальной погрешности, учитывающая влияние i -го коэффициента разложения, то, поскольку погрешности, вносимые каждым коэффициентом, независимы, суммарную инструментальную

погрешность при использовании $2^n - m$ членов разложения можно выразить соотношением

$$\delta_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{2^n - m} \delta_n^{2i}}$$

Выражение для δ_n имеет вид

$$\delta_n = \sqrt{(\delta_{k,i})^2 + (\delta_{w,i} K_i)^2},$$

где $\delta_{k,i}$ — среднеквадратичная погрешность установки коэффициента передачи суммирующего усилителя K_i для i -й функции Уолша, а $\delta_{w,i}$ — погрешность, вносимая блоком умножения и возникающая главным образом за счет неидеальности ключей, используемых в блоке умножения. При использовании в суммирующем усилителе сопротивлений, обеспечивающих $\delta_{k,i} = 0,001$, и при $\delta_{w,i} = 0,001$ среднеквадратичная инструментальная погрешность аппроксимации функции $f(t) = \sin \pi t$ суммой ряда Фурье — Уолша, состоящей из 20 членов разложения, составляет 0,004, а общая основная погрешность, вычисленная в соответствии с (15), не превышает 0,012.

В практически реализованном ФП генератор 64 функций Уолша выполнен в соответствии с (3). Функции Радемахера генерируются двоичным счетчиком, который при параллельном вводе кода аргумента применяется как регистр. Функции Уолша формируются логическими схемами сложения по модулю 2. Цифровая часть устройства выполнена на интегральных схемах серии 133. Блок умножения (рис. 3), состоящий из инвертора входного сигнала Ин и транзисторных ключей, практически осуществляет переключение уровней напряжений $U_{вх}(t)$ и $-U_{вх}(t)$ на входах суммирующего усилителя. Ключи управляются сигналами, соответствующими прямым и инверсным значениям функций Уолша. Применение транзисторов МПЗО обеспечивает максимальную частоту переключения 100 кГц. Суммирующий усилитель (рис. 4) состоит из истоковых повторителей (полевые транзисторы T_1 и T_2), эмиттерных повторителей, собранных на интегральной схеме ИС₁ (1КТО11), усилителя постоянного тока на ИС₂ (1УТ401А) и выходных эмиттерных повторите-

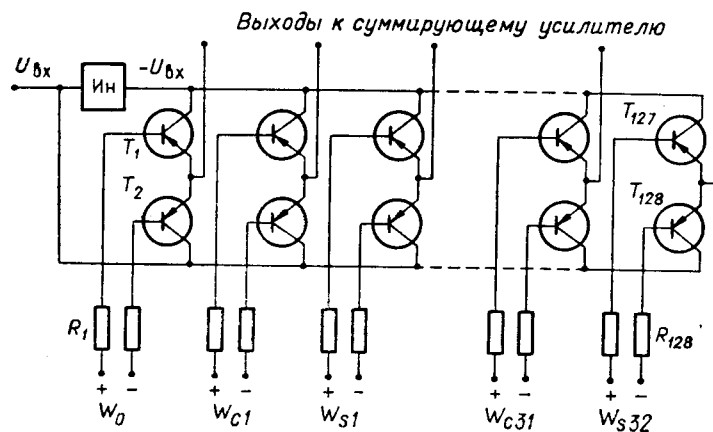


Рис. 3. Схема суммирующего усилителя.

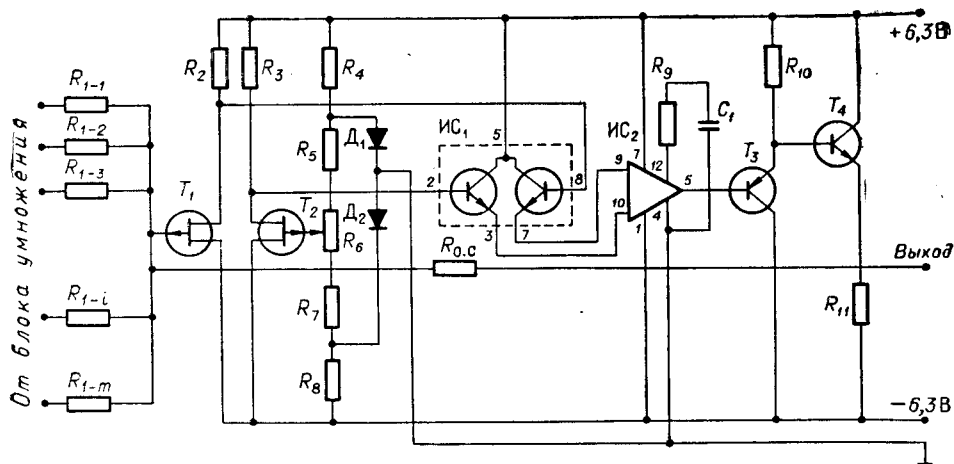


Рис. 4. Схема блока умножения.

лей (транзисторы T_3, T_4). Установка нулевого уровня на выходе усилителя осуществляется с помощью переменного сопротивления R_7 .

Коэффициенты разложения Фурье — Уолша для аппроксимируемых функций вычислялись на ЦВМ «Минск-22» с помощью алгоритма БПФУ. Сопротивления суммирующего усилителя определялись по формуле (14). В табл. 2 приведены значения сопротивлений для аппроксимации функции $f(t) = \sin 2\pi t$ ($0 \leq t \leq 1$) при $R_{0.c} = 2$ кОм. Выбор количества членов разложения и точности сопротивлений суммирующего усилителя определяется заданной величиной погрешности аппроксимации. Естественно, что к точности бóльших сопротивлений, соответствующих меньшим коэффициентам разложения, предъявляются менее жесткие требования.

Разработанное устройство используется в измерительной системе для выполнения ряда вычислительных операций и формирования напряжений разверток, необходимых для отображения информации на экране ЭЛТ. Одна из вычислительных операций типа (13) связана с необходимостью выполнения поворота изображения на экране ЭЛТ на определенный угол $\varphi = \varphi_0$. В этом случае требуется произвести следующие преобразования:

$$U'_x = U_x \cos \varphi_0 - U_y \sin \varphi_0; \quad U'_y = U_x \sin \varphi_0 + U_y \cos \varphi_0, \quad (16)$$

где U_x, U_y и U'_x, U'_y — напряжения разверток, соответствующие исходному и повернутому положению изображения. Для реализации (16) в общем случае необходимо было бы использовать 4 аппроксимирующих устройства, однако посредством применения известного метода импульс-

Таблица 2

a_i	$R_i, \text{кОм}$	a_i	$R_i, \text{кОм}$	a_i	$R_i, \text{кОм}$	a_i	$R_i, \text{кОм}$
a_{s^1}	3,141	a_{s^9}	160,4	$a_{s^{17}}$	649,3	$a_{s^{25}}$	321,5
a_{s^3}	7,584	$a_{s^{11}}$	386,9	$a_{s^{19}}$	156,2	$a_{s^{27}}$	775,2
a_{s^5}	38,13	$a_{s^{13}}$	77,01	$a_{s^{21}}$	8000	$a_{s^{29}}$	154,4
a_{s^7}	15,79	$a_{s^{15}}$	31,90	$a_{s^{23}}$	3279	$a_{s^{31}}$	639,4

ной модуляции и демодуляции напряжений разверток их число сокращается до двух.

Рассмотренные свойства разложения Фурье—Уолша позволяют утверждать, что устройства для функционального преобразования сигналов, основанные на таком разложении, найдут широкое применение в измерительных информационных системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Б. Смоллов. Вычислительные преобразователи с цифровыми управляемыми сопротивлениями. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961.
2. Ю. М. Горский и др. Управляемый генератор инфранизких периодических колебаний произвольной формы.—Электричество, 1968, № 7.
3. Ф. Е. Темников. Теория развертывающих систем. М., Госэнергоиздат, 1963.
4. Ф. Е. Темников, В. Л. Славинский. Математические развертывающие системы. М., «Энергия», 1970.
5. С. Качмаж, Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1958.
6. N. J. Fine. On the Walsh Functions.—Trans. Amer. Math. Soc., 1949, v. 65, № 3.
7. И. И. Коршевер, В. Б. Смоллов, П. Е. Твердохлеб, В. С. Фомичев. Об одной возможности построения цифро-аналоговых функциональных преобразователей.—Автоматика, 1966, № 2.
8. H. Nagmuth. Application of Walsh functions in communications.—IEEE Spektrum, 1969, v. 6, № 11.
9. K.—H. Georgi. Ein Schema für die Schnelle Walsh-Transformation.—NTZ, 1971, H. 9.

*Поступила в редакцию
24 января 1972 г.*